Въ Императорскій Лицей
въ память Цесаревича Николая

П. А. НЕКРАСОВЪ.

206 21/10
И 304/32

отъ автора

ТЕОРІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ

Изданіе 2-е, дополненное статистической теоріей взаимоотношеній и элементами Номографіи.

5р.
ПОГАШЕНО

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Складъ изданія у К. Л. Риккера.
Невскій пр., 14.
1912.

ВСЕСОЮЗНАЯ
БИБЛИОТЕКА
имени
В. И. ЛЕНИНА
8267-45
замена
ПОСТУПИЛО
25-018
46

Типографія Ю. Н. Эрлихъ (влад. А. Э. Коллинсъ), М. Дворянская, 19.

ПРОСВѢТИТЕЛЬНЫЕ методы издавна считаютъ однимъ изъ своихъ важнѣйшихъ образовательныхъ и критическихъ орудій математическую теорію вѣроятностей, въ связи со статистикой.

Настоящее второе изданіе «Теоріи Вѣроятностей», плодъ многолѣтнихъ моихъ ученыхъ трудовъ и преподавательской дѣятельности въ Императорскомъ Московскомъ Университетѣ, въ Константиновскомъ Межевомъ Институтѣ и отчасти въ Императорскомъ С.-Петербурискомъ Университетѣ, выпускается въ свѣтъ на пособіе, ассиновванное изъ средствъ Министерства Народнаго Просвѣщенія, которому приношу глубочайшую благодарность въ лицѣ Министра Народнаго Просвѣщенія ЛЬВА АРИСТИДОВИЧА КАССО, разрѣшившаго отпускъ означеннаго пособія.

При корректурѣ мнѣ приходили въ голову улучшенія изложенія деликатнѣйшихъ мѣстъ теоріи. Эти авторскія вдохновенія приходилось дорого оплачивать. Въ этомъ расходѣ мнѣ помогло дружеское пособіе основателя Московскаго Педагогическаго Института для приготовленія учителей среднихъ учебныхъ заведеній, ПАВЛА ГРИГОРЬЕВИЧА ШЕЛАПУТИНА, которому также приношу мою искреннѣйшую признательность.

Авторъ.

Содержаніе.

стр.

ПРЕДИСЛОВІЕ . . . . . I–XXXIV
ВСТУПЛЕНІЕ . . . . . 1—4

Часть I.

Законы случайности, законы мышленія и вѣроятность. Элементы Номографіи. Вспомогательныя математическія формулы.

ГЛАВА I. Числовая мѣра произвольныхъ и смутно опредѣленныхъ, загадочныхъ величинъ. Скалы явленій; среднія мѣры измѣнчивыхъ способностей и интересовъ человѣка. Законы мысли. Категорическія сужденія. Классификація функцій. Аналогіи. Фактическая власть при мысленномъ владѣніи, аналогическомъ матеріальному . . . . . 5—44
§ 1_1—стр. 5; § 1_2–стр. 7; § 2–стр. 9; § 3—стр. 10; § 4—стр. 17; § 5—стр. 26; § 6_1—стр. 32; § 6_2—стр. 36; § 7—стр. 41.

ГЛАВА II. Вѣроятность и повторяемыя дѣла (функціи). Quaestio facti. Статистика вѣроятностныхъ явленій и отношеніе ея матеріаловъ къ таблицамъ и чертежамъ номографическаго исчисленія и интерполированія . . . . . 45—150
§ 8_1—стр. 45; § 8_2—стр. 48; § 9–стр. 50; § 10—стр. 55; § 11—стр. 59; § 12–стр. 61; § 13—стр. 63; § 14_1—стр. 67; § 14_2—стр. 71; § 15—стр. 81; § 16—стр. 85; § 17_1—стр. 93; § 17_2—стр. 96; § 18_1—стр. 98; § 18_2—стр. 105; § 19–стр. 114; § 20_1—стр. 121; § 20_2—стр. 123; § 21_1 - стр. 124; § 21_2—стр. 131; § 22—стр. 132; § 23_1—стр. 142; § 23_2—стр. 143; § 23_3—стр. 146.

ГЛАВА III. Ситуація при помощи уравненій. Рѣшеніе алгебраическихъ линейныхъ опредѣленныхъ уравненій въ случаѣ значительнаго числа неизвѣстныхъ . . . . . 151—174
§ 24—стр. 151; § 25—стр. 153; § 26—стр. 165.

ГЛАВА IV. Вспомогательныя формулы и функціи математическаго анализа, относящіяся къ коеффиціентамъ и кривымъ вѣроятности и къ закону большихъ чиселъ . . . . . 175—206
§ 27—стр. 175; § 28—стр. 178; § 29—стр. 182; § 30—стр. 186; § 31—стр. 192; § 32—стр. 200; § 33—стр. 205.

Часть II.

Элементы математической теоріи вѣроятностей.

ГЛАВА I. Опредѣленія . . . . . 207—219
§ 1—стр. 207; § 2—стр. 212; § 3–стр. 216.

ГЛАВА II. Теоремы сложенія и умноженія вѣроятностей. Гипотезы и полныя вѣроятности . . . . . 220—242
§ 4—стр. 220; § 5—стр. 221; § 6—стр. 222; § 7—стр. 226; § 8 - стр. 231; § 9—стр. 236; § 10—стр. 238.

ГЛАВА III. О вѣроятности сложныхъ событій при многократномъ повтореніи опыта . . . . . 243—251
§ 11—стр. 243; § 12—стр. 247; § 13—стр. 250.

стр.

ГЛАВА IV. Простой законъ большихъ чиселъ. Вопросы, рѣшаемые при помощи приблизительной достовѣрности . . . . . 252—281
§ 14—стр. 252; § 15—стр. 256; § 16—стр. 261; § 17—стр. 265.

ГЛАВА V. Математическое ожиданіе, его сличеніе съ данными статистики и его приложеніе къ вопросамъ о дѣятельности, приносящей плоды, и объ играхъ. Оцѣнка цѣнностей въ обмѣнѣ и рискѣ. Обобщеніе простого закона большихъ чиселъ и діагнозъ его устойчивости . . . . . 282—351
§ 18—стр. 282; § 19—стр. 285; § 20—стр. 290; § 21—стр. 293; § 22—стр. 302; § 23—стр. 304; § 24—стр. 307; § 25—стр. 309; § 26—стр. 314; § 27—стр. 324; § 28—стр. 338; § 29—стр. 340; § 30—стр. 343; § 31—стр. 349.

ГЛАВА VI. Ученіе о вѣроятностяхъ à posteriori. Элементы вѣроятностной опытной теоріи познанія . . . . . 352—370
§ 32—стр. 354; § 33—стр. 356; § 34—стр. 361; § 35—стр. 369.

ГЛАВА VII. Приложеніе теоріи вѣроятностей къ изслѣдованію результатовъ и погрѣшностей измѣреній . . . . . 371—400
§ 36—стр. 371; § 37—стр. 372; § 38—стр. 372; § 39—стр. 373; § 40—стр. 374; § 41—стр. 374; § 42—стр. 376; § 43—стр. 377; § 44—стр. 378; § 45—стр. 382; § 46—стр. 384; § 47—стр. 387; § 48—стр. 389; § 49—стр. 390; § 50—стр. 394; § 51—стр. 395; § 52—стр. 398.

ГЛАВА VIII. Гауссова теорія способа наименьшихъ квадратовъ . . . . 401—402
§ 53—стр. 401; § 54—стр. 402; § 55—стр. 404; § 56—стр. 406; § 57—стр. 418; § 58—стр. 421; § 59—стр. 423; § 60—стр. 425.

Часть III.

Критеріи антропологіи, этнологіи и біологіи. Графическое символическое исчисленіе массовыхъ явленій, въ ихъ взаимоотношеніи, логической средней и крайней связи, сосуществованіи и исторической послѣдовательности. Варіаціи вѣроятій и системъ подъ дѣйствіемъ поводовъ. Асимптотическія выраженія вѣроятностей итоговъ.

ГЛАВА I. Теорія взаимоотношеній, комбинируемая съ теоріей среднихъ. Графическія символическія тѣла. Схемы изслѣдованія антропологическихъ и другихъ законовъ сосуществованія, или онтологической статики . . . . . 427—461
§ 1—стр. 427; § 2—стр. 431; § 3—стр. 434; § 4—стр. 436; § 5—стр. 439; § 6—стр. 441; § 7—стр. 444; § 8—стр. 447; § 9—стр. 449; § 10—стр. 450; § 11—стр. 457.

ГЛАВА II. Историко-статистическая теорія. Критеріи сродства и активы и пассивы въ случаѣ закономѣрностей послѣдовательности и цѣлесообразности. Варіація вѣроятій и интересовъ подъ дѣйствіемъ хронологической субординаціи фактовъ . 461—471
§ 12—стр. 461; § 13—стр. 464; § 14—стр. 467; § 15—стр. 469.

ГЛАВА III. Производящія функціи вѣроятности спеціальнаго итога и форма индуктивныхъ уравненій, въ связи съ упрощеніемъ задачъ помощію цѣлыхъ круглыхъ чиселъ . . . . . 472—489
§ 16—стр. 472; § 17—стр. 478; § 18—стр. 480; § 19—стр. 482; § 20—стр. 482; § 21—стр. 484; § 22—стр. 487; § 23—стр. 488.

ГЛАВА IV. Историческія превращенія помѣченныхъ скалъ и графическихъ пространствъ теоріи взаимоотношеній. Мѣры, варьирующіяся по ходу времени, и мѣры незыблемыя. Вѣковыя метрическія измѣненія . . . . . 490—499
§ 24—стр. 490; § 25—стр. 494; § 26—стр. 497.

ГЛАВА V. Асимптотическія представленія вѣроятностей спеціальныхъ итоговъ и соотвѣтственные типы кривыхъ вѣроятности. Черезполосица доказательствомъ оправданныхъ и произвольно взятыхъ кривыхъ частости. Кривая смертности и пять возрастовъ жизни. Кассы на взаимостраховомъ началѣ. 499—532
§ 27—стр. 499; § 28—стр. 506; § 29—стр. 510; § 30—стр. 515; § 31—стр. 518; § 32—стр. 523; § 33—стр. 524; § 34—стр. 529.

Важнѣйшія опечатки и поправки.

Стран.	Строка.	НАПЕЧАТАНО.	ДОЛЖНО БЫТЬ.
XII	9 снизу	Многочисленное	Многочленное
6	6 сверху	Скалы и	Скалы явленій и
23	8 снизу	онтологіи	генезисѣ
25	6 сверху	оно привязываетъ	оно во множествѣ испытаній привязываетъ
66	5 »	(x_1, x_x)	(x_1, x_a)
79	17 »	$\Theta\,(1)$	$\Theta\,(1, h)$
79	14 снизу	$x = L\,.\,N$ и $y = L_1\,.\,\rho$	$y = L\,.\,N$ и $x = L_1\,.\,\rho$
98	20 сверху	и причинъ явленій	причинъ и явленій
105	5 »	(§ 22)	(часть II, § 27)
106	16 снизу	прогматической	прагматической
115	13 »	царства 1°	царства 1° внутренняго софиста
115	13 »	царства 2°	царства 2° нравственнаго міропорядка.
126	10 »	(неиллюзорныя)	(иногда иллюзорная)
134	23 »	цѣломудренно	цѣломудро
146	10 »	19_1	18_1
193	13 сверху	$Ae^{B(x-n)}$	$Ae^{B(x-n)^2}$
199	13 снизу	$\frac{pqu}{m}\left\{\frac{1}{(q_1+p_1u)^2}+\ldots+\frac{1}{(q_m+p_mu)^2}\right\}$	$\frac{u}{m}\left\{\frac{p_1q_1}{(q_1+p_1u)^2}+\ldots+\frac{p_mq_m}{(q_m+p_m\,u)^2}\right\}$
250	1 сверху	$P_{s,x}$	$\Delta P_{s,x}$
322	9 снизу	31	32
428	6 сверху	еаемой	разсматриваемой
428	5 снизу	Instroduction	Introduction
429	3 сверху	тяжести, куда	тяжести чернильныхъ мѣстъ, куда
429	4 »	чаще всего	при записи
430	17 »	$+\,a_{nn}\,x_n$	$+\,a_{nm}\,x_n$
433	5 »	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$
433	13 »	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$
433	15 »		
476	10 снизу	*гиротезъ*	*гипотезъ*
477	9 сверху	$f_{\mu,r}\,(z)$	$f_{\mu,\nu}\,(z)$
504	25 »	$+\,\nu a_3$	$+\,\nu a_2$
509	17 »	обозначеніе (7)	обозначеніе (8)
513	5 снизу	$n =$	$x =$

Предисловіе.

Обыкновенный университетскій курсъ теоріи вѣроятностей обнимается второю частью настоящей книги. Статистическая теорія взаимоотношеній

Опечатки и поправки,

вновь замѣченныя въ книгѣ *П. А. Некрасова:*

«Теорія вѣроятностей».

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
XII	8 снизу	не сводило	не сводимо
XXIII	15 сверху	см. ниже гл. III и IV	см. ниже ч. II, гл. III и IV
55	18 »	Лейницевай	Лейбницевой
89	7 »	Бугаевскаго	Бугаевскою
»	4 5 6 снизу	$= \eta . E$	$= E$
90	12 сверху	Дробь (8)	Дробь (9)

мнѣнія, гаданія и увѣренности или ирраціональнаго знанія.

*) Первое изданіе настоящей книги было выпущено въ Москвѣ въ 1896 г., какъ лекціи, читанныя мною въ Моск. Университетѣ и въ Межевомъ Институтѣ. Объемъ книги во 2-мъ изданіи разросся отъ прибавленія *третьей* части, содержащей статистическую теорію взаимоотношеній и историко-статистическія теоріи, и отъ прибавленія *первой* части, содержащей философскую пропедевтику (гносеологическій очеркъ), основы номографическаго исчисленія и вспомогательныя главы чистой математики.

Предисловіе.

Обыкновенный университетскій курсъ теоріи вѣроятностей обнимается второю частью настоящей книги. Статистическая теорія взаимоотношеній изложена въ третьей части.

Желающій ознакомиться спеціально лишь съ исчисленіемъ вѣроятностей и его приложеніями къ статистикѣ, общественному кредиту, экономіи, біологіи, этнографіи и праву, отсылается прямо ко второй и третьей частямъ настоящей книги *). Первая же часть содержитъ элементы Номографіи и философскую пропедевтику, которая выясняетъ методъ многообразной теоретической и практической работы союзовъ на вѣру и различныхъ закономѣрностей въ человѣческой средѣ, для ея усовершенствованія.

Резюмируемъ здѣсь вкратцѣ общія философскія исходныя точки и научныя, дидактическія цѣли настоящей книги.

Лапласъ ввелъ въ математическій анализъ такъ называемыя *производящія функціи*, связанныя съ различными скалами *производныхъ перемѣнныхъ явленій*, опредѣляющія разныя функціи этихъ перемѣнныхъ и заступающія мѣсто множества таблицъ и діаграммъ, съ которыми имѣетъ дѣло Наука и Вѣроятность.

Со временъ Лапласа, Гаусса и Коши теорія вѣроятностей, нераздѣльная со статистикой и творчествомъ, имѣя дѣло съ міромъ идей, словъ, именъ и разныхъ мѣръ ожиданія и съ программными опытами, вступила въ связь съ аналитическою теоріей производящихъ функцій, т. е. со всею математикой, включая сюда раціональную механику и математическую физику, и стала точною основною наукою, зацѣпляющею въ своемъ апріорномъ и апостеріорномъ сужденіи и въ программахъ опыта и отчета всѣ вообще области не только раціональнаго знанія, но и сомнѣнія, гаданія и увѣренности или ирраціональнаго знанія.

*) Первое изданіе настоящей книги было выпущено въ Москвѣ въ 1896 г., какъ лекціи, читанныя мною въ Моск. Университетѣ и въ Межевомъ Институтѣ. Объемъ книги во 2-мъ изданіи разросся отъ прибавленія *третьей* части, содержащей статистическую теорію взаимоотношеній и историко-статистическія теоріи, и отъ прибавленія *первой* части, содержащей философскую пропедевтику (гносеологическій очеркъ), основы номографическаго исчисленія и вспомогательныя главы чистой математики.

Общій основной методъ производящихъ функцій объединяетъ двѣ области познаванія: 1) Механику вселенной (физику) и 2) Психологію довѣрія. Онъ приближаетъ Науку почти къ *цѣльному знанію*; онъ связываетъ себя (въ приложеніяхъ къ механикѣ, исчисленію вѣроятностей и статистикѣ): 1) съ *предѣльными* или *асимптотическими* выраженіями функцій весьма большого числа m повторяемыхъ операцій, стремящагося къ *безконечности*, и 2) съ *приближенными* выраженіями тѣхъ же функцій, получаемыми въ предположеніи, что устанавливающееся на данный текущій срокъ число m работающихъ операцій весьма велико, но не безконечно. Позади производящихъ функцій разумѣются самостоятельные причинные факторы и ихъ орудія, средства *).

Въ Физикѣ теорія производящихъ функцій и опытъ практическаго оперированія открываютъ порядокъ выхода типическихъ реальныхъ явленій одного рода, именно—матеріальныхъ явленій, соотвѣтствующихъ, говоря на философскомъ языкѣ, *наивному реализму*. Въ Психологіи теорія производящихъ функцій и *внутренній* опытъ открываютъ присутствіе *реальностей другого рода*, именно духовныхъ реальностей, Гербартіанскихъ *реаліевъ*, живущихъ, питающихся идеями.

Субъективность мысли есть свойство уединеннаго, частнаго нашего сужденія о различныхъ типическихъ явленіяхъ, происходящихъ на узкихъ скалахъ. Объективность же мысли есть свойство *синтетическаго* общаго разсужденія, весьма усложненнаго, которое нужно бываетъ согласовать съ множествомъ оперированій и съ множествомъ типическихъ явленій на различныхъ широкихъ скалахъ, какъ категорическихъ универсальныхъ основаніяхъ сужденій **).

Каждый человѣкъ есть частица массоваго міроваго процесса, въ которомъ онъ играетъ то активную, то пассивную роль. Математическая теорія вѣроятностей беретъ въ свое обсужденіе преимущественно событія *массоваго процесса* исторіи, біометрику, антропологію, политическую ариѳметику, тарификацію стоимости труда, денегъ, разныхъ капиталовъ, общественнаго кредита съ экономіей—вообще графическое мышленіе и открытіе законовъ природы и общественности; а въ общественности не только знаніе и опытъ, но и вѣра есть необходимый элементъ.

*) Объ этомъ предметѣ дано разъясненіе въ моей статьѣ: «Общій основной методъ производящихъ функцій въ приложеніи къ исчисленію вѣроятностей и къ законамъ массовыхъ явленій» (Матем. Сборникъ, т. XXVIII, вып. III) и во введеніи къ моей монографіи: „Исчисленіе приближенныхъ выраженій функцій весьма большихъ чиселъ“ (Математическій Сборникъ, т. XXI. Москва).

**) Положеніе, занятое математическою теоріей вѣроятностей, оздоровляетъ всѣ орудія критики и педагогики, какъ древне-классическія, такъ и ново-классическія и кантіанскія. Новыя орудія критики подаютъ надежду приблизиться къ такъ называемому «цѣльному знанію» (по терминологіи В. С. Соловьева и славянофильской школы), обоснованному на союзѣ вѣры, обыкновеннаго знанія и опыта вѣковъ.

Теорія вѣроятностей есть врожденная *категорическая функція* сознанія, мысленно предвосхищающая смѣнныя явленія природы и многообразно согласуемая съ функціями души и тѣла. Роль вѣроятностей (т. е. условныхъ и безусловныхъ достовѣрностей) по вопросамъ жизни *познавательная* и *многосторонне посредническая*, междусубъективная въ регулированіи теченій блага, строющая *систему* посредствующихъ, ограждающихъ и искупающихъ запасовъ, залоговъ, *банковъ* для *умнаго* выпуска явленій противъ *многообразныхъ* (типическихъ) «огневыхъ» народныхъ бѣдствій *) и устанавливающая исчисленіемъ, измѣреніемъ, формулами и словомъ или иными знаками и графиками критеріи сродства и соотношеніе или связь (интеграцію, интерполяцію) между составными частями, секціями и самостоятельными органами живого *Всего* (Цѣлаго) и ихъ функціями.

Въ разныхъ частяхъ настоящей книги изслѣдуются основныя жизненныя сродства, причинныя связи и тарифныя уравненія, являющіяся слѣдствіемъ посреднической роли вѣроятностей. Настоящая книга устанавливаетъ *основную связь* міра A вѣчно живыхъ идей (понятій, стремленій, среднихъ принциповъ) съ міромъ A' фактовъ (смѣнныхъ явленій) и загадокъ о будущихъ фактахъ, приводящую къ основнымъ формамъ таблицъ явленій и къ системамъ приблизительныхъ *индуктивныхъ уравненій* между вѣроятностью и статистическою частостью явленій природы и общественной жизни (см. часть I, § 18_1, часть II, гл. V—VIII, и часть III).

Основная связь вышепомянутыхъ міровъ A и A' имѣетъ тѣсное отношеніе не только къ единообразіямъ (аналогіямъ) или закономѣрностямъ *параллельнаго сосуществованія* классовъ (къ онтологической *статикѣ*), но и къ единообразіямъ *послѣдовательности* во времени (къ исторической кинематикѣ); ибо вѣроятность выхода явленія на сцену театра исторіи и фактическая *частость* этого выхода суть какъ бы два близнеца или два взгляда Януса, смотрящаго однимъ лицомъ въ *будущее*, а другимъ въ *прошедшее*. Индуктивныя уравненія между вѣроятностью и частостью суть результатъ вывода теоріи вѣроятностей и результатъ не вполнѣ опознаннаго *приблизительнаго* (съ погрѣшностями) постоянства отношеній между психологическими и матеріальными факторами исторіи.

На этомъ *постоянствѣ* можно основать новое (эволюціонное) истолкованіе соотвѣтствій въ разныхъ историческихъ параллеляхъ, образующихъ длящееся активное и пассивное сосуществованіе, продолжающееся долго либо вѣчно (см. стр. 469).

Особенно важно эволюціонное истолкованіе извѣстнаго параллелистическаго воззрѣнія на законы природы, основаннаго Декартомъ (см. «Метаф. размышленія»), выдвигающаго на первое мѣсто первѣйшую по убѣдительности аксіому самосознанія: «мыслю, слѣдовательно существую» и утверждающаго, что въ естественномъ развитіи событій духовное (разумное) отдѣляется отъ матеріальнаго рѣзкою чертою (см. *Г. Челпанова*: «Мозгъ и душа»), такъ что въ историческомъ генезисѣ духовное порождается духовными (творческими, разумными) основаніями, а матеріальное — матеріальными (инертными). Возникаетъ вопросъ о томъ прагматическомъ посредникѣ между духовной и матеріальной субстанціями, благодаря которому духовное вліяетъ на матеріальное при прямой независимости этихъ субстанцій другъ отъ друга. Параллелизмъ въ новомъ (эволюціонномъ) его истолкованіи учитъ, что при обыкновенныхъ (несверхъестественныхъ) условіяхъ человѣческаго существованія упомянутымъ прагматическимъ посредникомъ выступаетъ воля этическаго субъекта съ принадлежащею ей психическою и физическою возможностью то выступать активно, предпринимать и творить за свой страхъ, то, напротивъ, пассивно переживать инертное движеніе и рѣшеніе другой воли, подчиняться долгу, страдать. Такая двусторонняя и многосторонняя волевая дѣятельность, пробивающая замкнутость человѣческаго сознанія (такъ называемый солипсизмъ, эгоизмъ), хороша условно, гипотетически, а именно если она систематически приводитъ смѣнныя малыя сознаньица простыхъ смертныхъ къ нравственной (по божескимъ и человѣческимъ законамъ) солидарности въ благѣ и трудѣ съ духомъ (разумомъ) родоваго большаго сознанія крупныхъ историческихъ собирательныхъ лицъ, какъ народы, государства, города и другія природою объединенныя, гражданскія, общественныя преемственныя лица, совокупности.

Если міръ A' фактовъ подраздѣленъ, положимъ, на двѣ исторически параллельныя секціи или составныхъ части: 1) міръ B и 2) міръ C, или не — B, то между этими отрѣзанными другъ отъ друга, дифференцированными мірами всетаки можетъ быть установлена, по меньшей мѣрѣ, *утонченная* (духовная) связь посредствомъ вѣроятности и ея графическихъ закономѣрностей и посредствомъ отношенія ихъ къ міру A идей. Благодаря этой осмысленной связи констатируются взаимоотношенія между группами, казалось бы, отдаленныхъ фактовъ (см. часть III, гл. I и II).

*) Терминъ «огонь» мы разумѣемъ и въ квалифицированномъ *переносномъ* смыслѣ, и въ *буквальномъ* смыслѣ (см. *С. П. Луневскій*: Страхованіе отъ огня. С.-Петербургъ, 1912).

Такимъ образомъ, человѣчество живетъ и дышетъ двумя атмосферами: духовною и матеріальною, оно переживаетъ не простую, а сугубую эволюцію: душевно-духовную (психологическую) и душевно-тѣлесную (психофизическую). При наблюденіяхъ опосредственнаго взаимодѣйствія между духовнымъ и матеріальнымъ играютъ роль цѣнныя матеріальныя обозначенія, какъ виды *гилозоистической матеріи* *), лучше сказать, *кредитной* и *показательной циркулирующей матеріи*, осмысленно обезпечивающей идею, потребность, договорную волю, завѣщаніе и несущей въ себѣ: 1) кредитную власть (мысленное владѣніе, активъ) для одной стороны (для субъектовъ права) и 2) долженствованіе (пассивъ, подчиненіе) для другой стороны (для субъектовъ долга).

Установка междусубъективной и международной осмысленной связи, антиципирующей и регулирующей теченія благъ, очевидно, имѣетъ важное значеніе въ общественныхъ наукахъ.

Множество случаевъ усложненнаго посредственнаго размѣна благами какъ матеріальными, такъ и духовными связываетъ людей взаимопомощію. Вообразимъ общество изъ *трехъ* сосубъектовъ: I, II и III, вѣчно вырабатывающихъ разнородныя жизненно необходимыя блага по способностямъ своей природы и по слѣдующей программѣ:

субъектъ I вырабатываетъ блага *A* и *c*,
» II » » *B* и *a*,
» III » » *C* и *b*.

При этомъ *A* и *a*, *B* и *b*, *C* и *c* суть попарно однородныя блага; притомъ, малыми буквами обозначены блага лишь для «себя», а не для «рынка»; напротивъ большими буквами обозначены изобильныя блага, предлагаемыя въ обмѣнъ на «рынкѣ» тому, кто на нихъ «голоденъ». При такомъ производствѣ благъ троица сосубъектовъ I, II и III будетъ вѣчно связана, вѣчно нуждаться въ благахъ другъ друга, она составитъ *сложную монаду*, *тріаду*, по терминологіи Н. В. Бугаева **). Притомъ тотъ или другой субъектъ нашей троицы можетъ быть коллективнымъ лицомъ (классомъ). Примѣчательно, что отдѣльные субъекты этой троицы не могутъ размѣниваться своими благами прямымъ или простымъ путемъ, обычнымъ въ союзѣ двухъ сосубъектовъ (въ діадѣ), трактуемомъ, напримѣръ, въ экономической теоріи Л. Н. Толстого, отрицающей деньги. Въ царствѣ тріады, очевидно, необходимъ *усложненный*, *посредственный* обмѣнъ, приводящій къ оцѣнкѣ блага идеальнымъ составнымъ числомъ, о которомъ мы часто будемъ говорить ниже.

При тройственномъ соединеніи сдѣлаются возможными разныя *третейскія обсужденія*, способныя поднимать рѣшеніе споровъ двухъ сторонъ на высоту *объективнаго* третейскаго *безпристрастія*; разрѣшатся хорошо и разные вопросы *усложненнаго* посредственнаго *обмѣна* необходимыхъ благъ личной жизни въ многоединствѣ.

Задача общественныхъ наукъ и гражданской юридической теоріи, имѣющая дѣло съ множествами субъектовъ права и съ установкою между ними правомѣрныхъ взаимоотношеній, есть задача довѣрія, его стоимости и его оцѣнокъ. Эта задача—*транссубъективная*, этическая по отношенію къ «чужимъ я», къ «своему собственному я», къ своему индивидуальному сознанію и къ Высочайшему Существу, Отцу всѣхъ. Цѣль братской связи сосубъектовъ—размѣнъ благами.

Какъ эгоизмъ, такъ и дуализмъ представляютъ опасную привлекательную опрощенскую ложь, она привлекательна потому, что въ ней есть доля правды; ибо моменты одиночества «я» съ его собственностью и моменты встрѣчи членовъ діады «одинъ на одинъ» безчисленны въ массовомъ человѣческомъ процессѣ.

Дуалистическая антитеза: «Я» и «Не – Я» должна быть реформирована во имя тройственнаго и множественнаго объединенія, какъ семейный союзъ: мужчина, женщина, дѣти.

Члены замкнутой въ себѣ вышеуказанной тріады (I—II—III) и не слитны въ правахъ собственности, и жизненно неразъединимы; если бы ихъ *радикально* разъединить, то они истощились бы смертельно отъ голода различнаго качества, именно:

---

*) См. *И. И. Лапшинъ*: Проблема «чужого я» въ новѣйшей философіи.—Юридическій и философскій споръ о роли цѣнной кредитной матеріи и соотвѣтствующаго пассива отмѣченъ ниже (см. стр. 8 и 33), а также въ книгѣ проф. *В. А. Косинскаго*: Учрежденія для мелкаго кредита въ Германіи» (стр. LXXI—LXXV. Москва, 1901).

**) *Н. В. Бугаевъ:* «Основныя начала эволюціонной монадологіи» («Вопросы философіи и психологіи», кн. 17. Москва, 1893).

Лицо I истощилось бы отъ голода на благо *b*,
» II » » » » » » *c*,
» III » » » » » » *a*.

Голодъ естественно развиваетъ, кромѣ страданія, недобрыя чувства, какъ чувство жадности и революціонной зависти до слѣпой наклонности къ разбою, къ преступленію противъ собственности (см. діаграмму на стр. 107), къ общественному разложенію соотвѣтствующаго рода—вмѣсто того, чтобы осуществить возможность усложненно размѣняться благами, мирно насытить другъ друга до *нормы*.

Можно вообразить болѣе значительное множество благъ, распредѣленныхъ такъ, что они связываютъ *m* сочленовъ многоединства (союза) въ несливающуюся и нерасторжимую сложную монаду. Комбинаторный анализъ (теорія сочетаній) подсказываетъ возможности многоединства, дозволяя мысленно увеличивать число *m* сочленовъ неограниченно. Задачу общаго размѣна въ этомъ царствѣ частными благами бываетъ можно упростить, а именно свести къ совокупности задачъ о тріадахъ. Такъ, въ политической экономіи одно изъ благъ принимается за деньги, какъ общепризнанное посредствующее символическое мѣрило остальныхъ благъ, и тогда всеобщій нормальный размѣнъ цѣнностями дѣлается возможнымъ въ царствѣ весьма сложной монады.

Декартовскій солипсизмъ (эгоизмъ) индивидуальной личности и непроницаемость Лейбницевой живой единицы (монады) умѣряются, такъ какъ эмпирическое «я» развивается, растетъ въ общественной атмосферѣ. Въ благопріятной обстановкѣ оно пріобщается къ общему или цѣльному систематическому знанію, къ Философской Наукѣ, какъ «сознанію вообще», соединяющему множественность нашихъ эмпирическихъ «я», частичекъ Цѣлаго. Реальность послѣднихъ есть обычная предпосылка знанія и народнаго просвѣщенія, принимаемая людьми на вѣру. Знаніе чужихъ «я» при этомъ преимущественно представительное, а именно *опосредствованное графически*, если вообще всякій осмысленный и цѣлесообразный знакъ считать за графическій посредствующій *представительный элементъ*, проводящій идеи «сознанія вообще» въ сознаніе каждаго воспринимающаго частнаго «я» (реала, по Гербарту), и наоборотъ.

Подъ «Не—Я» метафизики надлежитъ вообще разумѣть не міръ мертвыхъ физическихъ метеоровъ, а другія Я, Ты, Мы, Они—вообще міръ существъ и общественныхъ между ними взаимоотношеній. Слово, какъ условный посредствующій представитель мысли, включается въ міръ въ роли символическаго внѣшняго представительства (посла) отъ міра духовнаго (сказано въ писаніи: «слово Мое есть духъ»); оно вплетается представителемъ идей людской мысли и объективнаго божескаго Промысла; оно въ мірскомъ общественномъ употребленіи учитывается, глядя по обстоятельствамъ, какъ *показаніе*, то *равное* (паритетное) дѣйствительности, то *нестрого равное* ей (отчасти иллюзорное, отчасти неиллюзорное), то, наконецъ, *умышленно притворное* и извращенное, Тайлерановски обманчивое до вѣроломства или издѣвательства надъ довѣрчивостью.

Органами условій при установленіи условныхъ, символизованныхъ достовѣрностей практически служатъ гражданскія обозначенія, акты, признаки *мысленнаго владѣнія*, соотвѣтствующіе юридической теоріи. Роль вѣроятности въ признакахъ типовъ «мысленнаго владѣнія» трактуется, напримѣръ, у проф. Юшкевича, трудъ котораго цитируется въ первой части настоящей книги.

Въ приложеніи къ человѣческому обществу исчисленіе вѣроятностей не довольствуется малою индукціей наукъ естественныхъ; оно пользуется великою индукціей наукъ общественныхъ.

Человѣкъ, какъ стадное животное, существенно отличается отъ низшихъ стадныхъ существъ великою развитостью способности *номинальнаго* опредѣленія *цѣнности*, какъ *соціальнаго объекта*.

Склонность человѣка къ *номинализму*, къ созданію номиналистическимъ и графическимъ путемъ творческой валюты различнаго типа (по роду цѣнности) поразительна. Ярче всего она демонстрируется статистикой вексельнаго оборота въ отношеніи къ золотой гарантіи. Цифры можно найти въ изданіяхъ финансистовъ (напр. у проф. Янжула, Яроцкаго, Озерова, Мигулина). Въ наиболѣе развитыхъ промышленныхъ государствахъ финансовой оборотъ—это главнымъ образомъ оборотъ бумаги; въ общемъ финансовомъ оборотѣ бумага—это почти все; а золотая гарантія—почти ничего, лишь небольшое число процентовъ всего (напримѣръ, въ Англіи 5%).

Эти данныя показываютъ, что въ территоріи промышленнаго трудящагося государства колебательно, вибраціонно движется огромная какъ бы атмосфера номинальной финансовой валюты, колеблющаяся по ея значенію въ зависимости отъ курсовъ довѣрія, которая болѣе или менѣе сгущенными облаками собирается надъ городами, промышленными центрами и прочими творчески мыслящими поселеніями. Капли чистаго дохода то падаютъ въ копилки изъ каждаго иносказательнаго облака, какъ дождь и осадки изъ обыкновенныхъ облаковъ, то втягиваются въ эту искусственную атмосферу какъ бы испареніемъ. Въ эту атмосферу именуемой (номинальной) жидкости, валюты, иносказательной «воды», внѣдрились условія игры случайности и мірская ложь; валюту атмосферы истощаютъ разные биржевые грюндеры-вурдалаки, кочующіе, блуждающіе вѣдуны и вѣдьмы, народные лжеадвокаты, жадные до крови лярвы, но на яву, а не въ оккультномъ гипнозѣ и не въ вальпургіевой ночи. Однако же гражданскіе и уголовные скорпіоны гонятъ прочь отъ права честныхъ работниковъ эту «нечистую силу», а хорошая развѣдочная государственная и земско-общественная финансовая статистика можетъ тутъ найти «законы мірской человѣческой лжи» и граждански облегчить борьбу за право, можетъ сравнительно небольшимъ золотымъ залогомъ и налогами уравновѣсить все движеніе, а затѣмъ и направить его кредитомъ въ сторону развитія хорошихъ производящихъ отечественныхъ функцій и народнаго богатѣнія. Тутъ скрыто содержится возможность освобожденія людей отъ власти мертвой міровой души, именно мірового золотого тельца. Регулированіе финансоваго оборота страны и частныхъ доходовъ труда и всѣхъ вообще видовъ частной экономіи вдвигается въ раму формулъ теоріи взаимоотношеній (см. часть III); подобно тому, какъ метеорологи и сельскіе хозяева вдвигаютъ въ формулы той же теоріи взаимоотношеній свои вопросы распредѣленія и оборота прѣсной воды между атмосферой, водоемами, почвою, растеніями и животными *). Законы большихъ чиселъ и законы погрѣшности тутъ

*) См. «Сборникъ трудовъ, исполненныхъ при Метеорологической Обсерваторіи Имп. Юрьевскаго Университета», подъ редакціей проф. Б. И. Срезневскаго Томъ IV, 1911. Стр. 42—43.

тутъ и тамъ вполнѣ примѣнимы. Прѣсная вода и денежная валюта представляются формально аналогическими метеорными понятіями; но денежная вода, дебиторская и кредиторская, бываетъ заряжена электро-магнитными, анодными и катодными способностями (говоримъ иносказательно).

Законы погрѣшности, какъ отклоненія отъ среднихъ и вѣроятнѣйшихъ нормъ перемѣннаго явленія x, предопредѣляются номинально посредствомъ дифференціаловъ Δp_x вѣроятности p_x; факты же повѣряютъ это номинальное предрѣшеніе, измѣняя дифференціалъ Δp_x. Это измѣненіе по обозначеніямъ нашей книги есть варіація $\delta\Delta p_x$ (см. стр. 100, 227, 470); она учитывается, котируется въ соціологическомъ процессѣ *раздробленно*, являясь результатомъ какъ *логической*, такъ и *фактической индукціи* и отступленіемъ отъ первоначальнаго номинальнаго опредѣленія; мы въ своихъ трудахъ считаемъ ее мѣрою фактическаго вліянія и логическаго наведенія и мѣрою (критеріемъ) сродства между свободною причинностью и слѣдствіями. Эту варіацію можно считать графическимъ представителемъ соціологическаго *эйекта*, стоящаго, по ученію математика-психолога В. Клиффорда *), въ серединѣ между *субъектомъ* и *объектомъ*, *понимаемымъ однакоже въ смыслѣ вторыхъ и третьихъ лицъ*, а не въ смыслѣ мертвыхъ физическихъ предметовъ.

Номинальное и символическое, научно проведенное въ гражданскій строй жизни, является системою натянутыхъ струнъ, по которымъ факты ударяютъ и которыя при устойчивомъ строѣ рамокъ гармоническаго инструмента и при умныхъ настройщикахъ звучатъ явственно для тѣхъ, кто имѣетъ развитое *внутреннее* ухо, чтобы слышать, и развитые *внутренніе* глаза, чтобы видѣть.

Мы должны отмѣтить нашъ взглядъ на вѣроятностное воспріятіе или умственное зрѣніе (интуицію, опытъ вѣры, вѣрящаго разума) и на взаимодѣйствіе между этимъ воспріятіемъ и психологіей, физіологіей, педагогикой и математикой.

Евклидова геометрія съ ея физикой развиваетъ у человѣка зрѣніе внѣшнихъ физическихъ чувствъ; это, конечно, совершенно необходимое упражненіе, но оно недостаточно. У человѣка (даже у ребенка) въ его внутреннемъ *храмѣ сознанія* есть зрѣніе другого порядка, чисто умственное зрѣніе мысли, съ его органомъ вѣры, духомъ изслѣдованія, оцѣнками стоимости и достоинства и идеологіей. Это оцѣнивающее зрѣніе трактуется психологическою теоріей Паскаля, Д. Бернулли, Лапласа, философа-педагога Гербарта и другихъ, математизирующихъ законы умственнаго созерцанія (вѣроятностнаго воспріятія), какъ продолженіе законовъ психо-физіологіи. Эта теорія, предполагающая духовный реалій въ центрѣ психики, проникающая въ *скрытое* бытіе (ноуменъ), въ ея зачаткахъ соотвѣтствуетъ древней психологической теоріи Платона и древнему пневма-психологическому святоотеческому ученію объ „объ окѣ, озаряющемъ совѣсть“, а также ученію А. С. Хомякова, основателя (вмѣстѣ съ Кирѣевскимъ) славянофильской школы. По ученію этой школы, души, наши «я», угасившіе въ себѣ духовный реалій, суть «мертвыя души», заживо погребенныя.

Чистое умственное зрѣніе мысли въ школѣ развивается скрывающими содер-

*) *И. И. Лапшинъ*: Проблема «чужого я» въ новѣйшей философіи. Стр. 24—26.

жимое приборами (какъ закрытая урна), соотвѣтствующими задачами, играми и исчисленіями теоріи вѣроятностей *), опытами угадыванія, имѣя завязанные глаза (завязываніе глазъ есть одна изъ типическихъ мѣръ абстрагированія, отвлеченія), опытами нравственнаго порядка, воспитательнымъ обученіемъ, направляемымъ на маяки общечеловѣческой истины и надежныхъ идеаловъ своего ближняго отечества.

Происходящая въ душѣ Гербатіанская *борьба идей*, стремящихся переступить порогъ сознанія и вступить въ его храмъ, на его ясную открытую сцену, и взаимодѣйствіе идей на этой сценѣ оставляетъ болѣе или менѣе прочную запись (смотря по количеству и качеству упражненій) въ центральныхъ клѣткахъ головного мозга, гдѣ оканчиваются нервы. Отсюда, по ученію анатомовъ, представительная запись импульсами воли можетъ быть переводима по мускуламъ на бумагу, въ органы рѣчи и въ другія движенія. Вопросъ объ измѣреніи этихъ процессовъ нынѣ далеко продвинутъ психофизіологами (см. *Г. Гефдингъ*: Очерки психологіи, основанной на опытѣ. Изданіе журнала: „Вопросы философіи и психологіи“. М., 1892. — *Е. Челпановъ*: Измѣреніе простѣйшихъ умственныхъ актовъ. „Вопросы философіи и психологіи“, кн. 9. Москва.—*Л. М. Лопатинъ*; „Философскія характеристики и рѣчи“. Москва, 1911 г.). Но тутъ, по моему, а также по Н. В. Бугаеву, Н. И. Шишкину, В. Г. Алексѣеву, бар. М. Ф. Таубе **), примѣненіе законовъ и критеріевъ теоріи вѣроятностей съ теоріей среднихъ еще болѣе нужно, нежели при чисто-физическихъ измѣреніяхъ. Математическая психологія должна стать въ правильныя отношенія къ методу производящихъ функцій и къ теоріи вѣроятностей, изслѣдуя реалъ (духовный центръ) людской психологіи и связь міра идей (мысленной соборности въ этомъ центрѣ) съ внѣшнею дѣйствительностію.

Достаточный кусокъ бумаги можетъ служить удобнымъ графическимъ пространствомъ для изображенія какъ теоретической, предписывающей законы, духовной дѣятельности, записывающей свои фиксируемые идеи на бумагѣ, такъ и для записи соотвѣственныхъ идеямъ фактовъ, сличаемыхъ съ фиксаціями законовъ.

Надо сказать, что обиходная плоская логика (плоская не только по измѣреніямъ своимъ, но и потому, что она зародилась на площадяхъ политическихъ споровъ и

*) См. мои статьи: 1) „Задачи и игры изъ дѣтскаго міра, развивающія понятія по логикѣ и статистической теоріи взаимоотношеній“ („Математическое Образованіе“, журналъ Московскаго Математическаго Кружка, за 1912 г.) и 2) „Основы общественныхъ и естественныхъ наукъ въ средней школѣ“ (С.-Петербургъ, 1906).

**) Бар. *М. Ф. Таубе*: „Познаніевѣдѣніе по славянофильскому любомудрію“. Петроградъ, 1912.—Здѣсь авторъ даетъ схематическій графическій трехосевой строй внутренняго храма сознанія, сосредоточенный въ центрѣ „я“, реалія по Гербарту и „живой души“ по славянофильскому любомудрію, и населенный мысленною соборностью, какъ закономъ идейныхъ большихъ чиселъ, каковая соборность физически переходитъ въ параллельную дѣйствительность, въ земскую собирательность разнаго рода и въ творчество разнаго рода.—И. И. Лапшинъ въ книгѣ: «Проблема „чужого я“», на стр. 74, говоритъ: „Искуственная метафизика Гербарта ...“. Но странно говорить именно объ *искуственности* этой метафизики, какъ и славянофильской; напротивъ, она естественнѣйшая изъ естественныхъ, ибо реалій, живой храмъ идей сознанія, естественнѣе, дѣйствительнѣе, напримѣръ, людскихъ тѣлъ, ибо люди мрутъ, а наиболѣе жизненныя идеи ихъ не умираютъ, переживаютъ несчетное множество поколѣній. Конечно, искусственность символическаго психографическаго строя у этой философіи есть въ необходимой дозировкѣ, она сродни искусственности любого, хорошаго, умнаго по формѣ и богатаго по содержанію языка; вѣдь языкъ, формы его этимологіи, синтаксиса, орфографіи и логическаго строя страшно искуственны; вопросъ же хорошей символики, психографіи, номографіи въ томъ, какая формирующая графическая система ближе передаетъ истинность бытья и его движенья.

торжищъ) и создаваемая ея языкомъ плохая ассоціація идей ставятъ барьеры у порога сознанія, но не воспитываютъ необходимыхъ береговъ сознанія, поддерживающихъ желательныя идеи и необходимую связь между ними посредствомъ идеаловъ той истины, которой всѣ мы должны поклоняться.

Группу графическихъ умственныхъ способностей ребенка, юноши и взрослаго нельзя высоко развить только обыкновенною грамотой, письмомъ и геометріей. Но эту группу можно развить *иносказательною* геометріей, которую Бугаевъ называетъ числовою геометріей, а инженеръ Морисъ д'Окань и другіе—номографическимъ мышленіемъ и исчисленіемъ. Тутъ дана высшая грамота, *высшій стиль*; тутъ же найдетъ себѣ мѣсто и иносказательная (воображаемая) геометрія Лобачевскаго, великаго русскаго пангеометра, но не геометра въ собственномъ смыслѣ.

Пангеометрическую систему Римана и Лобачевскаго съ обобщеніями примѣняетъ къ дѣлу въ своихъ проблемахъ математическая страховая статистика, постулируемая и критикуемая съ помощію опытовъ теоріи вѣроятностей.

Логомахи, добивающіеся исключить математику изъ группы гуманитарныхъ наукъ, стараются дискредитировать философско-математическую (психологическую и педагогическую) теорію. Тѣмъ не менѣе система этой теоріи, широко распространенной въ практикѣ германскаго воспитательнаго обученія, все болѣе и болѣе увѣнчивается успѣхомъ. Въ Германіи труды Гербарта, Дробиша, Штрюмпеля, Фехнера и другихъ, въ Англіи труды В. Клиффорда, К. Пирсона, Юля, во Франціи труды Курно, Лорана продолжаютъ это направленіе. Въ Россіи труды учениковъ и сотрудниковъ проф. Бугаева, какъ то: педагога Н. И. Шишкина (см. „О детерминизмѣ въ связи съ математической психологіей“ въ журналѣ Моск. Психологическаго Общества: „Вопросы философіи и психологіи“, кн. 8), проф. В. Г. Алексѣвва (см. „Сборникъ Учено-Литературнаго Общества при Имп. Юрьевскомъ Университетѣ“ за 1904—1909 годы), бар. М. Ф. Таубе и личные мои, далѣе труды Д. И. Менделѣева, Е. Золотарева, А. А. Маркова, проф. Д. М. Мордухай-Болтовского *), П. І. Рабиновича **) и др. либо положительною, либо отрицательною стороною разрабатываютъ то же самое психологическое ученіе; но въ варіантѣ славянофильства тутъ не упущена психологія высшаго духовнаго стиля.

Вѣра, систематическое знаніе и неустанный опытъ суть такіе взаимно связанные близнецы, коихъ растащить нельзя. Конечно, мыслимо безсистемное знаніе, но оно, взятое само по себѣ, есть Плюшкинская хаотическая куча не то мусора, не то цѣнныхъ вещей. Систематическое же знаніе, Наука, всегда имѣетъ въ своей *подпочвѣ* нѣкоторое Credo съ гипотетическими основными идеями ***).

Эту подпочву имѣетъ и кантіанское знаніе въ видѣ какой-то символической сказки, не арабской и не робинзоновской, а всетаки сказки, миѳологіи. Выгоднѣе поэтому (какъ это уяснилъ еще Паскаль) вѣровать въ близкую подпочву «цѣльнаго знанія» именно подъ видомъ познаваемости истиннаго бытія, повѣряемой неустаннымъ систематическимъ опытомъ жизни и интуиціями *неумирающихъ* собирательныхъ лицъ (народовъ, государствъ, городовъ, областей и пр.). Истинное бытіе есть какъ бы центръ жизни мысли, къ которому духовнымъ жизнепониманіемъ упруго тяготѣетъ Все. Идеалъ ея имѣетъ глубокое, не только образовательное, но и воспитательное значеніе; послѣдняго же значенія нѣтъ и не можетъ быть въ педагогикѣ и народномъ образованіи въ духѣ кантіанства и неокантіанства, утратившемъ

*) *Д. Мордухай-Болтовской*: 1) Математическія и умозрительно-философскія изслѣдованія основного психофизическаго закона. Варшава, 1907. — 2) О законѣ непрерывности. Москва, 1907.

**) *П. І. Рабиновичъ*: Роль теоріи вѣроятностей въ выработкѣ общественныхъ идеаловъ. С.-Петербургъ, 1907.

***) См. *Анри Пуанкаре*: „Наука и Гипотеза“. (Переводъ подъ редакц. проф. Н. А. Умова. Москва, 1904).

цѣльность знанія и оправданіе добра. Вотъ почему педагоги, какъ Гербартъ, Бугаевъ и другіе, бьютъ отбой, обращая взоръ назадъ!.. къ Лейбницу, Ньютону, Декарту, Паскалю, Посошкову, Петру Великому, Ломоносову. Общая педагогика должна стремиться къ *воспитательному* обученію, по крайней мѣрѣ, въ стадіи народной школы и шести общеобразовательныхъ классовъ средней школы, когда закладывается понятіе Всего и почти лишь терминологическій списокъ составныхъ частей Всего, съ наглядною практикою въ обрядахъ нравственнаго культа и труда.

Позже работа школы переходитъ къ развитію критической способности духа, къ спеціализаціи и къ образованію работоспособныхъ индивидуальностей въ разныхъ секціонныхъ направленіяхъ Всего, въ соотвѣтствіи съ требованіями разныхъ факультетовъ какъ жизненной практики, такъ и высшей школы. Спеціализація, образовательная индивидуализація, параллельная раздѣленію труда въ самой жизни, не повредитъ дѣлу, лишь бы „у множества увѣровавшихъ было одно сердце и одна душа“ (Дѣян. IV, 31) и лишь бы *облагороженныхъ* воспитательнымъ ученіемъ „фанатиковъ», ревнителей, *героевъ* по каждой узкой спеціальности производилось для жизни. Цѣлаго сколько нужно, безъ перепроизводства (отчего цѣна самимъ людямъ падаетъ и они, какъ цѣнности, „гніютъ“ зря) и недопроизводства.

Въ комиссіяхъ по улучшенію средней школы при министрахъ Боголѣповѣ и Ванновскомъ я стоялъ по меньшей мѣрѣ за бифуркацію спеціальныхъ классовъ средней школы: классъ словесный и классъ математическій *). Много данныхъ школьная практика народовъ выдвинула въ пользу этой реформы. Но теперь во Франціи декретомъ 1902 установлено дальнѣйшее развѣтвленіе, подраздѣлены: классъ словесный на двѣ вѣтви *A* и *B* и классъ математическій также на 2 вѣтви *C* и *D*.

Подобныя вѣтви нужны и для Россіи примѣнительно къ слѣдующей схемѣ:

A — классъ съ мертвыми древними языками (готовитъ на факультеты богословскій, филологическій по отдѣленію классической древней филологіи и юридическій по филологическому отдѣленію чистой науки права);

B — классъ съ живыми языками безъ древнихъ и съ однимъ древнимъ (готовитъ на консульскія и другія должности съ языкознаніемъ и на соотвѣтствующіе факультеты высшихъ учебныхъ заведеній);

C — классъ математическій съ господствомъ геометрическаго анализа (готовитъ въ механико-техническія, путейскія и электротехническія школы и на математическое отдѣленіе физико-математическаго факультета);

D — классъ математическій съ господствомъ графическихъ исчисленій и математической статистики (готовитъ на административно-экономическіе, промышленно-экономическіе и естестественно-научные факультеты, въ академіи военныя, медицинскія, горныя и въ химико-техническія и агрономическія высшія школы).

Сообразованная съ силами учениковъ индивидуализація дисциплинъ требуетъ этой реформы и ей соотвѣтствующаго культурнаго „*человѣческаго* отбора“.

Исторія философіи, какъ основы педагогики, самымъ развитіемъ своихъ творческихъ системъ предуказала вышепомянутую бифуркацію; она развивала свои системы въ двоякой формулировкѣ: 1) въ легкой литературной обработкѣ (для широкихъ народныхъ слоевъ) и 2) въ точной литературной (математической) формулировкѣ, виновницѣ истиннаго прогресса человѣческой культуры, духовнаго и матеріальнаго. Главная цѣль общаго и спеціальнаго народнаго образованія есть надежная, достовѣрная предпосылка вѣчныхъ побѣдъ нашего земскаго недѣлимаго отечества надъ вѣчными невзгодами и бурями исторіи.

Многотипность среднихъ школъ другихъ государствъ Европы и Америки подтверждаетъ опытомъ правильность вышенамѣченной пестрой реформы, если, конечно

*) Объ этомъ я высказываюсь также въ брошюрѣ: „Основы общественныхъ и естественныхъ наукъ въ средней школѣ“ (С.-Петербургъ, 1906).

она будетъ поддержана подготовкой учителей путемъ курсовъ, съѣздовъ и постоянныхъ педагогическихъ институтовъ, а также университескими курсами.

Школьная система напоминаетъ пирамиду; лѣстница къ ея вершинѣ неизбѣжно съуживается, поэтому популярная (всенародная) школа (школа большинства населенія) обрывается не выше серединной ступени. Тутъ надо дать законченный элементарный курсъ и ремесло, пригодное для жизни. Потому то на *доброкачественную* популяризацію цѣннаго знанія надо смотрѣть какъ на важное святое дѣло посѣва:

Сѣятель знанья на ниву народную!
Почву ты, что̀ ли, находишь безплодную?
Худы-ль твои сѣмена?
Робокъ-ли сердцемъ ты, слабъ-ли ты силами?
Трудъ награждается всходами хилыми,
Добраго мало зерна:
Гдѣ-жъ вы, умѣлые, съ бодрыми лицами?
Гдѣ же вы, съ полными жита кошницами?
Трудъ засѣвающихъ робко, крупицами,
Двиньте впередъ!
Сѣйте разумное, доброе, вѣчное,
Сѣйте! Спасибо вамъ скажетъ сердечное
Русскій народъ...

(*Н. А. Некрасовъ:* „Сѣятелямъ“).

Искусству смѣлой, доброкачественной популяризаціи цѣнныхъ знаній, подвергнутыхъ предварительной критикѣ и лабораторной опытной повѣркѣ, слѣдуетъ учиться у нѣмецкой и англійской школы словесниковъ, математиковъ и статистиковъ; взглядъ англійской школы выраженъ на стр. 512 словами математика Карла Пирсона. Школа для большинства народа должна дать государству рядовой спѣлый реальный плодъ, оправдывающій самое существованіе науки. Школа же меньшинства должна дать людей доказательнаго мышленія, способнаго критикою и инженеріей остерегать рядовое большинство отъ опасныхъ ошибокъ популярщины и ремесленнаго опрощенства (см. мою книгу: Государство и Академія. Синтезъ авторитетныхъ сужденій меньшинства съ мнѣніями большинства). Безъ голоса хорошей высшей академіи народы и государства запутываются въ силкахъ міроваго зла.

Возможно ли математику, методъ производящихъ функцій и математическую вѣроятность, нераздѣльную со статистикой, считать основнымъ формирующимъ и критическимъ методомъ познанія?

На этотъ вопросъ настоящая книга отвѣчаетъ утвердительно. Возьмемъ подъ свой судъ сначала логику.

Въ составѣ аналитическихъ и синтетическихъ сужденій логики играетъ роль *формальная истинность* самыхъ модусовъ (формъ) силлогизма, связывающихъ, какъ члены отдѣльныхъ предложеній (сужденій), такъ и самыя сужденія, посылки, приводящія къ заключенію. Тутъ приходится считаться съ большими изъянами обычной, обиходной логики, которую не слѣдуетъ смѣшивать съ логикой математической, болѣе близкой къ истинѣ.

Комбинаторныя связи (взаимоотношенія) комплексовъ различныхъ ти-

пическихъ явленій, совершающихся на различныхъ скалахъ, бываютъ именно *формальныя*, логическія. Связи эти по формальному своему образованію (по формальной истинности) принадлежатъ къ двумъ логическимъ типамъ: 1) связи, по формѣ сужденія совершенно опредѣленныя, вполнѣ достовѣрныя, представляемыя опредѣленными постулатами и опредѣленными уравненіями, и 2) связи, несовершенно опредѣленныя по формѣ сужденія, нуждающіяся въ неопредѣленномъ анализѣ, въ гипотезѣ и разгадкѣ, въ наблюдательности, въ употребленіи записи и индуктивныхъ графическихъ мѣръ исчисленія вѣроятностей и въ компенсаціи или выкупѣ валовыхъ погрѣшностей разгадокъ.

Связи второго типа чрезвычайно важны, ибо они весьма широко распространены въ природѣ вещей; въ этихъ ослабленныхъ, несовершенныхъ связяхъ вѣроятность, какъ воззрѣніе мысли (умозрѣніе) и какъ мѣрило ожиданій, опытныхъ понятій и фактическихъ воспріятій въ свое обладаніе, есть существенный логическій элементъ, формирующій союзы, конъюктуры

Въ формахъ языка, въ разговорной рѣчи, въ письменныхъ договорахъ и въ самомъ бытьи связи перваго типа (совершенно опредѣленныя) и связи второго типа (не строго опредѣленныя) бываютъ *перемѣшаны* какъ *свѣтъ* и *тѣни*; а потому взаимоотношенія людскія могутъ имѣть то менѣе, то болѣе опредѣленный характеръ.

Надъ компетенціей популярной логики должна выситься компетенція математической логики, которая хотя и отличается усложненными формами (модусами) силлогизма, но стремится стать въ своихъ законахъ мысли ближе не только къ формальной истинности, но и къ существу истины. Двучленныя (не считая связки) логическія предложенія (логическія діады) недостаточны; нужны *усложненныя* предложенія, логическія тріады и миріады (по числу членовъ, не считая связки). Сказуемое усложненнаго предложенія бываетъ многочленнымъ, а не одночленнымъ (простымъ). Таково сказуемое, представляемое при $m > 1$ составнымъ идеальнымъ числомъ финансовой теоріи, стоящимъ во второй части равенства (1), стр. 287, если первую его часть считать подлежащимъ, а знакъ=связкой.

Многочисленное составное (комплексное) сказуемое, обычное, напримѣръ, на базарѣ, въ «усложненномъ экономическомъ обмѣнѣ», не сводило къ простому одночлену по правдѣ, т. е. безъ проективной (смѣтной) погрѣшности. Конечно, продуманная система налоговъ и банковъ можетъ выкупать валовые итоги погрѣшностей. Потому то продуманные выкупы и государственно-національные банки должны играть большую бытовую и этическую роль въ правомѣріи, въ критикѣ явленій и въ статистическомъ выслѣживаніи «законовъ погрѣшности».

Оперативная логика общаго основного метода производящихъ съ

частными методами механики и математической теоріи вѣроятностей сполна обнимаетъ формальную логику тождества «$A = A$» или логику извѣстныхъ «трехъ законовъ» мышленія (законъ противорѣчія, законъ исключеннаго третьяго, или средняго, и законъ тождества) и продолжаетъ ее въ ту сторону отъ этихъ законовъ *), гдѣ приходится познавать неизвѣстное и обсуждать діалектическія противорѣчія или спорные вопросы, названные въ «Критикѣ чистаго разума» Канта антиноміями.

Допустимъ, что Кантъ въ самомъ дѣлѣ правъ, утверждая, что чистый разсудокъ предписываетъ природѣ нѣкоторыя безусловныя достовѣрности или законы à priori. Но такихъ очевидныхъ достовѣрностей слишкомъ мало; ихъ не хватило бы для жизни мысли, и притомъ всѣ онѣ суть преддверія второго сорта къ знанію.

Многія необходимѣйшія достовѣрности вырабатываются, недешево добываются чистымъ разумомъ (т. е. à priori), апріорными «законами большихъ чиселъ» (см. ниже гл. III и IV), изъ обсужденія вѣроятностей, какъ возможностей или условныхъ достовѣрностей. Вотъ почему надо признать роковою судебную ошибку въ «Критикѣ» и въ «Пролегоменахъ» Канта, который приговорилъ къ незаслуженной казни вѣроятностную теорію познанія. Отнятіемъ у вѣроятности основного гносеологическаго значенія создается та гносеологическая голодовка (см. стр. 480), при которой спекуляція подаетъ людямъ камень вмѣсто хлѣба.

Достовѣрности суть предѣльныя ступени вѣроятности, какъ перемѣнной величины, имѣющей свою графическую скалу или координату. Иначе говоря, понятіе и графикъ вѣроятности захватываютъ въ своемъ содержаніи и обозначеніи понятіе достовѣрности; послѣднее же понятіе есть лишь маленькая дорогая частица перваго понятія.

Теорія вѣроятностей (т. е. возможныхъ и условныхъ достовѣрностей), изслѣдуя взаимоотношенія природы и нуждъ человѣка матеріальныхъ и духовныхъ, и отыскивая въ этихъ взаимоотношеніяхъ *средніе принципы* (центральныя положенія, средніе величины, axiomata media), *золотыя середины* (идеалы жизненной истины) и *законы погрѣшности*, сопровождаемые законами (нормами) *страхового права*, есть основной элементъ какъ философіи права, религіи, науки и педагогики и философіи исторіи, такъ и элементъ логической системы индуктивныхъ и дедуктивныхъ наукъ.

Обсуждать конечное въ связи съ безконечнымъ стало потребностью современной математической логики съ ея методомъ производящихъ функцій (женератрисъ Лапласа). Древне-классическія упрощенныя орудія критики и логики тутъ нынѣ уже признаются лишь съ ограниченною компетенціей. Нынѣ для перехода отъ болѣе простого къ менѣе простому доказательно установлена принудительная необходимость неаристотелевой логики, неархимедовой ариѳметики и даже неевклидовой геометріи.

Необходимость неаристотелевой логики особенно обнаруживается: 1) законами

*) Объ этомъ продолженіи будетъ рѣчь въ части I, § 4, въ части II, § 31, и особенно въ части III, §§ 3 и 10—11.

большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей, 2) теоріей ирраціональныхъ чиселъ ариѳметики и 3) теоріей предѣльныхъ выраженій дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Тутъ недостаточность древне-классическихъ орудій критики обнаруживается извѣстными скандалами или, мягче говоря, парадоксами капитальныхъ выводовъ съ помощію этихъ орудій. Интереснымъ примѣромъ несостоятельности этой критики служитъ извѣстный въ наукѣ уже съ XVIII вѣка *Петербургскій парадоксъ* (см. ниже, стр. 324—327).

А вотъ наиболѣе простой примѣръ парадоксальнаго вывода, относящагося къ переходу отъ простого къ болѣе сложному и безконечному въ области теоретической ариѳметики.

Вообразимъ среди учениковъ скептика въ отношеніи ирраціональныхъ чиселъ усвоившаго однакоже геометрическія фигуры и знающаго скалу положительныхъ раціональныхъ чиселъ $x = \frac{a}{b}$, гдѣ a и b суть цѣлыя взаимно простыя числа натуральнаго безконечнаго ряда: 1, 2, 3, ... Такіе скептики существуютъ не только среди дѣтей, но и взрослыхъ, впервые знакомящихся съ міромъ ирраціональныхъ чиселъ. Подобный отрицатель вправѣ построить слѣдующіе два правильныхъ (по содержанію посылокъ и по формѣ) силлогизма, однакоже парадоксальныхъ по своимъ заключеніямъ:

А. *Никакое нечетное число не можетъ равняться четному. Если существуетъ число* $\frac{a}{b}$, *равное* $\sqrt{2}$, *то можно выбрать нечетное цѣлое число, равное четному* *). *Слѣдовательно, не существуетъ числа* $\frac{a}{b}$, *равнаго* $\sqrt{2}$.—Б. *Числа* $\frac{a}{b}$, *равнаго* $\sqrt{2}$, *какъ сказано, не существуетъ. Если существуетъ длина діагонали квадрата, сторона котораго есть 1, то она, по пиѳагоровой теоремѣ, выражается числомъ* $\frac{a}{b}$, *равнымъ* $\sqrt{2}$. *Слѣдовательно, не существуетъ длины діагонали названнаго квадрата.*

Нашъ скептикъ, дѣлающій столь нелѣпые (передъ судомъ здраваго смысла) выводы, не хочетъ сдѣлать относительной безконечно малой погрѣшности противъ формальныхъ правилъ логики. Если бы онъ согласился сдѣлать безконечно малую ошибку, то онъ нашелъ бы число $\frac{a}{b}$, равное $\sqrt{2}$ въ предѣлѣ при $b = \infty$. Онъ, какъ сказано въ писаніи, «оцѣживаетъ комара»; но въ то же время онъ «проглатываетъ верблюда», т. е. отвергаетъ крупную по ея значенію теорію ирраціональныхъ чиселъ.

Въ сужденіяхъ о субъективномъ правѣ классовъ, партій, составныхъ частей Цѣлаго подобная критика иногда сектантски «видитъ сучокъ въ чужомъ глазу, а въ своемъ глазу не видитъ бревна».

И нельзя сказать, чтобы безконечно малыя ошибки и сучки въ глазу критики не имѣли значенія; ибо безконечно малая значимость 0 помноженная на безконечый множитель ∞ ($0 \times \infty$) есть величина существенно *неопредѣленная*, способная выявляться во всѣхъ значеніяхъ отъ 0 до ∞; а безконечная ошибка часто бываетъ смертельнымъ ушибомъ, вызываетъ общественный крахъ. Здѣсь мы встрѣчаемся съ *индетерминизмомъ*, съ *произвольными функціями*, на кои обращаетъ вниманіе философія математики и статистики. Тутъ нужно вспомнить, что Наука на каждомъ шагу встрѣчаетъ поводъ обращать взоръ человѣка на необъятныя числа поступковъ, на законы именно большихъ чиселъ, зависимыхъ и независимыхъ.

Законы массовыхъ явленій совершаютъ свои повторяющіеся аналогическіе циклы ежегодно съ нѣкоторыми вѣроятными, напередъ неопредѣленными *варіаціями* всякій разъ, пока земной шаръ совершаетъ годовыя необъятныя порціи своего безконечнаго пути въ безконечномъ пространствѣ. Тутъ работаютъ законы погрѣш-

*) Въ этомъ убѣждаетъ разсмотрѣніе даннаго условія, равносильнаго $a^2 = 2 \cdot b^2$ какъ въ случаѣ нечетнаго числа a, такъ и въ случаѣ четнаго числа a.

ности, а при бездѣйствіи страховаго права развертываются и историческая трагедія, и соціальныя драмы, и уголовные романы, и пр.

Необходимо ограничить компетенцію логики именуемыхъ формально-правильныхъ категорическихъ опредѣленныхъ сужденій. Мельница этой детерминистической логики можетъ въ области безконечнаго и загадочнаго, въ сферѣ взаимоотношенія частей безконечнаго Всего, въ области даже несовершенной безконечности историческихъ рядовъ и весьма большихъ чиселъ людей, вещей и пр. много намолоть отдѣльно незамѣтныхъ паразитовъ-софизмовъ. Между тѣмъ задача критики—исключать этихъ паразитовъ, защищая отъ нихъ смѣлыхъ рядовыхъ творцовъ, не успѣвающихъ заниматься критическою рефлексіей, но элементарно работающихъ съ плодотворнымъ результатомъ для жизни Цѣлаго.

Проф. А. И. Введенскій, апологетъ неокантіанства, говоритъ: «всѣ науки, въ томъ числѣ и психологія, должны подчиняться логикѣ и ея правиламъ, а потому сама то логика съ своими правилами должна оставаться совершенно независимой отъ всѣхъ другихъ наукъ» *). Съ этою логократіей, провозглашенной въ республикѣ наукъ еще Гегелемъ подъ именемъ панлогизма, можно бы согласиться, если бы ... правила самой то обиходной логики были хорошо постулированы ея законодателемъ. Но этого пока нельзя утверждать въ виду вышеупомянутыхъ изъяновъ самой-то логики, переполняющей жизнь народовъ изъ вѣка въ вѣкъ подъ видомъ правильныхъ категорическихъ сужденій огромною массою парадоксовъ, незамѣтныхъ софизмовъ, словесной мутной воды, глазоотводовъ, иллюзій и погрѣшностей. Тутъ нуженъ, пожалуй, колоссальный страховой банкъ для выкупа итога безчисленныхъ погрѣшностей сужденія; а его-то и не указываютъ категорическіе императивы логиковъ, надѣвшихъ личину верховенства и непогрѣшимости въ вопросахъ критики знанія. Компетенція подобной самоувѣренной, но неубѣдительной и губительной логики должна ограничиваться другою, высшею компетенціей.

Самое цѣнное въ истинно правильномъ сужденіи есть не его искусственная выдуманная форма, а близость выраженной имъ мысли къ истинѣ и выкупъ содержащейся въ немъ погрѣшности. Если греческое слово λόγος перевести въ духѣ пиѳагорейской терминологіи, то получится статистически провѣренное символическое *числовое* сужденіе или *вѣская* по значенію формула, приближающая выводъ къ истинѣ и сопровожденная оцѣнкой погрѣшности. Такая ариѳметизированная логика—аритмологія, по терминологіи Бугаева—по духу скорѣе пиѳагорейская и платоновская, также христіанская, а неаристотелевская и не кантіанская дѣйствительно можетъ быть признана, въ періодѣ обсужденія, независимою царицей, Ѳемидой съ мѣрами изслѣдованія и правосудія въ рукахъ. На этомъ духѣ изслѣдованія настоящая книга будетъ настаивать, подкрѣпляясь словами Пиѳагора: «міръ управляется числомъ», словами Гаусса: «математика есть царица наукъ, ариѳметика есть царица математики» **), словами Бугаева: «въ мірѣ господствуетъ не только достовѣрность, но и вѣроятность», т. е. законъ большихъ чиселъ, исключающій міріады погрѣшностей субъективныхъ сужденій.

Сужденія ариѳметизированной логики (аритмологіи) выражаются строго, но не обычной рѣчью; они сказываются, по желанію, или символическою многомѣрною

*) *А. И. Введенскій*: Логика, какъ часть теоріи познанія. Изданіе 2. С.-Петербургъ, 1912. Стр. 5.—Просимъ замѣтить, что на страницахъ 17 и 44 настоящей книги дѣлаются ссылки на *первое* изданіе книги А. И. Введенскаго, а не на второе.

**) Къ притязаніямъ на царственную роль то логики (логократія), то математики (наукократія), нужно присоединить притязаніе на ту же роль религіи («религія есть царица наукъ»—говоритъ теократія). И логократія, и теократія не желаютъ принять наукократію въ равный союзъ и не прочь сдѣлать эту даму своею гонимою служанкой... (ancilla). Между тѣмъ эта дама есть предпосылка побѣды надъ зломъ міра; гнать ее значитъ гнать эту побѣду.

таблицей съ колоннами цифръ, или многомѣрнымъ графикомъ, мысль котораго включающая оцѣнку и выкупъ опасныхъ погрѣшностей, иногда невозможно пересказать простою рѣчью: не хватило бы словъ и типографскихъ средствъ обычнаго печатнаго изложенія. Полное понятіе объ этихъ богатѣйшихъ формулахъ и графикахъ даетъ третья часть настоящей книги.

При популярномъ объясненіи законовъ и формулъ вѣроятности полезно устанавливать понятія не только съ помощію гипотезъ о возможныхъ причинахъ и основаніяхъ явленій, но и при помощи символическихъ философскихъ сказокъ о скрытыхъ причинахъ; это—сказки, кои въ сущности представляютъ поэтическое олицетвореніе и обозначеніе устойчивыхъ въ людскомъ сознаніи идей, навѣваемыхъ природою (врожденныя идеи), семейнымъ бытомъ, школою, общественнымъ гражданскимъ укладомъ, религіознымъ культомъ и пр.

Сказка о стрѣлкахъ, ангелахъ смерти, размѣщенныхъ по возрастной скалѣ смертности, помогаетъ Пирсону объяснить въ популярной поэтической формѣ борющіяся массовыя причины смертности и наоборотъ, жизнеспособности населенія, обнаруживающія себя таблицей или діаграммой смертности (см. стр. 525).

Ограниченность экономическихъ благъ дѣлаетъ матеріальное счастье людей не всегда вѣрнымъ, случайнымъ. И вотъ въ философскихъ сказкахъ фигурируетъ добрая слѣпая богиня Фортуна, удѣляющая людямъ счастье по равному (относительно риска) жребію; ей долженъ довѣриться человѣкъ, ищущій счастья. Однако же у ея жребія оказываются, à posteriori, сынки и обездоленные пасынки; положеніе между ними обостряется. Тутъ приходитъ на выручку другая дама, строгая Ѳемида, съ завязанными по закону глазами, съ вѣсами статистики въ одной рукѣ и съ защитнымъ по справедливости страховымъ мечомъ въ другой рукѣ; она стремится улучшить взаимоотношеніе пасынковъ и сынковъ Фортуны, облагая вторыхъ и воспособляя первымъ; въ заботахъ у нея, какъ въ евангельскомъ «царствіи небесномъ», первые бываютъ послѣдними, а послѣдніе первыми...

Чтеніе Иліады Гомера (въ хорошемъ переводѣ), чтеніе былинъ народнаго эпоса, чтеніе священныхъ книгъ и историческихъ повѣствованій должно въ популярномъ всенародномъ образованіи явиться вспомогательнымъ орудіемъ общаго развитія понятій. Чтенія этого рода должны уже въ младшихъ классахъ подготовить къ пониманію формулъ точной статистической теоріи взаимоотношеній, какъ объединяющихъ выраженій этнологической интеграціи и дифференціаціи.

Поэтическія утопическія излишества философскихъ сказокъ, маниловщина и другіе грѣхи популярщины исключаются строгою критикой, статистикою фактовъ и опытомъ вѣковъ; предметъ этихъ эмпирически точныхъ наукъ—дѣйствительная жизнь человѣческаго общества, дѣйствительныя соціальныя массы.

За порогомъ чистой теоретической логической работы разума начинается практическая логика опытовъ и фактовъ и самый опытъ — подвигъ, прилежный трудъ, ищущій истины, лабораторный творческій и повѣрочный экспериментъ, съ присмотромъ и ритмическимъ и рефлективнымъ дѣйствіемъ по ходу обстоятельствъ и съ записью или протоколомъ наблюдателя, дѣлающимъ вкладъ въ матеріалы статистики и статистическаго *оказательства* (освѣщенія) *отъ фактовъ*, конкуррирующаго, по его важности и независимости, съ чисто теоретической логической работой. Синтезъ же между этими параллельными способностями духа открывается сличеніемъ, опредѣляющимъ законъ и выкупъ погрѣшностей.

Логическій принципъ противорѣчія и исключеннаго третьяго (средняго) содержитъ *скрытую* предпосылку о *дуализмѣ* (двойственности) дифференціаціи Всего. Помянутый сейчасъ принципъ сведенъ нынѣ къ двумъ символическимъ уравненіямъ:

$$aa' = 0 \quad \text{и} \quad a + a' = 1,$$

гдѣ a' есть не $-a$ *). По истолкованію Кутюра приведенныя логическія уравненія именно означаютъ, что акты a и a' вмѣстѣ обнимаютъ Все.

*) *Л. Кутюра*: Алгебра логики. Переводъ И. Слешинскаго. Одесса, 1909. Стр. 24

Эти уравненія суть частный случай теоремъ умноженія и сложенія вѣроятностей, если a и a' подмѣнить вѣроятностями соотвѣтствующихъ частей Всего, считая достовѣрною лишь одну изъ нихъ. Теорія вѣроятностей обобщаетъ этотъ частный случай, трактуя возможныя дилеммы «есть»—«нѣтъ».

Но этого обобщенія еще недостаточно, ибо дуалистическая дифференціація Всего, какъ мы видѣли, есть не болѣе, какъ блестящая по простотѣ, словесная абстракція; она завѣдомо не согласована, въ качествѣ общеобязательнаго правила, съ дѣйствительностію, а именно—съ фактомъ множественности (болѣе 2) самостоятельныхъ факторовъ событія и съ возможностью пертурбаціи со стороны третьяго. Міръ, повторяемъ, сложенъ по составнымъ частямъ, и, слѣдовательно, сужденія должны быть комплексными по терминамъ подлежащаго, сказуемаго и связки и по распредѣленію средняго термина силлогизма.

Дуалистическую логику можно бы оправдать такъ, какъ оправдываютъ плоскую карту, изображающую объемъ въ проекціи, съ искаженіемъ правды, поправимымъ, если сдѣлано двѣ проекціи объема, съ двухъ точекъ зрѣнія. Но правила логики молчатъ и объ этой проективности; они плоски по самому роду своего воззрѣнія, подобному воззрѣнію безконечно тонкой плоской рыбы Вильяма Клиффорда *).

Считая необходимымъ ввести въ эту плоскую логику проективные элементы, мы включаемъ въ ея конституцію третье (среднее), какъ просвѣтительную *высь*, соотвѣтствующую скалѣ вѣроятности (почти достовѣрности) удерживать среднюю погрѣшность $\triangle$ сужденія въ *узкихъ* предѣлахъ ея измѣненія (см. стр. 311, 429, 444—447, 455), а также облегченно выкупать въ массѣ аналогическихъ сужденій валовой итогъ погрѣшности, *законъ которой и надлежитъ такъ или иначе* (дедуктивно или индуктивно) *вывести и формулировать этически и юридически.*

При этомъ синтетическія посредствующія двучленныя (не считая связки) сужденія (логическія діады) бываетъ можно «обращать», но не какъ вполнѣ опредѣленныя сужденія (опредѣленныя уравненія) (см. стр. 434 и 452). Силлогизмы полученной новой логики, которую назовемъ «объемною» въ отличіе отъ «плоской» **), придется назвать *неправильными*; этотъ терминъ вошелъ въ книгу А. И. Введенскаго для учащихся: Логика (С.-Петербургъ, 1910. Стр. 97). Но нужно твердо запомнить, что именно логика «правильныхъ силлогизмовъ» слишкомъ часто представляетъ «прокрустово ложе» для истинныхъ сужденій и понятій; относительная же «неправильность» или, говоря фигурально «относительная кривизна» формулъ объемной логики (см. ниже, стр. 335), оцѣнивающей законъ и стоимость погрѣшности, оказывается именно юридически и этически справедливымъ и необходимымъ отклоненіемъ отъ «прокрустова ложа» и тупиковъ правильныхъ силлогизмовъ.

Все сказанное можетъ быть выдвинуто въ защиту нѣкоторыхъ положеній логической теоріи М. И. Владиславлева и эмпирической теоріи Н. О. Лосскаго противъ атакъ А. И. Введенскаго (см. его книгу: Логика, какъ часть теоріи познанія, изд. 2, стр. 207). Въ упрекъ же всѣмъ имъ нужно поставить то, что ими въ модусы силлогизмовъ не вводится когда слѣдуетъ тарификація вѣроятностей *погрѣшности* или, наоборотъ, *истинности* тѣхъ заключеній, кои вырабатываются изъ посылокъ. Но первыми виновниками пропуска въ законахъ логики вышепомянутой графической выси (скалы вѣроятностей) были не эти авторы, а Аристотель, Иммануилъ Кантъ, Огюстъ Контъ, Милль и пр., надѣвшіе добровольныя догматическія очки на свое воззрѣніе и повредившіе (сокрытіемъ погрѣшностей $\triangle$) существо хотя и несовершеннаго, но всетаки *цѣльнаго* знанія, въ которомъ погрѣшность есть какъ бы излѣчимая болѣзнь,—излѣчимая критикой „законовъ погрѣшности“, раскаяніемъ, про-

*) См. *В. Клиффордъ*: Здравый смыслъ точныхъ наукъ. Начала ученія о числѣ и пространствѣ. Переводъ А. Р. Кулишера. Москва, 1910. Стр. 254.

**) Терминъ: «объемная логика» беру изъ книги инженера бар. *М. Ф. Таубе*: Познаніевѣдѣніе. С.-Петербургъ, 1912.

щеніемъ, взысканіемъ сколько слѣдуетъ и вспомогательными добродѣтелями. Паскаль, Лапласъ, Гауссъ, Буль, Джевонсъ, Чебышевъ, Бугаевъ, Карлъ Пирсонъ и другіе математики-просвѣтители не вводятъ публику въ подобный популярный обманъ.

Тарификація милліардовъ погрѣшностей соотвѣтствуетъ формальному множеству таблицъ или скалъ количественнаго выявливанія жизненно цѣнныхъ перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, . . .; этимъ скаламъ и самимъ событіямъ соотвѣтствуетъ въ Номографіи производящая аналитическая функція F вѣроятности того или другого сочетанія (x_1, x_2, x_3, . . .), называемаго ниже «точкой» графическаго пространства. Производящая функція F—она же алгебраическій *полиномъ* (см. стр. 488)—аналитически представляетъ «законы» выявливанія этой цѣнной «точки», оставляющіе мѣсто *творчеству*, искусству, техникѣ, сказаніямъ опыта и выкупамъ милліардовъ погрѣшностей милліардами добродѣтелей на самомъ дѣлѣ. Законы эти суть абстракціи, координирующія измѣненіе вѣроятностей, какъ бы меридіаны своего рода, отъ которыхъ фактическія отклоненія бываютъ постоянно (см. стр. 529—530), но искупаются фондами и творчествомъ.

Милліарды погрѣшностей сужденій и взаимоотношеній бываютъ честно исключимы лишь тогда, когда даны твердые логическіе принципы фармальной истинности и статистически найдены законы этихъ погрѣшностей; а хуже всего обстоятъ дѣла людей тогда, когда законы большихъ чиселъ погрѣшностей сужденій и взаимоотношеній скрываются въ подполье невѣжества или даже лукавства, забронированнаго личиною и предѣлами недосягаемости.

Тутъ необходимъ строгій критическій методъ, *просвѣтительный* и осторожный относительно возможности творчества....

Распространено мнѣніе, что математика есть наука объ отношеніяхъ, а не о самыхъ предметахъ. Этого взгляда держится, напримѣръ, Пуанкаре. Но этотъ взглядъ слишкомъ одностороненъ; на самомъ дѣлѣ *метрическая* задача, входящая въ корень ученія о числахъ и величинахъ, несомнѣнно привноситъ въ математику *образцовые* предметы; этой задачѣ французская, англійская, итальянская и нѣмецкая школы отводятъ большое мѣсто; она ставитъ отвлеченную и лабораторную математику лицомъ къ лицу съ единицами и наглядными мѣрами, физическими и графическими; мѣры, какъ вещи, суть именно подлинные предметы, реалы, притомъ типическіе, образцовые, опредѣляющіе типическій *канонъ* вещей въ своемъ классѣ, *стандартъ*. Мѣры, поэтому, играютъ основную роль, предопредѣляющую міропорядокъ и строй взаимоотношеній и символическихъ представленій. Роль ихъ въ міропорядкѣ особенно видна изъ главы IV части III. Общая наибольшая мѣра a_m массива вещей, соотвѣтствующихъ какой либо вѣчно дѣйствующей бытовой конъюнктурѣ большого числа m операцій, обыкновенно бываетъ относительной, нестойкой; абсолютною же устойчивою общею мѣрою является ея мельчайшій предѣлъ $a = a_\infty$ при $m = \infty$ (стр. 449).

Предѣльная единица а въ различныхъ конъюнктурахъ является то *индивидуумомъ* (въ родѣ человѣческомъ и въ царствахъ животныхъ и растеній), то *атомомъ* (въ царствахъ мертвой природы), то психическимъ *реаломъ*, духовнымъ центромъ психики (въ счетѣ различныхъ „я“), то посредствующимъ мѣриломъ цѣнностей, символическимъ экономическимъ *реаломъ*, денежнымъ знакомъ (въ дѣятельности промышленныхъ идей—силъ), то *динамическою единицей* (въ дѣятельности мускулъ и физическихъ силъ природы), то *пространственною единицей* съ тѣмъ или другимъ числомъ *измѣреній*, то единицею *времени* работы, то единицею *сопротивленія*.

Для полученія числовыхъ соотношеній величины измѣряются своими единицами. Но не все можно измѣрить физическими абсолютными мѣрами; многія числа получаются счетомъ индивидуумовъ, очковъ, точекъ и пр.; нѣкоторыя качественныя величины, какъ блескъ цвѣтовъ, радость, боль и пр., можно измѣрять лишь на глазомѣръ и номинально, съ вѣроятностною умственною интуиціей реальности (что и есть „мысленное владѣніе“ по терминологіи проф. В. А. Юшкевича).

Не только измѣреніемъ величинъ создаются числа, но и, наоборотъ, чистымъ исчисленіемъ единицъ собирательной наличности съ гражданскимъ ожиданіемъ тиража и прироста людей и благъ создаются идейныя цѣнныя величины, какъ движимые капиталы, недвижимыя богатства; эти идейныя и даже только номинальныя (какъ денежная бумага) величины съ ихъ идеальными единицами создаются изъ гражданскаго довѣрія, изъ народной психологіи и религіозной этики; такія единицы являются не физическими, а графическими идейными и символическими мѣрами, пропитанными духомъ законности, загадкой и законами вѣроятности. „Капиталъ“, говоритъ Д. И. Менделѣевъ, „есть не золото, а довѣріе“; довѣріе, конечно, этическое и оправдывающееся на дѣлѣ, а не слѣпое суевѣріе. Тутъ играютъ роль *реальности* того или другого рода, а въ реальностяхъ имѣютъ значеніе кредитъ, дебетъ и ломбардъ наличностей, учетный банкъ, активъ, пассивъ и отчетный передъ публикой балансъ.

Примѣчательная измѣрительная графическая *вибрація* довѣрія (эйектъ), ведущая отъ номинальнаго владѣнія къ матеріальному, происходящая подъ дѣйствіемъ фактовъ, матеріализующихъ мысленное номинальное владѣніе предметомъ n, описана на страницахъ 491—492 настоящей книги. Она, будучи не мистическо-спиритическою, а номографическо-спиритуалистическою, соотвѣтствующею спиритуалистической юридической теоріи (беру терминъ у юриста-профессора Юшкевича), похожа на Лобачевско-Римановскія, Фехнеровскія и Бутлеровскія графическія представленія вибрацій четырехмѣрнаго пространства. Координатную скалу вѣроятности тутъ надо считать за графическое „четвертое измѣреніе“, принадлежащее условнымъ пространствамъ математической логики, числовой геометріи проф. Н. В. Бугаева и Номографіи инженера-профессора Мориса д'Окань.

Помянутая примѣчательная измѣрительная вибрація зависитъ отъ фактической котировки множества варіацій $\delta\Delta p_x$ и отъ накопленія ихъ параллельно съ рядомъ фактовъ до итога 0 или 1, т. е. до абсолютной достовѣрности „нѣтъ“ или „есть“.

Тутъ въ раздробленномъ счетѣ возможны и субъективныя котировки, ошибочныя по мелочамъ. Это тѣмъ болѣе возможно, что истинные психофизическіе законы Н. Н. Шишкина и Н. В. Бугаева, поправляющіе законъ ощущенія, ранѣе формулированный Веберомъ, Фехнеромъ и Вундтомъ, констатируютъ прерывность или черезполосность ощущенія и слѣпоты, гипноза на яву у всякаго человѣка, даже нормальнаго, а тѣмъ болѣе утомившаго или иначе разстроившаго работоспособность своего вниманія. На этомъ основано философское понятіе порога сознанія, а въ практикѣ множество обмановъ и магическихъ фокусовъ, отводящихъ глаза иногда цѣлому собранію людей, подвергаемыхъ психо-физическому опыту. Если къ этому изъяну связи ощущеній и внѣшнихъ раздраженій присоединить: 1) душевную предрасположенность испытуемаго субъекта повѣрить постулатамъ и утвержденіямъ фокусника и 2) ловкость техническихъ приспособленій для „чудесъ“ фокусника, то понятно, что магическіе фокусы могутъ казаться спиритуалистическими „чудесами“. Такіе чудеса изготовлялъ кустарнымъ способомъ для лжепедагогическихъ цѣлей знаменитый мистикъ-визіонеръ, педагогъ-іезуитъ Игн. Лойола (см. проф. *П. Соколовъ*: Вѣра. Психологическій этюдъ. Москва, 1902). Аналогическими фокусами пользуются нынѣ мистическія общества, проводящія въ большую публику медіумическія „чудеса“ подъ флагомъ будто-бы „науки“ о загробномъ мірѣ. Для гипнотизированія биржевой и политической публики пускаются въ оборотъ „утки“ и многообѣщающія политическія плакаты или платформы.

Невозможно мыслить о соціологическихъ объектахъ внѣ формулъ и котировокъ вѣроятности, какъ условной и безусловной достовѣрности; почему мы и присоединяемъ *просвѣтительные* принципы *математической* вѣроятности *къ основнымъ апріорнымъ идеямъ критики чистаго разума*; а съ другой стороны мы причисляемъ къ апріорнымъ идеямъ критики кантовскія идеи о пространствѣ (эвклидовскомъ), о времени, о связи

причины и дѣйствія и пр. Благодаря присоединенію, „включенію“ вѣроятности или средняго (третьяго) въ самые первые законы мышленія, выигрывается *графическій синтезъ* двухъ міровъ: 1) міра мысли и 2) міра фактовъ, — синтезъ въ формѣ міра посредствующихъ мѣръ (критеріевъ) и индуктивно-дедуктивныхъ уравненій теоріи вѣроятностей, съ ея понятіями о *независимости* самостоятельныхъ факторовъ, о разныхъ степеняхъ *зависимости*, *о прикрѣпощеніи* къ абсолютнымъ принципамъ, идеямъ разума и о зависимости также отъ предметовъ физической нужды.

Нужно различать три части общей Номографіи: 1) номографія физическая, 2) номографія біологическая и 3) номографія метафизическая *), необходимая въ наукѣ права и религіозной этикѣ. Однако же существуетъ въ головахъ людей умышленное или неумышленное смѣшеніе этихъ частныхъ номографій, подмѣнъ понятій.

Вопреки доктринамъ «логики нравственныхъ наукъ» Дж. Ст. Милля и въ согласіи съ доктринами проф. В. Г. Алексѣева **), методъ общественныхъ и нравственныхъ наукъ, касающійся правилъ поведенія и мельчайшихъ явленій общественной жизни, имѣетъ сходство съ методомъ *математической химіи* (см. стр. 456), въ которой, кромѣ теоретической догмы, играетъ роль законъ большихъ чиселъ и силы психическаго сродства самихъ элементовъ человѣческаго рода къ положительному нравственному идеалу (совершенству). «Царство небесное подобно закваскѣ...». Распыленныя въ психикѣ людей нравственныя понятія (закваска) схватываются и ассимилируются врожденною способностью человѣка понимать *безграничное*, трансфинитное, обращать взоръ къ *безконечному* совершенству; тогда какъ нравственный кругозоръ животныхъ, стоящихъ ниже человѣка, не выходитъ изъ *узкой* сферы ограниченнаго, конечнаго (каковое *безконечное* различіе между способностями человѣка и, положимъ, обезьяны обнаруживаетъ чрезвычайную ошибку эволюціоннаго ученія, отождествляющаго по природѣ, по существу психику и мораль животныхъ съ психикой и моралью человѣческаго рода). Способность схватывать что-либо сверхконечное (конечно, вѣрою, *предѣльнымъ* закономъ большихъ чиселъ, разумомъ вѣры, а не непосредственнымъ ощущеніемъ сверхконечнаго) назовемъ *озареніемъ*; эту способность хорошо знаютъ педагоги-математики, наблюдая иногда среди своихъ учениковъ „быстрыхъ разумомъ Невтоновъ“. Генеалогія человѣческаго духа, способнаго разумѣть всякія безконечности, очевидно, не соизмѣрима съ психологіей и моралью животныхъ ***).

---

*) Физики спѣшатъ обогнать метафизику въ развитіи своихъ идей и стремятся истолковать Римановско-Фехнеровское „четвертое измѣреніе“ съ помощію теоріи электричества и ея нынѣ весьма популярнаго „принципа относительности“ (см. „Новыя идеи въ физикѣ“, подъ редакціей проф. *И. И. Боргмана*. „Принципъ относительности“. Сборникъ № 3. С.-Петербургъ, 1912). Новая физика искусно переноситъ четвертое измѣреніе въ міровой эфиръ; но что такое эфиръ?... Это фетишъ, хорошая сказка, плохая метафизика, куда физики прячутъ свои начала и концы.— Системы, основанныя на методѣ вѣроятностей и ихъ производящихъ функцій, обхватываютъ электричество, какъ одну изъ частныхъ задачъ, дающую поводъ думать, что формулы электричества умно выхвачены изъ проблемъ кредита, экономіи, математической статистики. Аналогіи между финансово-экономической динамикой и электрическою теоріей проведены въ нашихъ трудахъ довольно подробно. Проведеніе аналогическихъ параллелей желательно, но нежелательны подлоги понятій, стремящіеся задушить то метафизику физикой, то физику метафизикой.

**) *В. Г. Алексѣевъ:* «Математика, какъ основаніе критики научно-философскаго міровоззрѣнія» (Юрьевъ, 1903).

***) *А. Тихомировъ*: Научно ли антихристіанское воззрѣніе на природу человѣка. (Изъ журнала „Свѣточъ и Дневникъ Писателя“. Москва. 1912).

Въ историческихъ оборотахъ творчества и въ соціально-ариѳметическихъ правилахъ смѣшенія и товарищества, хозяева и рабочіе связаны капиталомъ, а также *антиномическою* взаимностью, какъ кредиторы и дебиторы.

Пассивы и активы хозяевъ суть, наоборотъ, активы и пассивы работниковъ. Но торговый классъ, какъ посредникъ между потребителями и производителями, превращаетъ эту *антиномическую діаду* въ состязательную *тріаду*: хозяинъ, работникъ, купецъ. Въ этомъ закономѣрномъ состязаніи промышленныхъ силъ развиваются прямыя и обратныя геометрическія пропорціональности; ариѳметическія же разности (дифференціалы) прямой и обратной пропорціональности бываютъ прямо противоположны по ихъ алгебраическому знаку $\pm$, который характеризуетъ явленія положительнаго и отрицательнаго сродства комплексовъ массовыхъ явленій въ ихъ сосуществованіи (см. стр. 453) и послѣдовательности (стр. 462).

Вѣрное рѣшеніе соціальной проблемы намѣчено еще у проф. Винкельбельхъ (Карла Марло) въ капитальномъ трудѣ «Изслѣдованія организаціи труда или система мироваго хозяйства» (1850) и у популяризатора этого труда Шеффле *). Мною предполагаемое рѣшеніе заключено въ *абсолютномъ* правѣ государства уравновѣшивать сословія и соперническіе классы финансовыми налогами и правооборотами (кесарево—кесарю), держа имперскій коронно-народный доминирующій банкъ, какъ руль государственной машины, и регулируя налогами и кредитами цѣны земскаго капитала и труда въ надежныхъ рамкахъ по статистической теоріи взаимоотношеній, по теоріи политико-экономическихъ потенціаловъ (см. стр. 131—134 и 337) и по теоріи финансовыхъ фондовъ каждаго класса, кои соотносятся между собою такъ, какъ закономѣрно сообщающіеся бассейны, *камеры* капельной жидкости (см. стр. 529—532 и см. схему данную въ моей книгѣ: «Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты»). Ложныя ученія стремятся отвести глаза отъ этого абсолютно правильнаго рѣшенія, увлекая демосъ, политическую толпу рецептами то ультра либеральной политики, то тиранническаго соціалистическаго государства, разрушающаго законную частную собственность и соревнованіе.

Чтобы разобраться въ этой финансовой гидродинамикѣ, нужно быть инженеромъ юридическихъ наукъ. Но такихъ инженеровъ въ Россіи нѣтъ, ибо юридическая школа у насъ питается лишь словесными неколичественными формулами, и подготовляются у насъ лишь юристы-словесники (даже на административно-экономическихъ или камеральныхъ отдѣленіяхъ). Фельдшеризмъ юридическаго университетскаго образованія—*вотъ* бичъ Божій на насъ за грѣхи наши и нашей школы. Въ результатѣ получаются странныя юридическія формулы въ практикѣ законодательства (см. стр. 532). Приходится видать профессоровъ камеральныхъ (математическо-юридическихъ) наукъ и практиковъ камеральнаго права, кои не могутъ прочитать финансово-экономической діаграммы, рѣшающей нѣсколькими кривыми линіями какую нибудь слегка усложненную проблему торговаго права и политической экономіи. Между тѣмъ ошибки необходимой въ бытѣ финансовой казни также политически страшны, какъ ошибки гражданскихъ казней. Вотъ почему опять приходится, по примѣру Петра Великаго, обращаться къ варягамъ (заграницу), чтобы тамъ подготовить профессуру въ контролируемыхъ семинаріяхъ. Контролируемыя проффессорскія семинаріи юридическо-математическихъ наукъ назрѣло время учредить и внутри Россіи.

Но опрощенцы говорятъ, что математика съ ея языкомъ есть наука трудная, доступная лишь особымъ натурамъ. Это утвержденіе также внушено суевѣріемъ и, съ другой стороны, непривычкою къ соотвѣтствующей терминологіи и символизаціи, а въ Россіи еще и неудовлетворительнымъ подготовленіемъ гимназическихъ учителей; ибо высшій педагогическій институтъ въ періодѣ отъ середины

---

*) *В. Т. Ярошкій:* Страхованіе рабочихъ въ связи съ отвѣтственностію предпринимателей. Стр. 561—572. С.-Петербургъ, 1895.

XIX вѣка и почти до нашихъ дней, былъ филологическимъ, т. е. представлялъ лишь одну секцію цѣльнаго философскаго факультета *).

Не разсужденіе только, а и рѣшительность воли и *факты* превращаютъ ту или другую идею (умыселъ, умозрѣніе) и слова въ дѣйствительность; и большая или меньшая твердость и рѣшительность (смѣлость) характера въ рискѣ умнаго совершенія фактовъ, сообразованнаго съ идеями и общими идеалами, есть наиболѣе важная черта, обрисовывающая духъ, нравы, нравственные типы дѣятельныхъ людей, племенъ, народовъ и вообще элементовъ человѣческой расы. Между міромъ умозрительныхъ понятій и міромъ дѣйствительности лежатъ *рѣшительные факты* (см. стр. 491—493), какъ по видимому незначительная рѣчка Рубиконъ, который нужно людямъ *дерзать* умно и закономѣрно переходить, для постояннаго и разумнаго соединенія двухъ міровъ A и A'. Эта работа перехода соотвѣтствуетъ уже не умозрительной, а *эмпирической наукѣ*, техникѣ, искусству и положительному рѣшающему вдохновенію вершителей судебъ въ моментъ окончательнаго *творенія*; а потомъ наступаетъ время оцѣнки и *отвѣтственности* за дѣла по плодамъ рѣшительной смѣлой работы. Непогрѣшимость противъ принциповъ, невиновность, какъ отрицательная добродѣтель, хороша; но дорого цѣнится умная *положительная* добродѣтель, ея опыты—подвиги, искупающіе много своихъ и чужихъ грѣховъ.

Грядущее рабство готовится человѣку: 1) со стороны софизмовъ порочнаго слова и 2) со стороны умной секты золотого тельца, всемірнаго финансоваго капитализма, высасывающаго спрута (мертвой міровой души) съ его спутникомъ въ лицѣ пролетаріата. Въ *противовѣсъ* власти спрута *необходима Покровительственная Искупающая и Ограждающая Система Мелкаго Государственнаго Кредита* народному труду и землѣ (крестьянскому двору, рядовому трезвому мужику) и *Сосредоточеннаго Страхованія по научнымъ схемамъ страховаго права* и налога, *съ инспекціей отъ государства*, съ обороною *внутренняго* народнаго творческаго капитала всѣхъ соперническихъ типовъ отъ насилій *міроваго* капитала (отъ порабощенія мертвой міровой душѣ) Не „кучка“ биржевыхъ счастливцевъ, а вся земщина, начиная съ пахаря, должна быть покрыта этимъ щитомъ и національными фондами. Тутъ, въ этой именно и мелкой, и общей (государственно сосредоточенной) финансовой борьбѣ съ мертвою міровою душою и съ ея присосками, грюндерами—вампирами и паразитной иммиграціей на земли, усѣянныя костями нашихъ отцовъ и политыя ихъ потомъ и кровью, зарытъ корень нашей экономической независимости.

Тутъ, математическая философская критика обхватываетъ графическія науки духа, науки юридическія и общественныя и науки естественныя. Она сопровождаетъ *качественный* анализъ взаимоотношеній *количественнымъ* анализомъ ихъ (см. стр. 442—444) какъ въ химіи. Она останавливается лишь передъ постулированіемъ вопросовъ религіозной вѣры въ истинное абсолютное бытіе; тутъ авторитетъ научной философіи, опасаясь ложной мистики или подспудныхъ законовъ абсолютно мертвящей погрѣшности, долженъ считаться съ авторитетомъ религіозной философіи и ученій церкви.

---

*) Нынѣ для приготовленія учителей гимназій и реальныхъ училищъ возникъ Педагогическій Институтъ имени П. Г. Шелапутина въ Москвѣ, соединившій въ себѣ обѣ секціи (математическую и филогическую) педагогическаго дѣла, какъ это было въ Главномъ Педагогическомъ Институтѣ первой половины прошлаго вѣка. Этимъ учрежденіемъ однакоже не устранена необходимость проектированнаго Менделѣевымъ высшаго педагогическаго института для приготовленія на лонѣ природы учителей учительскихъ семинарій, выпускающихъ рядовое учительство сельскихъ элементарныхъ школъ. Менделѣевскій консерваторіумъ нуженъ земледѣльческой Россіи; а существующіе высшіе педагогическіе институты нужны для городской Россіи и для класса чиновниковъ. Нужно съ дѣтства учить будущаго пахаря холить и рядить родящую землю-кормилицу.

Предпошлемъ первой части настоящей книги нѣсколько чисто философскихъ замѣчаній, относящихся къ антиноміямъ, коихъ никакая просвѣтительная объективная теорія, покушающаяся популярно-догматически, катехизически приблизиться по возможности къ цѣльному знанію и имѣющая дѣло съ борьбою массовыхъ причинъ (см. стр. 506 и 529), съ противорѣчіями принциповъ и спорящими субъектами, не можетъ избѣгнуть и вполнѣ исключить.

Антиноміи Канта, помогающія принципіально отличать мертвую міровую душу отъ живой міровой души, отъ абсолютнаго истиннаго бытія, выражаются четырьмя положеніями съ ихъ противоположеніями *):

1.

Положеніе:

Міръ имѣетъ *начало* (границу) во времени и въ пространствѣ.

Противуположеніе:

Міръ во времени и въ пространствѣ *безконеченъ*.

2.

Положеніе:

Все въ мірѣ состоитъ изъ *простого* (недѣлимаго).

Противуположеніе:

Нѣтъ ничего простого, а все *сложно*.

3.

Положеніе:

Въ мірѣ существуютъ *свободныя* причины.

Противуположеніе:

Нѣтъ никакой свободы, а все есть *природа* (т. е. необходимость).

4.

Положеніе:

Въ ряду міровыхъ причинъ есть нѣкое *необходимое Существо*.

Противуположеніе:

Въ этомъ ряду нѣтъ ничего необходимаго, а *все случайно*.

Исчисленіе вѣроятностей и математическая статистика отводятъ въ

*) *Иммануилъ Кантъ*: „Пролегомены ко всякой будущей метафизикѣ, могущей возникнуть въ смыслѣ науки“. Переводъ В. С. Соловьева.

своей критикѣ чистаго и практическаго разума должное мѣсто этимъ антимоніямъ, но отказываются отъ догматическихъ (катехизическихъ) очковъ кантіанства и неокантіанства, слишкомъ *радикально* раздѣлившихъ знаніе и вѣру въ абсолютное безконечное бытіе и радикально препятствующихъ освѣтить правильный выходъ изъ океана жизненныхъ противорѣчій, по возможности, къ цѣльному истинному знанію и къ жизненнымъ золотымъ серединамъ (надежнымъ идеаламъ жизни). При этомъ отказѣ отъ одной изъ кантіанскихъ догмъ нужно лишь бояться канонически (законоцѣлесообразно) некоординированнаго и анархически подспуднаго мистицизма.

Критическое по методу славянофильское любомудріе съумѣло въ своей критической теоріи знанія оберечься отъ некоординированнаго и ложнаго мистицизма *).

Математическая теорія вѣроятностей помогаетъ установить формулы и опыты изслѣдованія природы и человѣческаго общества, бросающіе свѣтъ въ третью антиномію: «существуютъ ли свободныя причины или, напротивъ, существуетъ только необходимость, т. е. природа?» **).

Эта антиномія (третья) въ «Критикѣ чистаго разума» Канта (см. переводъ Н. Лосскаго, стр. 276) полнѣе выражена такъ.

Тезисъ.

Причинность согласно законамъ природы есть не единственная причинность, изъ которой могутъ быть выведены всѣ явленія въ мірѣ. Для объясненія явленій необходимо еще допустить свободную причинность (Causalität durh Freiheit).

Антитезисъ.

Не существуетъ никакой свободы, но все совершается въ мірѣ только согласно законамъ природы.

Понятіе о независимости системъ и о мѣрахъ зависимости и устойчивости массовыхъ явленій историческаго процесса, тѣсно связанное съ разрѣшеніемъ кантіанской *антиноміи:* свобода или необходимость, строго установлено въ настоящей книгѣ. Высшій предѣлъ зависимости—абсолютная крѣпостная зависимость; но нужно различать два рода прикрѣпленій: 1) къ принципамъ гражданскаго долга и нравственнаго идеала (принципы требуютъ подвига и жертвъ) и 2) къ предметамъ жизненной нужды (ѣсть, пить, одѣваться, запасать трудомъ деньги на «чорный день» и пр. нужно).

*) Бар. *М. Ф. Таубе*: А. С. Хомяковъ, какъ антимистицистъ. Харьковъ, 1910.—Полезно сличить эту статью съ статьею *А. И. Введенскаго*: О мистицизмѣ и критицизмѣ въ теоріи познанія В. С. Соловьева (см. Философскіе очерки. С.-Петербургъ, 1901).

**) Въ «Запискахъ о всемірной исторіи» А. С. Хомякова тезису этой антиноміи соотвѣтствуетъ терминъ «иранство», восточное просвѣщеніе, а антитезису «кушитство», западное просвѣщеніе. (Хомяковъ, т. V, стр. 217. „Свобода выражается идеею творчества, необходимость—идеею рожденія. Религіи Иранская, Кушитская; религіи мѣшанныя“).

Независимость явленій A и A_1 другъ отъ друга обусловливается въ самомъ бытьи независимостью (свободою) творческихъ причинныхъ факторовъ O и O_1, производящихъ эти явленія, выбирая по своей волѣ средства (работающій капиталъ) изъ ряда: $a, b, \ldots$

Вспомогательные (подъ рукою собранные) капиталы $a, b, \ldots$ суть заручныя средства свободной причинности. Въ иносказательномъ (распространительномъ) значеніи слова „капиталъ“ *творческая* способность самихъ людей есть многообразный *нравственный* капиталъ $a, b, \ldots$ въ рукахъ исторіи, вооруженный идеями, спеціальными и общими знаніями, умѣніемъ, трудолюбіемъ, подвигомъ любви.

При существованіи свободной причинности допускается неизбѣжно творческая мутація или пертурбація, работою нарушающая въ событіи и въ самой системѣ логики вышепомянутые принципы противорѣчія и исключеннаго средняго (третьяго). Мутаціи явочно включаютъ третье (среднее), свободную причинность,—и лучше, если эта самовольная явочность будетъ предусмотрѣна и поставлена въ предѣлы улучшенныхъ законовъ (постулатовъ) логики и соціальной техники.

Если это третье (среднее) можно исключить, то лишь *борьбою*, ассигнованіемъ (включеніемъ, вмѣщеніемъ) въ процессъ опыта спеціальныхъ противодѣйствій, т. е. противоположныхъ причинъ (см. стр. 343 — 449), уравновѣшивающихъ стремленіе къ тлетворной пертурбаціи. Естественное состояніе есть только простой хаосъ борьбы противоположныхъ причинъ по формулѣ революцій и контръ-революцій (Гоббесъ),—борьбы, выгодной радующемуся третьему, именно общему врагу.

Надо помнить, внутреннюю и формальную связь *третьей* антиноміи Канта со *второю*. Антитезисъ (противуположеніе) второй антиноміи *сродни* тезису третьей антиноміи. Постулаты (логическія предписанія), рѣшающіе спорный вопросъ третьей антиноміи въ духѣ ея *тезиса*, тѣмъ самымъ постулируютъ рѣшеніе спорнаго вопроса второй антиноміи въ духѣ ея антитезиса, и наоборотъ.

Постулируя рѣшеніе второй кантіанской антиноміи въ духѣ ея антитезиса, т. е. признанія сложности Всего или множественности взаимнодѣйствующихъ основаній и работающихъ причинъ (факторовъ), мы, конечно, тѣмъ самымъ вводимъ свободную причинность, какъ логическое третье (среднее), и тутъ же предполагаемъ подразумѣваемую, выводящую человѣка изъ Хаоса и Ночи истинную абсолютную идеологію (credo), для однихъ искомую и едва мерцающую, для другихъ уже достаточно ясную, найденную и усвоенную, спасительно объединяющую составныя части Всего или Цѣлаго, и, наконецъ, для третьихъ найденную и непринятую, отталкиваемую, что разстраиваетъ части Всего.

Насажденіе частныхъ свободъ, хуторовъ и частныхъ конкуррирующихъ хозяйствъ, неприкрытое наукою, вѣрою и правдою осмотрительныхъ

искупающихъ и оберегающихъ общихъ учрежденій, ведетъ общество не только къ безуправицѣ, но и къ пародоксальнымъ и катастрофальнымъ положеніямъ. Эту истину относительно общихъ катастрофъ, противорѣчащую обычнымъ взглядамъ на свободу и ея философію, я поясню въ настоящей книгѣ (часть II) съ помощію примѣровъ и на основаніи теоремы Чебышева о среднихъ величинахъ, дозволяющей установить измѣрительную скалу устойчивости и неустойчивости явленія благъ въ результатѣ массовой человѣческой дѣятельности, послѣдовательно развивающейся въ ходѣ историческаго процесса. На этой скалѣ можно отмѣчать тѣ парадоксальныя положенія, за которыми слѣдуютъ и на самомъ дѣлѣ надрывы государственнаго, общественнаго и частнаго благосостоянія, если не принимать отечественныхъ покровительственныхъ мѣръ права, т. е. исправленія погрѣшностей мистики свободъ. Законъ Чебышева, поэтому, есть важный членъ Номографіи, онъ даетъ понять достаточное основаніе, нерушимую стѣну, отношеніе этой стѣны къ нескрытымъ «законамъ погрѣшности» и къ скрытымъ парадоксамъ, «сильнымъ» и «тихимъ» (см. стр. 508 и 511), кои однако же разрушаютъ устойчивость подобно «каплѣ, долбящей камень не силою, но частымъ паденіемъ» и подобно скрытому холоду, проявляющему себя при растворенiи соли въ мокромъ льду.

Гражданская практика, по плодамъ оцѣнивая свободную причинность (скрытось въ себѣ работающихъ причинъ, тайну тверчества), ограничиваетъ и тормазитъ ее нормативными законами отвѣтственности на «худой конецъ», когда работа развертывается въ исторіи (малой и большой) массоваго процесса въ худшемъ смыслѣ, и поощряетъ ее преміями, наградами на хорошій (въ интересахъ жизни Цѣлаго) «конецъ», когда работа развивается въ лучшемъ смыслѣ *). Чистая и опытная графическая теорія направляетъ работоспособность массоваго процесса именно къ хорошему концу; направляетъ какъ матеріальными залогами, такъ равно и духовно, символически, графическою наукою духа, воспитаніемъ, включеніемъ личныхъ посредствующихъ мѣръ отъ имени арбитровъ и Суперарбитра («гдѣ двое или трое собраны во имя Мое, тамъ Я посреди нихъ») въ принципы общественности и правомѣрія.

Если допускать культъ частныхъ свободъ или свободныхъ причинъ (скрытость причинъ, тайну творчества), то это попущеніе должно быть неразлучно: 1) съ приложеніемъ къ обществу критическихъ испытующихъ мѣръ и графическихъ просвѣтительныхъ методовъ вѣроятности, т. е. условной достовѣрности, 2) съ основательнымъ школьнымъ народнымъ просвѣщеніемъ

*) См. нашу монографію: «Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности». Москва, 1902.—Отрицающіе свободную причинность, какъ Д. Ст. Милль, на практикѣ также ее допускаютъ; при этомъ взглядѣ надо ее допускать съ «хорошаго конца» и тормазить съ «худого конца».

и 3) съ организаціей прочныхъ учрежденій защиты, храненія и правомѣрія, запасающихъ на всѣхъ путяхъ историческаго процесса достаточныя основанія и средства (кассы силъ), способныя искупать погрѣшности свободъ за счетъ ихъ творческой полезности и повертывать колесницу исторіи въ данномъ положительномъ направленіи.

Осуждая старое кантіанство за пропускъ просвѣтительныхъ методовъ вѣроятности, мы не могли пропустить самаго важнаго вопроса о вѣроятностной или ирраціональной познаваемости ноумена, или скрытаго «истиннаго бытія», «вещи въ себѣ», въ своей неощутимой или неприступной сути. Каррикатурный, но за то легчайшій пояснительный примѣръ познаванія неприступной гипотетической причины приведенъ нами въ § 32, ч. II. Стоитъ только указанные въ этомъ примѣрѣ отряды «урнъ» замѣнить живыми сосудами, лицами, чтобы познавать аналогическими методами испытанія духовныя реаліи этихъ вещей въ себѣ; познавать это содержимое съ помощію вибрацій довѣрія, т. е. соціологическихъ эйектовъ В. Клиффорда (см. выше) и моихъ варіацій δp, доходя по мѣрѣ опытнаго накопленія варіацій δp до итога 0 или 1, обозначающаго достовѣрность истиннаго «нѣтъ» или «есть».

Трудно, вмѣстѣ съ Кантомъ, увѣровать, въ абсолютную непознаваемость истиннаго бытія. Легче вмѣстѣ съ Паскалемъ, Лапласомъ, Гербартомъ, Клиффордомъ, В. С. Соловьевымъ и Бугаевымъ, также вмѣстѣ съ славянофилами увѣровать, напротивъ, въ познаваемость истиннаго бытія, хотя и несовершенную, съ пробѣлами, перерывами, догадками, черезполосицей темноты и свѣта: „свѣтъ во тьмѣ свѣтитъ, и тьма не обнимаетъ его“. Умозрѣніе, какъ опытъ вѣрящаго разума, способно по *слѣдамъ* угадывать незримаго *Дѣятеля*.

Такъ какъ въ безконечныхъ свойствахъ безсмертнаго Существа, какъ абсолютно истиннаго бытія и волненія, все онтологически устойчивое, вѣчное, *сходится* само съ собою, тождественно себѣ и въ началѣ, и въ концѣ любого срока, то въ нашей онтологіи *первая* кантіанская антиномія *смыкается* съ четвертою по логическому и кинетическому закону абсолютнаго тожества $A = A$. Потому-то въ хорошо (точно) зарегистрированномъ огромномъ опытѣ жизни человѣчества истинное бытіе среди міра феноменовъ удостовѣрилось, какъ на положительныхъ путяхъ, такъ и на отрицательныхъ (при максимумѣ лжи и грѣха) путяхъ всемірной исторіи.

Въ четвертой антимоніи «Критики» Канта споръ идетъ уже не о научной «эврикѣ», а о религіозномъ озареніи вѣрою. Позади тезиса этой антиноміи разумѣется необходимое Существо, какъ *абсолютное* истинное бытіе, позади же антитезиса, по нашему разумѣнію, мыслится въ историческомъ процессѣ міровая ложь современной горе—цивилизаціи, вселенская, магическая власть кумировъ, напримѣръ, магическая власть вздутаго (бу-

магами и спекулятивными фикціями) символическаго золотого тельца (всемірнаго капитализма, мертвой міровой души). Чтобы ниспровергнуть магическую власть надъ людскими массами золотого кумира въ океанъ глупыхъ промышленныхъ иллюзій, нужно въ самой человѣческой культурѣ находить и поддерживать всѣ тѣ духовныя реаліи, животворящія достоинства, валюта которыхъ могла бы, опираясь на *абсолютныя* формулы права, на твердые абсолютные принципы, всегда и вездѣ покорять подъ ноги Цѣлаго, Всего, золотую валюту, какъ подчиненную идею—силу такъ называемаго *сложнаго обмѣна* (см. стр. 286) между каждыми *тремя* группами (I, II, III) такихъ субъековъ, кои отдѣльно обладаютъ въ избыткѣ наличными благами *a*, *b* и *c* и желаютъ ими размѣняться, но благо *a* субъекта I не нужно субъекту II, обладающему нужнымъ субъекту I благомъ *b*, а нужно субъекту III, благо *c* котораго субъектъ II согласился бы взять въ обмѣнъ на свое.

Катехизисъ мистическаго слова, начиная съ религіозно-политической догмы адвентистовъ-декабристовъ (см. у академика *Д. Мережковскаго*: «Не миръ, но мечъ», стр. 57—69), стремится премѣстить въ головахъ народной массы представленіе мертвой міровой души (историческаго ноуменальнаго Звѣря); онъ именуетъ Звѣремъ христіанское государство, а не всемірную магическую диктатуру гидры, мірового спрута, порабощаго народы на экономической почвѣ. Этотъ основной подмѣнъ понятій надо считать глубокою, поразительною ошибкою части публицистовъ—мыслителей. Эта странная самоубійственная догма чисто мистическая,жирондистско-анархическая; она, многообѣщающая, мститъ въ народной массѣ (т. е. своеобразнымъ закономъ большихъ людскихъ чиселъ) путь диктатуры и самодержавія для ставленниковъ мертвой міровой души, готовитъ могущество ей, а не природному истинному державству короны и народа; она своею ошибочною осанною и проклятіемъ готовитъ въ нашемъ тылу пораженіе нашего отечества; она намъ готовитъ участь Индіи, Персіи, Китая, Турціи, гдѣ въ сущности распоряжаются головы скользкой гидры.

Мистическое авторство подмѣняетъ *абсолютныя* формулы права; оно принадлежитъ, какъ извѣстно, языку, органу рѣчи, способному, какъ сказалъ одинъ мудрецъ, источать въ своей осаннѣ (восхваленіи) и проклятіяхъ, въ своихъ діалогахъ, въ своей діалектологической «двойной» игрѣ «горькую и сладкую воду», прикрашивать неправду, т. е. способному на колоссальные подлоги, клевету и извращеніе понятій. Это авторство, органически стремящееся овладѣвать плебсомъ, рисуя ему заманчивыя иллюзіи, необходимо сдѣлать подсуднымъ строгой всесторонней критикѣ, получающей свое питаніе изъ наиболѣе чистыхъ источниковъ вѣры, знанія и трудолюбія. Подъ свободами необходимъ фундаментъ закона, науки, религіи, испытанія на дѣлѣ и правомѣрія.

Геній В. С. Соловьева несомнѣнно понималъ глубину логики свободной причинности. Этою логикою онъ умѣлъ помирить христіанское государство, какъ психологически свободную причинность одного типа, и церковь, какъ свободную причинность другаго типа, работающаго въ другой, статически *ортогональной* графическо-психологической плоскости. Онъ понималъ *терпимость*, какъ *юридически* допустимый на разныхъ скалахъ, политически необходимый, такъ или иначе искупаемый *законъ погрѣшности*. Этому *юридическому злу* онъ готовъ былъ (слѣдуя нагорной проповѣди) подставлять (и подставлялъ) правую щеку, получивъ ударъ по лѣвой. Но вопреки Л. Н. Толстому, онъ ясно понималъ, что государство, матеріальный символъ гражданскаго юридизма и носитель физическаго меча, можетъ сдѣлаться символомъ и механическимъ орудіемъ не христіанскаго идеала, а, напротивъ, *ноуменальнаго звѣря*, внутренняго человѣкоубійцы, отца софистической лжи;—и, поэтому, онъ вмѣнялъ христіанскому государству въ прямую обязанность бороться физическимъ оружіемъ, силою съ одержимыми этою ноуменальною анархическою основою башибузуками (см. *В. С. Соловьева:* Три разговора). Въ вопросахъ о совмѣщеніи государства съ церковью геній В. С. Соловьева, очевидно, былъ солидаренъ съ геніемъ славянофильской исторической школы.

Но діады: церковь—государство не понимаютъ даже просвѣщенные люди, если они не владѣютъ глубиною логики свободной причинности. Напримѣръ, въ статьѣ: „Споръ Толстого и Соловьева о государствѣ“ проф. кн. Е. Н. Трубецкой вопреки Соловьеву говоритъ *): «Какова бы ни была *относительная* польза, приносимая государствомъ, совершенно очевидно, что оно несовмѣстимо съ *полнотою* обладанія Бога человѣкомъ». Но эта «полнота обладанія», скажемъ мы, противорѣчитъ тому, что Царствіе Божіе есть совершенно *свободный* союзъ между Богомъ и человѣкомъ, основанный не только на истинѣ, но и на достоинствѣ человѣка; истина свободы всегда ограничиваетъ полноту владѣнія. Можно говорить о духовной цѣльности (а не о полнотѣ) этого союза,—союза черезъ Слово истины, т. е. чрезъ посредствующую условность, какъ евангельски и соборно включенное Христово «Азъ» посреди христіанскаго міра, познающаго Бога главнымъ образомъ черезъ призму Слова (и «кому волитъ Сынъ открыть). Періодъ наиболѣе тѣснаго союза Бога и человѣка еще и не наступилъ на земномъ шарѣ, даже въ колыбеляхъ христіанства. Конечно, по этому союзу (завѣту) между Богомъ и человѣкомъ и теперь уже предъявляютъ христіанамъ векселя полностью; но это есть не болѣе, какъ старый изъѣзженный мистическій маневръ внутренняго софиста, предлагающаго давно предпочесть лукавство Царствію Божію.

Въ настоящей книгѣ мы намѣчаемъ (см. стр. 114—120) трехмѣрную конституціонную формулу АБВ, какъ статическій политико-ариѳметическій символъ *сродства элементовъ народности* къ залогамъ своего развитія, соединяющимъ *трижды—реально* (т. е. духовно, кровно и матеріально) три государственныхъ типа свободной причинности. Эта трилогія говоритъ о союзѣ (тріадѣ) А) вѣры, Б) научнаго знанія и В) гражданственности.

Эта формула соотвѣтствуетъ извѣстной славянофильской трилогіи, нами (мною и инжен. бар. М. Ф. Таубе) подвергнутой критическому строительно-научно-философскому обсужденію. Эта трилогія соотвѣтствуетъ трехстороннему, графически ортогональному (другъ къ другому) строю осей взаимоотношенія троякихъ нуждъ человѣческаго множества, познаваемыхъ по

*) Издательство «Путь». Сборникъ второй. О религіи Льва Толстого. Москва, 1912 г.

законамъ большихъ чиселъ (см. стр. 458—461); она же, говоря словами писанія, соотвѣтствуетъ «тремъ мѣрамъ муки», куда женщина положила «закваску, подобіе царства небеснаго». Государствованіе «закваски» въ каждой мѣрѣ «муки» есть *верховное служеніе* народной цѣлости. Но мистика стремится разъединить члены обсуждаемой славянофильской трилогіи.

Академикъ Д. Мережковскій неправильно называетъ критическій духъ славянофильства «рабскимъ бунтомъ противъ Европы» (*Д. Мережковскій*: Не миръ, но мечъ. Стр. 99). Эта неправда станетъ особенно ясною, если сблизить конституцію критики славянофильскаго любомудрія, изложенную въ книгѣ бар. М. Ф. Таубе: «Сводъ основныхъ законовъ мышленія» (Петроградъ, 1909), съ упомянутой выше конституціей философскаго критицизма, взятой нами у лучшей (недекадентской) части западныхъ мыслителей. Та и эта философская конституція сходятся, приводя къ той логикѣ русскихъ, французовъ, англичанъ, нѣмцевъ и итальянцевъ, которая учитываетъ въ каждомъ явленіи свободную причинность, но тутъ же включаетъ въ соотвѣтствующія сужденія (дедукціи, индукціи, эдукціи) законъ массовой погрѣшности и ея выкупъ въ кругломъ среднемъ счетѣ. Д. Мережковскій, типическій поклонникъ западныхъ формъ, при всѣхъ его талантахъ, къ несчастію, не владѣетъ именно условіями критики свободной причинности и попадаетъ въ извѣстные логическіе тупики только по нежеланію освоиться съ законами этой критики. Такими метафизическими и логическими ямами и тупиками переполнены сужденія почтеннаго академика о союзѣ брачномъ и дѣвствѣ, о самодержавіи, о діадѣ: церковь — государство и пр. Эти ямы критики Д. Мережковскаго тѣмъ болѣе прискорбны, что геній слова Д. Мережковскаго признаетъ Ноуменальную Троичность, т. е. самый важный абсолютный догматъ христіанской религіи и самую глубокую философскую первооснову множественно-свободной причинности. Въ аналогическія ямы и ошибки впадаетъ другой талантливый русскій писатель В. Розановъ, стремящійся проникнуть не только въ феномены, но и ноумены.

Россія богата талантливыми писателями, «*настоящаго града не имѣющими и грядущаго Града взыскующими*» (см. Д. Мережковскій). Пророчествуютъ ли они въ Духѣ истины? Пророчествовать среди міра смутныхъ явленій съ общею достовѣрностью, историческою и ноуменальною, могутъ не всѣ; могутъ только: частію 1) люди философской науки, опирающіеся на большой фактическій матеріалъ и на математико-статистическіе законы большихъ людскихъ чиселъ, и частію 2) аскеты, подвижники—пророки въ смыслѣ Пушкина и Лермонтова. Всѣ же остальные «пророки»—это только герои «Бѣсовъ» Достоевскаго; имя имъ — *Легіонъ*, но не въ смыслѣ идеи имперской арміи (какъ думаетъ Д. Мережковскій), а въ смыслѣ простого множества (сказано такъ: «легіонъ имя мнѣ, потому что

насъ много». Марк., гл. V, 10). Это множество соотвѣтствуетъ заблужденіямъ, дѣятельности такъ называемаго (въ трактатахъ по логикѣ) *внутренняго софиста* (см. стр. 147—150). Внутри человѣческаго сознанія бываетъ не только алтарь Царствія Божія, но и клоака внутренняго софиста.

Въ другомъ мѣстѣ Д. Мережковскій отождествляетъ апокалиптическаго Звѣря съ властью государства. Но правильнѣе подъ Звѣремъ разумѣть магическую власть спрута, гидры, символически изображаемой въ государственномъ гербѣ у подножія Георгія Побѣдоносца.

Единство сословій и классовъ народа, какъ предметъ самой первой земской духовно-политической, политико-экономической и біологической необходимости для того же народа, понимается нашей метафизикой въ смыслѣ общей для всѣхъ монархической кровли, во-первыхъ, мысленной (воздвигая въ храмѣ сознанія алтарь Отцу небесному) и, во-вторыхъ, бытовой, матеріальной, въ физическомъ лицѣ наслѣдственнаго Государя, освѣдомляемаго посредствомъ соборности и описательной статистики о нуждахъ народнаго быта. Строй монархіи легко понимается въ смыслѣ „истиннаго самодержавія“, конституція котораго опредѣлена памятною *абсолютною* формулой: „кесарево кесарю и божіе Богу“ и славянофильскою формулою: „народу мнѣніе, царю рѣшеніе“. Терминъ „истинное самодержавіе“, формулированный самимъ Государемъ въ манифестахъ и рескриптахъ 1903—1906 годовъ, расширявшихъ дифференціалы распыленной въ народѣ свободы, истолковывается точно, если не захотѣть лукавить (см. нашу книгу „Государство и Академія. Синтезъ авторитетныхъ сужденій меньшинства съ мнѣніями большинства“. Москва, 1905), особенно если установить понятія съ точки зрѣнія славянофильской философіи, подготовившей въ свое время также и крестьянскую реформу 1860 г. Свобода въ объемѣ maximum maximorum, неограниченная чѣмъ либо (по причинѣ предѣльности верха), непререкаемая, достаточная для того, чтобы и *на самомъ дѣлѣ* удержать правопорядокъ (см. стр. 111—114) и оказывать жизненно-необходимое сопротивленіе всякой политической партіи, заболѣвшей маніей величія, конечно, должна принадлежать вѣрою и историческою славою увѣнчанному Великому Государю съ Его правительствомъ, воинствомъ и верховнымъ правомъ избирать себѣ совѣтниковъ въ верхнюю палату, а въ нижней палатѣ дѣлать верховную „переоцѣнку цѣнностей“, т. е. перетасовывать неудачный личный составъ роспусками съ новыми выборами. Подобнымъ образомъ математикъ, встряхивающій урну съ укрытыми въ ней бѣлыми, черными, красными, зелеными и другими шарами, перемѣшиваетъ ихъ между собою и открываетъ себѣ возможность предъ новымъ испытаніемъ свойствъ урны уничтожить сложившуюся въ ней подтасовку съ интригами.

Считая многотипность, и, съ другой стороны, общественность, соборность, монархически связанную множественность исконными органическими явленіями истиннаго бытія, мы исходимъ изъ признанія на вѣру единотроичнаго Верховнаго Ноумена (Верховной Тріады). Эта вѣра лежитъ давно въ основѣ русскаго міросозерданія (см. рѣчи *Аф. В. Васильева* въ обществѣ Соборная Россія и см. бар. *М. Ф. Таубе*: Познаніевѣдѣніе по любомудрію славянофильства. С.-Петербургъ, 1912).

Водворяя въ свою Соціологическую Систему на первѣйшее мѣсто понятіе *нравственныхъ* абсолютовъ и реаловъ и отводя *утилитарнымъ* абсолютамъ и реаламъ (пользамъ) важное, но все-таки второе мѣсто, наша метафизика, конечно, раздвояетъ (поляризуетъ какъ бы магнетически) міровую духовность (см. мою статью «Московская философско-математическая школа»), и различаетъ въ человѣческой психологіи, во-первыхъ, *живую* общественную душу, закрѣпостившую себя абсолютамъ нравственной истины съ ея законными развѣтвленіями, и, во-вторыхъ, *мертвую* общественную душу, угасившую въ себѣ идеалъ истины, ползающую чревомъ по

землѣ, не поднимая глазъ къ небу Божьяго міра. Поэтому наша метафизика отрицательно относится къ парламентаризму Гегеля, не исключившему, посредствомъ абсолютныхъ конституціонныхъ формулъ, *мертвой* міровой души (апокалипсическаго Звѣря) изъ состава авторитетъ имѣющей соборности, составляемой изъ рядоваго простого народа и мудрѣйшихъ его людей (въ этой соборности жительствуетъ *живая* міровая душа), и поэтому фатально превращающему суды, парламенты и прессу въ орудіе именно мертвой міровой души, подмѣнящей истинныя понятія и представленія фальсификатомъ (см. стр. 359 и см. нашу книгу: „Государство и академія. Синтезъ авторитетныхъ сужденій меньшинства съ мнѣніями большинства. Москва“, 1905).

Искупительный (отъ множества естественныхъ человѣческихъ грѣховъ и отъ стихійныхъ «огневыхъ» народныхъ бѣдствій) всеспасающій и веспроникающій банкъ растетъ у государствъ, соблюдающихъ Слово *трижды реальной* истины по буквѣ и по внутреннему смыслу, и лопается какъ мыльный пузырь у государствъ, открывшихъ *формально*, *догматически* паразитамъ подпольно умнаго, систематически неискупаемаго грѣха «широкія ворота», отчего и фактическій мірской грѣхъ коптитъ чадомъ своимъ Небо, заставляетъ обиженныхъ вопіять къ нему, наконецъ накопляется свыше всякаго терпѣнія, до бурь, громовъ, молній, звѣздныхъ крушеній, до языческой мстительной Немезиды и до апокалипсическихъ переворотовъ.

Съ философско-религіозной точки зрѣнія, отъ которой зависитъ судъ совѣсти, наша метафизика одинаково отрицательно относится къ пантеистическому идеализму и, наоборотъ, къ исключительному монотеизму.

Три типа исконныхъ творческихъ, жизненно властныхъ (императивныхъ, авторитарныхъ) силовыхъ (энергетическихъ) и духовно мощныхъ (потенціальныхъ) началъ канонически (законоцѣлесообразно) сосуществуютъ, проявляются и работаютъ въ мірѣ: 1) отеческая природа (родящее начало), 2) оформливающее, проектирующее, проявляющее сыновнее (рождаемое) начало (крикъ рожденнаго, слово, разговоръ, письмо, графическое исчисленіе) и 3) вдохновляющая на дѣла, умная, умѣлая, смѣлая, дерзающая мысль (познаніе, воззрѣніе, свободная воля дѣйствовать и удерживать дѣйствіе, искусство, техника)—духовное начало.

Самая суть хронологической субъординаціи и философіи исторіи является не только въ актахъ естественнаго рожденія, но и воспитанія въ духѣ истины и въ такихъ графическихъ прагматическихъ выпускахъ (исходахъ) абсолютнаго обязательства, какъ древнее чудесное предписаніе въ формѣ *десятословія*; тутъ и условія земской эволюціи: «чти отца и мать...» и пр.; тутъ была узка лишь этнологическая скала (старый „израиль“, съ его національною замкнутостью въ себѣ и этической исключительностью).

Графическое проектирующее (во времени, скалахъ вѣроятности и пространствѣ) начало совершаетъ свое дѣло и въ умѣ, во внутреннемъ храмѣ сознанія (въ его памяти), и въ клѣткахъ головного мозга, и во внѣ, напримѣръ, на бумагѣ.

Соціологическіе эйекты (подсознательные для человѣка толчки) между человѣческимъ родомъ и Верховнымъ Существомъ переживаемы постоянно, не говоря о чрезвычайныхъ эйектахъ этого рода (Синай, Ѳаворъ, Голгофа). Вопреки Д. Мережковскому, вся Нуменальная Троичность («три странника», Троица Отецъ, Сынъ и Духъ), а не двѣ только Ипостаси (Отецъ и Сынъ) дѣйствуютъ въ подобныхъ явленіяхъ. Вопреки Д. Мережковскому, вторая Ипостась есть Царь, Учитель и Священникъ, а не Царь только и Священникъ; эта конституціонная недомолвка роковая, вытекающая изъ автоматической привычки къ логическому дуализму, портящая Призму (Бога—Слово), чрезъ которую мы познаемъ Троицу, и заслоняющая діаду: научное знаніе—вѣра.

Признавая неразрывную связь между истинной вѣрой и истиннымъ научнымъ знаніемъ за аксіому, проф. И. Т. Тарасовъ изъ отрицательныхъ примѣровъ исторіи вывелъ такое заключеніе: «какъ невѣжественная вѣра жгла вѣдьмъ и заточила Галилея, такъ безбожное знаніе изобрѣло политическія убійства и одѣло богиней проститутку» (См. проф. *И. Т. Тарасова*. Вѣра и знаніе. Изъ журнала «Свѣточъ» и «Дневникъ Писателя». Москва, 1912). Брюнетьеръ безъ сомнѣнія правъ, когда одну изъ наиболѣе крупныхъ заслугъ Канта видитъ въ томъ, что онъ и на себѣ самомъ, и своею философіей показалъ и доказалъ, что человѣкъ *науки*, рано или поздно, прямо или косвенно, но въ концѣ концовъ непремѣнно приходитъ къ *вѣрѣ* (прибавлю: къ вѣрѣ въ *абсолютные* твердые принципы истиннаго бытія и въ необходимость ихъ Существа (Бога) для жизни людей въ обществѣ, т. е. въ любви другъ къ другу по божескимъ заповѣдямъ). Всякій соціальный вопросъ въ концѣ концовъ сводится къ нравственному, а всякій нравственный вопросъ, въ сущности своей, есть вопросъ религіозный (прибавлю: закрѣпощающій человѣка прямо или косвенно, теперь или въ отдаленномъ срокѣ абсолютнымъ твердымъ принципамъ сосуществованія и послѣдовательности).

Знаніе себя, какъ члена государства и общества, и вѣра въ Бога силы, абсолютной истины, добра и красоты—это два спутника исторіи человѣческой мысли, кои легко причиняютъ несносную боль и катастрофы человѣческому массиву, если враждуютъ между собою, а при согласіи культивируютъ удачно въ человѣческой средѣ разные счастливые плоды, т. е. по истинѣ хорошіе образцы, типы людей и человѣческихъ достоинствъ.

«*Знаніе безъ вѣры*—говоритъ И. Т. Тарасовъ—*не даетъ просвѣщенія*. Не давая идеаловъ, оно неизбѣжно ведетъ къ матеріализму и превращаетъ человѣка, какъ выражается Чичеринъ, въ исключительно внизъ смотрящее существо. Знаменитый педагогъ Каменскій говоритъ: изучайте окружающую васъ природу и самихъ себя, но не забывайте, что вѣра наставляетъ разумъ! Воспитывайте дѣтей вашихъ не только для настоящей, но и для будущей жизни. Только истинно просвѣщенный человѣкъ понимаетъ, что душа его возвышается, когда онъ устремляетъ свои взоры на общее, всеобъемлющее, вѣчное; напротивъ, кругозоръ его суживается и душевныя силы слабѣютъ, когда онъ вращается исключительно въ области частностей. Нисходя съ неба на землю, человѣкъ понижаетъ уровень своего умственнаго и нравственнаго развитія, и глаза его обращаются къ утробѣ; поднимая же глаза къ безконечному, абсолютному, человѣкъ не отлетаетъ отъ земли, не уносится въ невидимую область, а, оставаясь на землѣ, пользуется ея благами съ сознаніемъ связи между высшимъ и низшимъ, небеснымъ и земнымъ. Какъ только мы обратимъ свой взоръ на прошедшее и будущее, какъ только мы изъ

области темныхъ силъ возвысимся до свѣтлой области разума и вѣры, такъ мы становимся гражданами другого, высшаго міра, мы примыкаемъ къ безконечному и въ немъ находимъ себѣ опору и руководство. Словомъ: человѣкъ настолько человѣкъ, насколько онъ возвышается отъ конечнаго къ безконечному, отъ относительнаго къ абсолютному; а очевидная истина эта доступна только истинно-образованному, *просвѣщенному* человѣку, который, постигнувъ и немощь и силу мудрости всѣхъ вѣковъ и взвѣсивъ, какими непреодолимыми препятствіями окружена наша жизнь, понимаетъ, какое безуміе надѣятся удовлетворить нашу безконечную душу дарами конечнаго міра. Такой человѣкъ не станетъ—какъ одни—оправдывать ложь, на томъ-де основаніи, что существуютъ нелѣпые и произвольные законы; онъ не станетъ—какъ другіе—возводить кражу въ принципъ справедливости, на томъ-де основаніи, что существуетъ необходимость. Оправдывая ложь и кражу, можно оправдать и убійство, столь отвратительное во всякой формѣ; а кому же поручить составленіе прейскуранта мотивовъ, отъ которыхъ всякая гнусность можетъ превратиться чуть ли не въ добродѣтель...

«Въ нашемъ «я» должно искать истинныхъ мотивовъ общественнаго движенія; слѣдовательно, если это «я» живетъ и развивается при дурныхъ условіяхъ, то будетъ дурно и всему обществу. Личность безъ сознанія долга и отвѣтственности, безъ чувства свободы, пассивно равнодушная и самодовольная, это ли личность, это ли образъ Божій, состоящій въ правдѣ и преподобіи истины, какъ говоритъ Апостолъ? У нея нѣтъ точки опоры внѣ данныхъ явленій; она ничего не можетъ противопоставить теченію вещей, куда бы ни шло это теченіе; она падаетъ со своей духовной высоты, становится песчинкой въ общей массѣ песку и носится изъ стороны въ сторону безъ сознанія цѣли и основаній. Очевидно, что въ обществѣ, состоящемъ изъ такихъ личностей, ложь и отсутствіе идеаловъ дѣлаются послѣднимъ словомъ его развитія; всѣ дѣйствія находятъ себѣ санкцію исключительно лишь въ цѣлесообразности.

«Въ Россіи рознь между вѣрой и знаніемъ, проникнувъ въ отдѣльные классы общества, не коснулась еще всего народа, въ которомъ, какъ въ единомъ цѣломъ, вѣра и знаніе существуютъ совмѣсто безъ борьбы. Знаніе, составивъ преимущественное достояніе однихъ, такъ называемыхъ, культурныхъ классовъ, устранило или исказило въ нихъ вѣру; вѣра же, составляя драгоцѣннѣйшее достояніе нашего народа, одна не могла дать ему знанія... А если это такъ, то есть, слѣдовательно, и исходъ. *Подьлитесь съ народомъ вашими знаніями, а онъ научитъ васъ вѣрѣ.* Такъ соединимся же вмѣстѣ; составимъ одну душу въ одномъ тѣлѣ; будемъ не только знать, но и вѣрить, и не врозь, а вмѣстѣ съ

народомъ,—и тогда воспрянетъ великая душа въ великомъ тѣлѣ нашей родины ко благу не только нашему, но и всѣхъ братьевъ нашихъ, т. е. всего человѣчества. И тутъ все дѣло лишь въ прозрѣніи».

Что такое вселенская христіанская идея съ точки зрѣнія метафизики, какъ истинной науки? Эта преемственная идея—есть широко раскинутый человѣколюбивый законъ большихъ людскихъ чиселъ, надежно охватывающій абсолютными формальными принципами вѣры и любви, производящими функціями и опытами вѣроятности сплоченный и оберегаемый домъ не «стараго», а «новаго израиля», т. е. всѣ народы, имѣющіе «душу живую», желающіе и умѣющіе вѣровать явленнымъ принципамъ абсолютной истинной реальности и той народной свободы, которой поставлены необходимыя нравственныя, граждански бытовыя и помѣстныя границы.

Въ дѣлѣ культивированія людей и надежнаго соединенія ихъ законностію на принципахъ вѣры, знанія и опытной свободной причинности имѣютъ основное просвѣтительное значеніе мѣры, поддерживающія въ умахъ два координирующихъ сознаніе неба: физическое (космическій порядокъ, законы природы и польза) и спиритуалистическое (надежный и спасительный нравственный міропорядокъ, нормативные законы духа неумирающихъ собирательныхъ лицъ.

Христіанскій Логосъ соединилъ въ людской психологіи эти два неба, заключилъ обновленный союзъ между двумя мірами. То и другое небо покрываетъ реальности. Мысль, не имѣющая ни въ прямомъ обладаніи, ни впереди себя никакой количественной реальности (низшей или наивной, ни высшей духовной) есть пустой нигилизмъ, ирреализмъ, та формально-логическая и формально-геометрическая пустота пустотъ (буддійская нирвана), которой, какъ говорили схоластики, природа боится и въ которую мы попадаемъ лишь по бредовой ошибкѣ (иллюзіонизмъ).

Стѣна, воздвигнутая догматическими очками старо-кантіанской философіи между ноуменомъ и феноменомъ, между чувственнымъ знаніемъ и вѣрою, все болѣе и болѣе рушится отъ просвѣщенія и замѣняется тонкою переборкой, всегда остающейся подъ видомъ *тѣни* спасительнаго сомнѣнія, направленнаго противъ ложной мистики и будящаго духъ изслѣдованія. Эта тонкая перегородка полезна и для программнаго соединенія и раздѣленія функцій между факультетами, а также въ практикѣ между корпораціями, служащими единому дѣлу человѣческой культуры, внутренней и внѣшней. *Радикальный* дуализмъ вѣры и знанія есть дурной, раздорный, вздорный пережитокъ реформаторской мысли XVIII и XIX вѣковъ. Схоластическая формула: «Phylosophia est rerum humanarum divinarumque scientia» не потеряла своего великаго значенія. Точно такой же

нездоровый пережитокъ реформистской мысли XVII, XVIII и XIX вѣковъ представляется мистическимъ масонскимъ адвентистскимъ ученіемъ о радикальномъ и будто бы непримѣрно враждебномъ дуализмѣ религіозной общественности (церкви) и гражданской общественности (государства).

Наша метафизика, повторяемъ, основана на ученіи о евангельской «закваскѣ въ трехъ мѣрахъ муки», о тріединствѣ истинныхъ абсолютныхъ принциповъ: 1) популярные, педагогическимъ и соборнымъ авторитетомъ для народа упрощенные, догматическіе принципы вѣры, сразу поднимающіе повѣрившую наивную мысль на безконечную высоту, 2) критическіе принципы научнаго знанія и опыта, 3) принципы практическіе гражданской государственности.

Мы полагаемъ, что всѣ черезчуръ упрощенныя популярныя фидеистическія или мистическія (см. у И. И. Лапшина) рѣшенія проблемы „чужого я“, напр., упрощенныя монистическія интерполяціи между „многими я“, принятыя безъ надлежащихъ ограниченій, навязываютъ человѣку тотъ или другой нравственный мезаліансъ, худое бракосочетаніе живой души (реалія, искры Божіей) съ мертвыми душами Иной послѣдовательно проведенный мистическій (фидеистическій) монизмъ хуже, чѣмъ безполезенъ для этической теоріи,—независимоотъ того, будетъ ли онъ коммунистическо-идеалистическій, какъ у Спинозы, Фехнера, или коммунистическо-матеріалистическій, какъ у Карла Маркса.

Такъ, идеалистическій монизмъ Фехнера одушевляетъ всю природу, планеты, атомы и пр.; онъ все сваливаетъ въ одну кучу или безличную пантеистическую коммуну, чего допустить нельзя во имя личныхъ достоинствъ субъекта; живыя души (реаліи) въ смыслѣ Гербарта, Хомякова, Бугаева неравноцѣнны мертвымъ душамъ хотя бы въ человѣческомъ образѣ. Это не значитъ, что мертвыя души въ образѣ людей уже погибли; подъ дѣйствіемъ лучей живительнаго просвѣщенія они могутъ и ожить... Напротивъ, устойчивое дыханіе (гнилой эйектъ) мертвящей мистики, исходящей изъ диктаторскихъ средоточій мертвой міровой души (см. В. С. Соловьева: „Три разговора“), можетъ колеблющихся безнадежно погубитъ, какъ бѣсовъ и башибузуковъ.

Обходя подводные камни безбрежнаго буддійскаго пустыннаго, ирреальнаго монизма, мы (я и бар. М. Ф. Таубе) предлагаемъ пользоваться воззрѣніемъ, различающимъ степени одушевленія существъ въ ихъ ряду или іерархіи соотвѣтственно терминамъ: душа и духъ, психологизмъ и пневмалогизмъ (спиритуализмъ), и не надѣляя спиритуализмомъ, одухотвореніемъ, существъ ниже даннаго предѣла въ этомъ ряду, а также не надѣляя одушевленіемъ мертвой матеріи, стоящей ниже всѣхъ живыхъ одушевленныхъ существъ.

На землѣ лишь человѣкъ не только одушевленъ, но и одухотворенъ (что выражается способностью человѣка мыслить бозконечности разной природы, кои нельзя взять наощупь, и графически изображать безконечное въ связи съ конечнымъ существованіемъ). Стоящія же ниже человѣка одушевленныя существа не одухотворены; они *рабы* человѣка—гражданина; одухотворенный человѣкъ есть *владыка* одушевленныхъ и неодушевленныхъ предметовъ земли. Объективная справедливость должна исключать изъ практики лишь рабство человѣка человѣку, допускавшееся однако римскимъ правомъ и средневѣковымъ, пережитки котораго оставались до середины XIX вѣка. Монизмъ въ людяхъ надлежитъ понимать какъ земскій монархическій принципъ, съ признаніемъ народнаго права выражать свое статистически сосчитываемое мнѣніе и съ *абсолютною* религіозно-политическою формулою: „кесарево—кесарю, Божіе—Богу“.

ТЕОРІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

«Философу нужно считаться съ вѣроятностью такъ же, какъ и съ достовѣрностью» (Н. В. Бугаевъ: Математика и научно-философское міросозерцаніе).

«Капиталъ есть не золото, а довѣріе» (Д. И. Менделѣевъ: Къ познанію Россіи).

«Вѣра безъ дѣлъ мертва».

Вѣроятность, какъ воззрѣніе, входитъ въ жизнь мысли. Теорія вѣроятностей есть одна изъ цѣннѣйшихъ вѣтвей математики, дисциплинирующая мышленіе въ примѣненіи къ наиболѣе труднымъ положеніямъ, когда умъ старается приложить выработанное міросозерцаніе или какую-нибудь отдѣльную его часть (спеціальную область вѣдѣнія) даже къ такимъ фактамъ, кои еще не получили полнаго освѣщенія или зависятъ отъ игры случайности. Она владѣетъ наблюденіемъ, испытаніемъ природы и общества и увѣрованіемъ и ставитъ жизненные интересные общественные опыты познаванія, довѣрія, сомнѣнія и отрицанія на почву математическихъ теорій и фактическаго контроля явленій, планомѣрно сличающаго смѣтныя ожиданія съ дѣйствительностью и дающаго номограммы явленій.

Теорія вѣроятностей является общею номографическою основною наукою, координирующею соотношеніе субъекта и объекта и связывающею одинаковымъ методомъ и однообразною группою теоремъ и діаграмъ множество различныхъ ученій съ фактами и практическими интересами.

Эта теорія, завершающая собою остальныя части математики и индуктивнаго научнаго метода, разсматривается въ настоящей книгѣ какъ часть теоріи познанія и какъ основа практической дѣятельности. Получивъ свое начало

отъ Декарта, Паскаля, Граунта, Лейбница и Зюссмильха, она въ послѣднее время значительно подкрѣпилась и завоевала себѣ прочное положеніе въ опытныхъ и прикладныхъ наукахъ, политическихъ, общественныхъ и естественныхъ.

Теоретическія основы довѣрія безъ практики и опытовъ мертвы. Поэтому, излагая здѣсь главнымъ образомъ теорію, мы однако же въ главныхъ чертахъ касаемся связи ея съ опытами математическаго естествознанія и математической статистики и съ опытами общественнаго кредита и экономій.

Въ настоящей книгѣ изложеніе теоріи вѣроятностей распадается на три части.

Первая часть—вводная, объясняющая обобщающую способность математическаго метода и значеніе теоріи и практики вѣроятностей для правильнаго формулированія законовъ случайности и законовъ мысли, а также для экономическаго исчисленія возможныхъ и производимыхъ будущихъ цѣнностей и для изслѣдованій въ области наукъ политическихъ, общественныхъ и естественныхъ *). Въ первую же часть книги включены тѣ таблицы, ряды, уравненія и вспомогательныя формулы математическаго анализа, числовой геометріи, числовой алгебры и теоріи производящихъ функцій, кои нужны для номографическихъ цыфровыхъ картинъ и для выводовъ въ дальнѣйшихъ частяхъ книги.

Вторая часть **) содержитъ элементарный курсъ теоріи вѣроятностей, исчерпывающій все ея общее содержаніе и доступный широкому кругу лицъ, обязанныхъ доходить до умѣнья считаться съ испытаніями и наблюденіями, съ законами сложныхъ явленій, средними нормами, исправленіями погрѣшности наблюденій и страховымъ и меліораціоннымъ методомъ теоріи вѣроятностей.

Въ третьей части къ изслѣдованію вѣроятностныхъ функцій прилагается аналитическая теорія производящихъ функцій въ формѣ Коши, употребленная мною ранѣе въ монографіи: „Новыя основанія ученія о вѣроятностяхъ суммъ и среднихъ величинъ“ (Москва, 1902). Вмѣстѣ съ тѣмъ кратко излагается установленное мною въ монографіи: „Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты“ (С.-Петербургъ, 1910) варіаціонное исчисленіе, соотвѣтствующее развертыванію благопріятствующихъ и рѣшающихъ фактовъ и обосновывающее технику сличенія смѣтъ съ наступающею позже фактическою дѣйствительностью и отчетностью.

*) Первую часть полезно прочитать дважды: до и послѣ прочтенія второй части. При первомъ чтеніи первой части многое относящееся къ закону большихъ чиселъ нужно будетъ принять на вѣру.

**) Вторая часть составлена такъ, что ее можно читать совершенно независимо отъ первой; она воспроизводитъ первое изданіе настоящей книги.

Скажемъ еще, что научная формулировка выводовъ изъ результатовъ какъ пассивнаго наблюденія, такъ и опыта (эксперимента) и поднятіе прозорливости среди случайностей возможны лишь при участіи методовъ, заповѣдей, записей и подсчетовъ теоріи вѣроятностей.

Командующее положеніе государственнаго страхованія и кредита народному творчеству и торговаго кредита въ экономической жизни народовъ заставляетъ нынѣ изучать самымъ тщательнымъ образомъ сочетательные и раздѣлительные, номографическіе и идіографическіе методы теоріи и практики вѣроятностей.

Предписанныя законодательной волею для постояннаго употребленія въ учрежденіяхъ, хорошія нормальныя таблицы (номограммы) математическихъ вѣроятностей перемѣнныхъ величинъ, выведенныя путемъ научно поставленнаго испытанія способностей общества, удачно перестраиваютъ вѣроятностныя соотношенія субъектовъ къ объектамъ, улучшаютъ формулу и правила той естественной міровой урны, изъ которой людямъ выпадаютъ тѣ или другія долевыя жребіи въ игрѣ міровой случайности. Наблюденіями, испытаніями и поправками преобразуются, реформируются къ лучшему относительныя человѣкотворныя достовѣрности, стремясь къ божески-объективнымъ достовѣрностямъ.

Математическая теорія вѣроятностей стремится поднять языкъ народа на степень математическаго языка, который ведетъ къ цѣлямъ порядка, справедливости и общаго блага наиболѣе прямо и съ наименьшими иллюзіями ожиданія.

Часть I.

Законы случайности, законы мышленія и вѣроятность. Вспомогательныя математическія формулы.

ГЛАВА I.

Числовая мѣра произвольныхъ и смутно опредѣленныхъ, загадочныхъ величинъ. Скалы и среднія мѣры измѣнчивыхъ способностей и интересовъ человѣка. Законы мысли. Категорическія сужденія. Классификація функцій. Аналогіи. Фактическая власть при мысленномъ владѣніи, аналогическомъ матеріальному.

---

§ 1_1. Порядокъ и пертурбаціи или игра случайности. Отношеніе математики и математической теоріи вѣроятностей къ произвольнымъ и смутно опредѣленнымъ величинамъ, къ игрѣ случая и къ положенію сознанія въ массовыхъ случайностяхъ.

Число есть иногда количественный, иногда порядковый терминъ, предполагающій координатныя скалы для исчисленія. Математика, какъ стройная наука чиселъ, обыкновенныхъ и алгебраически составныхъ (комплексныхъ), изучаетъ не только *величины*, но и *порядокъ*, какъ важнѣйшее изъ условій развитія міросданія, вносящее въ міръ стройность и гармонію.

Математика, которую можно бы назвать матерью всѣхъ наукъ, на каждомъ шагу встрѣчается въ приложеніи къ дѣйствительности съ неточными сказаніями и вычисленіями и съ произвольными величинами, умѣренными и неограниченными (безмѣрно большими и безмѣрно малыми).

Произвольную величину, одномѣрную (какъ линія), отсчитываемую по данной скалѣ и содержащуюся въ границахъ между a и b, ниже мы обозначимъ символомъ (a, b).

Въ переходныхъ состояніяхъ числоваго опредѣленія произвольное ко-

личество можетъ имѣть характеръ неизвѣстной, загадочной, *смутно-опредѣленной* величины. Такъ, продолжительность (a, b) жизни человѣка отъ момента $\tau = a$ его рожденія до момента $\tau = b$ его смерти есть смутно опредѣленное, заранѣе неизвѣстное количество, выясняющееся окончательно лишь *заднимъ числомъ*, послѣ его смерти, когда *фактъ* совершился, и можно говорить лишь о причинѣ смерти и о вмѣненіи, если причина смерти лежитъ въ чьей-либо волѣ или небрежности.

Въ выпускахъ и тиражахъ біологіи, въ прибыли, убыли и въ чистомъ приростѣ живыхъ царствъ природы развивается послѣдовательная «игра» жизненнаго случая, «интрига», въ которой смутное перемѣшано съ относительно достовѣрнымъ и съ абсолютно достовѣрнымъ, неизбѣжнымъ.

«Игра» случая вкрапливается также въ рѣчь, въ выпуски и тиражи обязательствъ, въ документы и договоры, въ судебные приговоры, въ разные вопросы политики, гражданскаго оборота, въ частныя правовыя отношенія индивидуумовъ другъ къ другу и къ коллективнымъ юридическимъ лицамъ, какъ организованныя общества, государства, и вообще къ міру.

Воинскую повинность мужское населеніе отправляетъ по жребію, т. е. въ зависимости отъ чисто лоттерейной случайности.

Однимъ словомъ, «игра» случая, пертурбація вкрадывается во множество важныхъ нравственныхъ и матеріальныхъ жизненныхъ интересовъ человѣка и человѣческихъ общежитій на земномъ шарѣ.

Она очень часто береть верхъ надъ многими человѣческими, казалось бы, достовѣрными предположеніями; что и выработало въ человѣкѣ особое чувство мѣры въ области вѣроятностныхъ сужденій, выработало методъ познанія, нормирующій въ жизни довѣріе, сомнѣніе и отрицаніе. Жить—это значитъ вѣрить, сомнѣваться, отрицать.

Возможность и частость наступленія случайнаго явленія A измѣряютъ числовою вѣроятностью p, которая, какъ разъяснено въ части II, представляется вообще количествомъ (0,1), т. е. удовлетворяетъ неравенствамъ:

$$0 < p < 1.$$

Количество (0,1) Н. В. Бугаевъ въ своей числовой алгебрѣ называетъ *произвольною единицею* *).

Частныя, *опредѣленныя* количественныя значенія вѣроятности p, исчисляются точными способами Теоріи Вѣроятностей и Математической Статистики, по строгомъ взвѣшиваніи всѣхъ достаточныхъ основаній и возможностей (силъ, статочностей, потенціаловъ), дѣйствующихъ въ данной средѣ при данныхъ условіяхъ.

*) *Н. В. Бугаевъ*: 1) Вопросы числовой алгебры (Математическій Сборникъ, т. III, Москва) и 2) Геометрія произвольныхъ величинъ (Математическій Сборникъ, т. XIV).

Вѣроятность $p = (0,1)$ какой-либо совокупности явленій переходитъ въ абсолютную достовѣрность утвержденія этой совокупности при $p = 1$ и въ абсолютную достовѣрность ея отрицанія при $p = 0$. Достовѣрности того и другого рода, слѣдовательно, суть крайніе предѣлы 1 и 0 вѣроятности p, какъ графическаго *континуума*, изображеннаго въ видѣ геометрическаго перемѣннаго и убывающаго отъ 1 до 0. Если p весьма близко либо къ 1, либо къ 0, то эти значенія перемѣннаго p называются соотвѣтственно приблизительными (или относительными) достовѣрностями либо утвержденія, либо отрицанія; эти достовѣрности не суть абсолютныя; онѣ и вообще значенія вѣроятности p, не достигающія предѣловъ 0 и 1, не ведутъ еще къ категорическому утвержденію или къ категорическому отрицанію осуществленія или воплощенія въ фактѣ мыслимой возможности явленій, но вызываютъ соотвѣтствующія мысленныя переживанія.

Наиболѣе *нерѣшительное состояніе* психологическаго переживанія имѣетъ мѣсто при $p = \frac{1}{2}$, когда мысль бываетъ уравновѣшена такъ, что умъ не склоняется ни въ сторону утвержденія, ни въ сторону отрицанія, какъ это бываетъ при ожиданіи того или другого явленія въ извѣстной игрѣ «орелъ или рѣшетка». При $p > \frac{1}{2}$ вѣроятность p склоняетъ нашу психологію скорѣе къ утвержденію, нежели къ отрицанію, а при $p < \frac{1}{2}$ наоборотъ.

Если совокупность всѣхъ согласованныхъ другъ съ другомъ различныхъ графическихъ континуумовъ назовемъ *аналитическимъ пространствомъ*, то въ этомъ воображаемомъ пространствѣ вѣроятность $p = (0,1)$ представляетъ собою спеціальную графическую координату. Теорія вѣроятностей, какъ психологическое воззрѣніе, касаясь геометрически координированныхъ физически мыслимыхъ явленій, еще разъ метагеометрически координируетъ измѣреніемъ p способность воплощенія ихъ, какъ идей—ожиданій, въ фактѣ. Ея графическая координата является въ соотношеніи субъекта къ объекту особымъ, какъ бы «четвертымъ» измѣреніемъ p.

1_2. Ошибка Юма и Канта относительно всеобщности паритета. Истинная оцѣнка предмета вѣроятнаго владѣнія въ отношеніи къ матеріальному владѣнію.

До установки методовъ и теоремъ математической теоріи вѣроятностей философы не всегда умѣли правильно цѣнить появленіе еще несуществующей вещи. Такъ, Кантъ вслѣдъ за Юмомъ утверждалъ, что предикатъ существованія ничего не прибавляетъ къ вещи, что «сто дѣй-

ствительныхъ талеровъ содержитъ въ себѣ ничуть не больше, чѣмъ сто возможныхъ». Теорія вѣроятностей съ этимъ не согласна; она, принципіально на основаніи теоремы Я. Бернулли, а практически въ согласіи со взглядомъ вексельныхъ рынковъ, оцѣниваетъ, при обмѣнѣ, сто возможныхъ талеровъ произведеніемъ $100 \cdot p$, гдѣ p есть вѣроятность дѣйствительно получить сто талеровъ. Едва ли при нормальныхъ условіяхъ сознанія кто-либо повѣритъ, что журавль въ небѣ стоитъ то же, что журавль въ рукахъ. Синица въ рукахъ стоитъ дороже журавля въ небѣ.

Не только въ рыночной куплѣ-продажѣ предметовъ возможнаго владѣнія, но и въ другихъ случаяхъ, напримѣръ, при политическомъ и при юридическомъ мирномъ разрѣшеніи споровъ приходится ставить вопросъ, какъ оцѣнивать укрѣпляемые гражданскимъ актомъ (напримѣръ, векселемъ) предметы возможнаго владѣнія въ отношеніи къ матеріальному владѣнію. Теорія вѣроятностей, отвѣчая на этотъ вопросъ, устанавливаетъ аксіому, оцѣнивающую приходо-расходный предметъ A возможнаго (будущаго) владѣнія наличною величиною (современною стоимостью) въ размѣрѣ $A.\ p$. Этотъ твердый, принципъ обмѣна хорошо объясняется для всякой среды массовыхъ фактовъ, приходящихъ и уходящихъ, съ помощію теоремы Я. Бернулли. Лишь при $p = 1$ наступаетъ паритетъ (равенство) $Ap = A$. Игнорированіе этого принципа создаетъ множество соціальныхъ недоразумѣній, начатыхъ въ теоріи Юмомъ, продолженныхъ Кантомъ, Ог. Контомъ, Ст. Миллемъ, К. Марксомъ и другими.

Въ судьбахъ исторіи человѣческихъ множествъ если не самъ человѣкъ въ его духовной сути, то его трудоспособность, мускульная и нервная, учитывается, какъ вѣроятная приходо-расходная вещь A, болѣе или менѣе цѣнная.

Вѣроятностью p гносеологически взвѣшивается *предубѣжденіе реальности* (нѣчто вродѣ предразсудка, имѣющаго однакоже достаточное основаніе), аналогически оцѣниваемое какъ настоящая реальность, но съ *учетомъ* на нѣсколько процентовъ противъ номинальной реальности. Этотъ процентный учетъ признается юриспруденціей, нормируется въ извѣстныхъ предѣлахъ закономъ и договоромъ и позволяетъ выкупать въ кредитномъ порядкѣ будущее за счетъ матеріальнаго настоящаго и настоящее за счетъ матеріальнаго будущаго; въ этомъ принципѣ кредитныхъ операцій дано основаніе въ порядкѣ времени побѣждать худое время (кризисы) хорошимъ. Этой цѣли служатъ кредитныя и кооперативныя національно-государственныя учрежденія, дѣйствующія въ народныхъ массахъ, помогая нанакопленію ихъ достатка, и ведущія борьбу съ ростовщиками.

Хорошо нормированное и согласованное съ проявленными творческими способностями людей построеніе кредитныхъ учрежденій, поддерживая предпріятія, устраивая въ нихъ живыя работающія силы и застраховывая отъ кризисовъ, является въ обычной злободневной промышленности фундаментомъ амортизаціи основныхъ источниковъ народнаго богатства и трудового удовлетворенія неотложныхъ нуждъ. Эту мысль Д. И. Менделѣевъ картинно выразилъ словами: «капиталъ есть не золото, а довѣріе» («Къ познанію Россіи»).

§ 2. Законы случайности. Погрѣшности и учрежденія поправки.

Бертранъ, отстаивая самый терминъ «законы случайности» (les lois du hasard), кажущійся на первый взглядъ парадоксальнымъ, оправдываетъ эту терминологію слѣдующею рѣчью: «Какъ смѣть — спрашиваетъ онъ—говорить о законахъ случайности? Случайность не есть ли противоположность всякаго закона? Отвергая это опредѣленіе — продолжаетъ онъ—я не предложу никакого другого опредѣленія. О предметѣ, смутно опредѣленномъ, можно говорить безъ двусмысленности. Должно ли отвлекать химика отъ его печей, чтобы установить сущность матеріи? Можно ли начинать изученіе преобразованія силы опредѣленіемъ электричества?» (*J. Bertrand*: Calcul des probabilités. Paris. 1888).

Образованіе русскаго слова «законъ» отъ корня «конъ», (т. е. мѣсто игры, состязанія, соревнованія, случайности) показываетъ, что именно законъ долженъ говорить безъ двусмысленности о нормахъ игры случайности. Законы случайности суть *особыя* экспериментальныя эволюціонныя теоріи, истолковывающія на почвѣ догадки и опытной науки развитіе формъ и силъ міровой жизни и предусматривающія ограниченіе отрицательныхъ явленій, зависящихъ отъ пертурбаціонныхъ причинъ.

Нужда въ закономѣрности и фактическомъ освѣщеніи бываетъ именно тамъ, гдѣ развивается жизнь, пертрубація, «интрига» природы, соревнованіе, коллизія сталкивающихся причинъ и возможность возобладанія лишь одной группы причинъ, когда другая группа уже не можетъ имѣть значенія.

Вообще вся чрезвычайно разнообразная космическая «игра» случайности, постоянно наблюдаемая въ жизненномъ процессѣ и полная романовъ, драмъ, трагедій и комедій, если и выводится до нѣкоторой степени общими силами по пути отъ худа къ добру, выправляется, искупается отъ погрѣшностей, то помощью хорошо и широко организованныхъ учрежденій права, справедливости.

Въ параллель съ законами случайности разсматриваются въ дѣйствіяхъ «законы погрѣшностей», какъ случайныхъ, такъ и систематическихъ; разсматриваются съ практическими цѣлями поправки ихъ съ помощію учрежденій защиты и застрахованія отъ нихъ, когда матеріальный итогъ ошибокъ получаетъ угрожающій размѣръ.

Самое понятіе права нужно истолковывать какъ противоположеніе погрѣшностямъ; огонь погрѣшностей систематически, планомѣрно погашается правосудіемъ.

Законы соціальныхъ тѣлъ цѣнятся подобно прочнымъ костюмамъ, покрывающимъ и защищающимъ тѣло человѣка; хороши тѣ соціальные законы и ихъ надежные институты права, кои выкроены по мѣркѣ этого тѣла, чтобы хорошо покрывать его и защищать отъ неногоды всѣ точки тѣла.

Законы предполагаютъ установленный планъ, порядокъ, проективную теорію и мѣры «числовой геометріи» (науки земскаго распорядка, противополагаемаго пертурбаціи), которыми измѣряются вещи и координируются соотношенія между ними.

§ 3. Способность человѣка изъ данной среды, колеблющаяся около средняго типа. Значеніе математическаго ученія о среднихъ и объ уклоненіи отъ центра среднихъ. Школа. Историческая эволюція среды.

Кетле въ своихъ «Recherches statistiques» говоритъ: «когда численное выраженіе предмета можетъ измѣняться, тогда можно согласиться выбрать его среднее значеніе, чтобы образовать общую идею его величины»; а немного ниже онъ позаботился присоединить, что умѣстно при этомъ разсматривать для перемѣннаго массивнаго явленія два предѣла, одинъ низшій и другой высшій относительно средняго. Примѣчательная идея Кетле была имъ неудачно примѣнена къ фактамъ *).

Но нынѣ вѣроятностная теорія среднихъ получила другую формулировку; она перестроена на основаніи истинъ мемуара Чебышева «О среднихъ величинахъ». Смѣтное исчисленіе итожнаго массивнаго факта, колеблющагося около итога вѣроятностныхъ среднихъ (математическихъ ожиданій) и, съ другой стороны, контрольно-ревизіонное исчисленіе фактическаго итога по наблюденіямъ — привязываютъ ожидаемые и регистрируемые массивные феномены къ *достовѣрностямъ*, въ коихъ и состоитъ главный интересъ теоріи среднихъ и съ которыми должны считаться не только теоретики, но и практики по вопросамъ человѣческой культуры, по вопросамъ политики, юриспруденціи и по вопросамъ производящей промышленности и коммерціи.

Приблизительныя достовѣрности, отыскиваемыя исчисленіемъ и наблюденіемъ, имѣютъ двоякій характеръ: 1) достовѣрности *хорошія*, совмѣстимыя съ общимъ благомъ, желательныя, кои нужно укрѣплять, поощрять школою, подходящими системами государственнаго кредита и щита, преміями, выборочною культурною системою и другими мѣрами, и 2) достовѣрности *худыя*, нежелательныя (какъ-то: неурожаи, эпидеміи, пожары, уголовныя преступленія, самоубійства и пр.), отъ коихъ нужно застраховаться заботою, упорнымъ трудомъ, бережливостью, просвѣщеніемъ и защититься кустодіей, граждаскимъ щитомъ. Законъ, какъ *норма*, юридическая или же нравственная, и здравая политика долженствуютъ укрѣплять первыя достовѣрности и подрывать вторыя достовѣрности.

Новыя основанія ученія о суммахъ (итожныхъ фактахъ) и о среднихъ стремятся постигнуть и направить къ общему благу приблизительныя достовѣрности, выгодно приспособить ихъ къ проблемамъ политики, народнаго благосостоянія и правопорядка.

Если дана людская среда и изъ нея наудачу берется человѣкъ для изученія его въ отношеніи къ перемѣнному предикату x, составляющему природное измѣнчивое свойство, способность или принадлежность единицъ (индивидуумовъ) среды, то явленіе x регистрируютъ, дѣлая отсчетъ перемѣннаго x по скалѣ (линіи) въ ту или другую сторону отъ средняго скалярнаго пункта x_0, отъ скалярнаго «средняго человѣка» Кетле *).

Въ дѣйствительности «средній человѣкъ» Кетле есть примѣчательная абстракція; его способность x_0 есть примѣчательный пунктъ скалы x, отъ котораго отсчитываются уклоненія въ ту или другую сторону значенія средней же способности x отдѣльныхъ индивидуумовъ наблюдаемой среды. Эти уклоненія представляютъ эволюцію въ отношеніи пункта x_0 разсматриваемой скалы.

Математическая теорія эволюціи вырабатываетъ, соотвѣтственно различному роду перемѣнныхъ предметныхъ способностей и принадлежностей и въ особенности соотвѣтственно различнымъ людскимъ способностямъ и имуществамъ, многообразіе скалъ и скалярныхъ мѣръ, относящихся къ данному населенію и наблюденію его трудовъ, заботъ и интересовъ, жизненныхъ, производительныхъ, потребительныхъ, просвѣтительныхъ и проч. Такъ біометрика, какъ часть эволюціонной теоріи по вопросамъ размноженія населенія, строитъ возрастную скалу смертности, по которой располагается таблица смертности или кривая смертности (діаграмма, графикъ вымиранія) въ данной населенной средѣ. А въ связи съ этой біологической скалой находится множество политико-экономическихъ скалъ, съ коими считается мысль.

Въ массѣ m всѣхъ однородныхъ единицъ данной среды значенія на-

*) Знаменитый Бертранъ остроумно иронизировалъ по случаю страннаго приложенія среднихъ, которое Кетле придумалъ, напримѣръ, въ изученіи распредѣленія различій роста у солдатъ. Лоранъ своими замѣчаніями (см. Statist. mathém., n° 21) нѣсколько смягчилъ возраженія Бертрана.

*) *Quetelet*: 1) Physique sociale, ou essai sur le dévelloppement des facultés de l'homme. Paris. 1860.—2) Recherches statistiques. 1844.

блюдаемаго перемѣннаго предиката x не бываютъ на дѣлѣ выстроены въ порядокъ по скалѣ, какъ по фронту. Эти единицы и соотвѣтствующія значенія предиката x бываютъ перетасованы, спутаны какъ карты въ колодѣ игральныхъ картъ или какъ положенные и перемѣшанные въ урнѣ, при жеребьевкѣ, одинаковые билеты или шары, предполагая, что каждой опредѣленной единицѣ A среды единицъ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный шаръ съ отмѣткою соотвѣтствующаго значенія x_A предиката x, приписываемаго этой единицѣ A.

Это значеніе x_A предиката x (напримѣръ, возрастъ, или же трудовое усиліе, доходъ и т. д.; Кетле изслѣдуетъ ростъ x 25.878 солдатъ) можетъ повторяться у нѣсколькихъ индивидуумовъ, составляющихъ группу, которая пусть содержитъ n_A единицъ (индивидуумовъ). Число

$$p_A = \frac{n_A}{m}$$

будетъ вѣроятностью, что при вынутіи изъ помянутой урны шара явится одинъ изъ шаровъ, соотвѣтствующихъ индивидуумамъ вышепомянутой группы, для которой $x = x_A$.

Въ жизни міра часто бываютъ обстоятельства, которыя подобны выемкѣ изъ урны жребія, т. е. билета или шара.

Если способность или принадлежность x доразвились до количественнаго опредѣленія, то среднее значеніе a можно опредѣлять, какъ *вѣроятностное среднее значеніе*, называемое въ теоріи вѣроятностей *математическимъ ожиданіемъ* перемѣннаго x и опредѣляемое по формулѣ:

$$a = \Sigma p_A \,.\, x_A = \frac{\Sigma n_A \,.\, x_A}{m},$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ пункты x_A скалы x. При этомъ значеніе x_A замѣняется всѣми значеніями предиката x въ средѣ A_1 $A_2, \ldots$ и число n_A мѣняется какъ *функція* n перемѣннаго x.

Эта функція можетъ быть представлена въ видѣ таблицы или діаграммы; каковую таблицу или діаграмму назовемъ *истинною*. Статистика стремится приблизиться къ истиннымъ діаграммамъ. Но въ сложныхъ событіяхъ дойти до нихъ въ совершенствѣ не мыслимо; приходится отчасти угадывать таблицу, а ошибки исправлять въ *страховомъ порядкѣ*, основанномъ на другой вѣроятности.

При многократномъ повтореніи опыта ожидаемое перемѣнное количество обозначаютъ для отдѣльныхъ опытовъ $O_1, O_2, O_3, \ldots$ отдѣльными символами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$; математическія ожиданія этихъ перемѣнныхъ количествъ пусть соотвѣтственно будутъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Для совокупности m независимыхъ опытовъ берутъ во вниманіе ариѳметическія среднія

$$x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m}{m} \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}.$$

При независимости испытаній приходится судить о суммѣ результатовъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, объ ариѳметическомъ среднемъ результатѣ x, который можетъ колебаться около особаго пункта x_0 скалы (около «центра»), и объ этомъ начальномъ или центральномъ пунктѣ x_0, который, въ теоремѣ Чебышева, является среднимъ изъ «математическихъ ожиданій» или изъ «вѣроятностныхъ среднихъ».

Особенно примѣчательно и важно для наукъ общественныхъ и естественныхъ ученіе объ итогахъ (итожныхъ фактахъ) независимыхъ вѣроятностныхъ перемѣнныхъ величинъ и о среднемъ ариѳметическомъ изъ многихъ наблюденій, которое содержитъ *смѣтную эволюцію* (измѣнчивость, уклоненіе) $x - x_0$ въ отношеніи помянутаго средняго x_0 изъ математическихъ ожиданій, (т. е. отъ средняго изъ вѣроятностныхъ среднихъ).

Эта примѣчательная эволюція для массивныхъ сложныхъ событій съ *приблизительною достовѣрностью* ограничивается въ *узкихъ предѣлахъ*, между которыми въ серединѣ содержится *нуль*. Это замѣчательное отношеніе среднихъ къ достовѣрностямъ съ наибольшею строгостью и элементарною простотою и въ *наиболѣе общемъ видѣ* установилъ для большого числа независимыхъ перемѣнныхъ именно геніальный мемуаръ *П. Л. Чебышева*: «О среднихъ величинахъ».

Исключенія изъ общаго правила Чебышева существуютъ и трактуются ниже въ части II. Часть этихъ исключеній соотвѣтствуетъ извѣстному Петербургскому парадоксу, который трактовалъ еще Д. Бернулли въ Запискахъ Академіи Наукъ.

Дифференціальную вѣроятностную оцѣнку вышепомянутой эволюціи $x - x_0$ или же діаграмму вѣроятности итога $(\varepsilon_1 - a_1) + \ldots + (\varepsilon_m - a_m)$ устанавливаетъ мой трактатъ: «Новыя основанія ученія о вѣроятностяхъ суммъ и среднихъ величинъ», опирающійся на теорію производящихъ функцій въ формѣ Коши и излагаемый сокращенно въ первой и третьей части настоящей книги. Коалиція (совокупность, сочетаніе, община, страховой союзъ) операцій $O_1, O_2, O_3, \ldots$, названныхъ мною Чебышевскими, связана этой діаграммой и кооперативнымъ закономъ большихъ чиселъ въ формѣ вышепомянутой теоремы Чебышева.

Во множествѣ процессовъ исторіи функція массивной среды того или другого рода состоитъ именно изъ множества индивидуальныхъ операцій, Чебышевскихъ по ихъ характеру. При этомъ среднія ариѳметическія величины, производимыя средою, характеризуютъ не столько инди-

видуальныя причины O_1, O_2, . . . , взятыя отдѣльно, сколько ихъ совокупность, коалицію, т. е. всю среду; хотя между средою и ея индивидуальными причинами существуетъ взаимная поддержка или иная зависимость. Эта зависимость не есть однако неразрывная, крѣпостная; она достаточно свободная для самостоятельнаго творчества и вмѣненія: но она привязана къ достовѣрности, трактуемой въ теоремѣ Чебышева.

Возможна, слѣдовательно, выгода, достовѣрность и закономѣрность въ царствѣ массовыхъ *независимыхъ* отношеній между индивидуальными единицами, составляющими политическое тѣло, организованное на почвѣ теоріи, закона и факта. Достовѣрность же въ цѣпяхъ *зависимыхъ* явленій устанавливается распространеніемъ теоремы Чебышева, которое содержится въ трудахъ академика А. А. Маркова, и варіаціоннымъ исчисленіемъ вѣроятностей въ связи съ фактами.

Перейдемъ теперь къ вопросу объ *исторической* точкѣ зрѣнія, сличающей во времени дѣйствительныя измѣненія данной среды съ діаграммой смѣтной эволюціи. Такое сличеніе дѣлается *заднимъ числомъ* на почвѣ фактовъ, оказательствъ на дѣлѣ. Естественная исторія человѣческихъ поколѣній и поколѣній у другихъ царствъ природы изслѣдуетъ постоянство и измѣнчивость (историческую эволюцію) наслѣдственныхъ и благопріобрѣтенныхъ свойствъ индивидуумовъ среды, опредѣляя, по сличенію, вырожденіе и возрожденіе испытываемаго или наблюдаемаго свойства, въ связи съ причинами, измѣнявшими породу то къ худшему, то къ лучшему. Этотъ сличительный методъ далъ естественникамъ множество эмпирическихъ морфологическихъ выводовъ, помогающихъ культурной побѣдѣ надъ загадками природы *).

Надежно уравновѣшенное (прочное, устойчивое) взаимоотношеніе единицъ въ данномъ человѣческомъ массивѣ, политически организованномъ и распространенномъ въ данной территоріи и въ вѣкахъ исторіи, опредѣляется отъ *среднихъ нормъ*, отъ *золотыхъ серединъ*, какъ отъ *начальныхъ* пунктовъ расчета многомѣрной и многогранной координаціи суммарнаго движенія и историческаго развитія (эволюціи въ распространенномъ смыслѣ). При анализированіи этого процесса необходимо постоянно считаться съ уклоненіями отъ этихъ серединныхъ началъ по каждой *спеціальной* скалѣ, въ положительную и отрицательную стороны.

Положительныя уклоненія бываютъ условіемъ развитія, прогресса; отрицательныя уклоненія развиваютъ упадокъ.

На этомъ основаніи можно морфологически поднять породу той или

*) Эти полезные выводы эмпирическаго метода, конечно, не достаточны для рѣшенія трансцедентныхъ вопросовъ морфологіи. Въ рѣшеніи этихъ послѣднихъ вопросовъ надъ крайними доктринами эмпирическаго метода подшучиваютъ именно интриги и козни природы, *внутреннія* причины игры случая.

другой культуры, улучшая подборъ и сочетаніе силъ цѣлесообразно. Человѣческая культура также можетъ быть поднята изъ низкаго уровня.

Школа, культивирующая человѣка, развивающая природныя способности и образующая характеры и типы людей, должна быть приспособленной къ улучшенію условій народной жизни въ ея функціяхъ и полезныхъ профессіяхъ, преслѣдуя развитіе духовныхъ силъ и матеріальныхъ достатковъ населенія. Школа должна утилизировать не только литературу, но и точную философскую науку, какъ великій методъ міропознанія, графической координаціи сознанія и культурнаго успѣха народовъ, въ теченіе вѣковъ приспособленный педагогами къ жизни, ея функціямъ и профессіямъ *).

При этихъ условіяхъ школа научитъ народную массу настолько оріентироваться въ сложныхъ обстоятельствахъ современнаго раздѣленія труда, чтобы развивать въ практикѣ свое интенсивное дѣйствіе, не безсвязное относительно смежной полосы, уничтожающееся въ противорѣчіяхъ спора, а связное, какъ бы по видимой или невидимой командѣ, сообщающей работѣ всѣхъ элементовъ массы характеръ взаимопощи и повышенную продуктивность.

Постоянное познаваніе силъ государства, умѣніе по всѣмъ скаламъ ограничивать опасныя отрицательныя уклоненія и поощрять положительныя, прокладываетъ среди пертурбацій путь отъ худа къ добру, который назову эволюціоннымъ въ отличіе отъ революціоннаго. Въ дѣйствительности общественное благо зависитъ отъ культивированія индивидуальныхъ максимальныхъ (по спеціальностямъ) способностей человѣка и отъ умѣнья использовать всю нижемаксимальную полезную трудоспособность людей для блага частнаго и общественнаго.

Силы, заставляющія массивную толщу политическаго тѣла развиваться въ положительную сторону по цѣлямъ историческаго процесса, представляются какъ многочисленныии рядовыми, наиболѣе частыми типами, близкими къ среднему, такъ и рѣдкими, иногда единичными выдающимися, геройскими въ области долга и геніальными, уклоненіями отъ среднихъ, наиболѣе часто повторяемыхъ типовъ. Во всѣхъ профессіяхъ нужны вожди и двигатели по пути успѣха; нельзя поэтому безнаказанно ронять высшую школу. Массивная толща, толпа не можетъ прогрессировать безъ предводителей; какъ и предводитель безъ организованной массы не значителенъ: «одинъ въ полѣ не воинъ».

*) Положеніе это было развито въ 1899 году въ моемъ докладѣ съѣзду педагоговъ средней школы (см. „Физико-математическій ежегодникъ“ Москва, 1900) и въ брошюрѣ: „Основы общественныхъ и естественныхъ наукъ въ средней школѣ“ (С.-Петербургъ, 1906).

Паскаль справедливо утверждалъ, что ряды народа и выдающіеся люди вертятъ колесо исторіи. Ошибочно противоположное воззрѣніе, нивеллирующее, развѣнчивающее вождей исторіи, трактующее уклоненія выдающихся, какъ «погрѣшности». На самомъ дѣлѣ, если эти уклоненія вырабатываются соревнованіями и поощреніями въ положительную сторону соотвѣтственно образцамъ, идеаламъ, то это «зло» повертывается въ добро. Въ образованіи двигателей развитія лежитъ секретъ эволюціи, обгоняющей катастрофическіе кризисы, наступающіе по причинамъ Мальтузіанскаго характера и по множеству другихъ причинъ *).

Всякая историческая побѣда достигается, конечно, лишь тогда, когда выработанное міросозерцаніе и система просвѣщенія напередъ намѣчаютъ соотвѣтствующую эволюціонную теорію и эволюціонныя лѣстницы, восхожденіе по которымъ устанавливаетъ рекордъ. Въ міровой мирной конкурренціи, въ міровой военной борьбѣ за существованіе и въ борьбѣ съ кризисами побѣждаютъ организованныя политическія народныя тѣла, способныя устанавливать рекордъ.

Въ экономическомъ процессѣ крайнія уклоненія сложнаго явленія представляются форсмажерными, иногда рѣдкими, представляющими исключенія изъ общаго правила, которымъ соотвѣтствуютъ, въ діаграммѣ явленія, крайнія парадоксальныя положенія. Эти скалярныя крайности заслуживаютъ внимательнаго изслѣдованія, напримѣръ, въ вопросахъ образованія и распредѣленія доходовъ и прямыхъ налоговъ на доходы по скалѣ, края которой соотвѣтствуютъ предѣламъ богатства и предѣламъ нищеты (гдѣ налогъ переходитъ въ отрицательную величину), а серединная часть соотвѣтствуетъ людямъ средняго достатка. Объ этой замысловатой скалѣ трактуетъ политическая экономіи (см. въ нашемъ трудѣ: «Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты». С.-Петербургъ, 1910 г.).

Если *опорные пункты* политики связаны съ окаменѣлыми средними нормами, принципіально дающими достовѣрность или надежность историческому процессу, то политическая *выгода*, наоборотъ, связана съ рискомъ, соревнованіемъ и съ талантливыми, хорошими культурными уклоненіями образцовыхъ элементовъ отъ опорныхъ пунктовъ.

Въ исторической эволюціи участвуютъ три духовныхъ силы: вѣра, наука и власть; эти три силы мірового порядка составляютъ въ нормальныхъ условіяхъ тріединство. Гдѣ высшій источникъ этихъ силъ? Ихъ источникъ, ихъ солнце, по мнѣнію того культурнаго человѣчества, къ

*) Литература относительно экономическихъ кризисовъ указана въ книгѣ проф. *Евг. Бермана*: «Историческій очеркъ теорій экономическихъ кризисовъ». Печатано съ разрѣшенія Рижск. Полит. Института. 1898.

которому склоняется психологія вѣрующихъ, отъ Бога, познаваемаго трансцедентными концепціями вѣры.

§ 4. Законы мышленія и сомнѣнія. Гарантіи. Подобіе и замѣщеніе подобныхъ. Законъ достаточныхъ основаній и фактическаго контроля.

Жизнь мысли напряженнѣе всего упражняется и развивается въ вѣроятностныхъ функціяхъ и вопросахъ. Законы мысли, сводъ которыхъ дается логикою, вполнѣ исчерпываются лишь теоріей вѣроятностей, какъ алгеброй логики. Эта алгебра, дающая наиболѣе общія правила опытнаго и дедуктивнаго мышленія, основанная Декартовскимъ умѣреннымъ (критическимъ) скептицизмомъ и Паскалевскимъ чувствомъ мѣры, разнится какъ отъ нѣкоторыхъ черезъ чуръ узкихъ, односторонніхъ правилъ логики великаго древняго схоласта Аристотеля съ его средневѣковыми поклонниками, такъ и отъ логики софистовъ, увлекательно играющихъ словомъ, «прикрасою неправды».

Послѣдователи Аристотелевской логики, вполнѣ точной, но узкой по кругозору, обыкновенно признаютъ три основныхъ закона мышленія, именно: «законъ противорѣчія», «законъ исключеннаго третьяго» и «законъ тождества».

Законъ противорѣчія *) требуетъ, чтобы мы одному и тому же предмету, въ одно и то же время, въ одномъ и томъ же отношеніи не приписывали противорѣчащихъ предикатовъ A и не—A. Таковъ первый законъ.

Однако же въ смутномъ вѣроятностномъ предложеніи предикатъ можетъ быть неизвѣстнымъ x, долженствующимъ принять спустя извѣстное время одно изъ несовмѣстимыхъ вѣроятныхъ воплощеній A, B, C, . . . , причемъ не—A будетъ равносильно одному изъ воплощеній B, C, . . . Неужели логика должна исключить изъ формъ правильнаго мышленія сужденіе, въ которомъ предикатъ обозначенъ указаннымъ смутно опредѣленнымъ символомъ x? Брачная чета готовится родить x, мальчика A или дѣвочку B, а можетъ быть пару младенцевъ того или другого пола, а можетъ быть выкидышъ. Неужели сужденіе: «чета родитъ A» не допустимо потому, что оно не достовѣрно и что въ дѣйствительности чета родитъ вещь x, которая содержитъ въ себѣ возможность либо A, либо не — A съ вѣроятностями p и $1 - p$. Смутно опредѣленное вѣчно сопровождаетъ ясное, какъ тѣни сопровождаютъ свѣтъ; и основные законы логики и онтологіи (познанія осуществленія) должны считаться съ этимъ.

*) Выраженіе трехъ законовъ мышленія беру изъ книги проф. *Г. Челпанова*: „Проблема воспріятія пространства въ связи съ ученіемъ объ апріорности и врожденности“ (Кіевъ, 1904). Нумерацію законовъ беру иную, слѣдуя книгѣ *А. И. Введенскаго*: „Логика, какъ часть теоріи познанія“.

По *закону исключеннаго третьяго*, въ приписываніи предмету какого-либо предиката мы необходимо ограничены тѣмъ условіемъ, что о немъ мы можемъ утверждать только A или не—A: tertium non datur.

Очевидно и этотъ второй законъ мышленія не примѣнимъ въ жизни мысли, если она переживаетъ нерѣшительное, смутное состояніе (либо «да», либо «нѣтъ»; и «да», и «нѣтъ»), соотвѣтствующее моменту, когда сталкиваются самостоятельныя теоріи, идеи, индивидуальности, а какая изъ причинъ одолѣетъ въ этой контроверсіи, остается временно или навсегда сомнительнымъ. Такія состоянія въ жизни мысли не выдуманы, они постоянны въ людскихъ переживаніяхъ и судахъ.

Въ этихъ состояніяхъ жизни мысли логика вѣроятностныхъ предложеній, уклоняясь отъ аристотелевской схоластики, безъ двусмысленности говоритъ: сомнѣваюсь! и переходитъ къ гипотезамъ, предположительно приписывая предмету измѣнчивый общій предикатъ x, въ которомъ, въ частности, разумѣютъ и предикатъ A не съ аподиктическою достовѣрностью, а съ вѣроятностью $p = (0,1)$, запасая на подобные случаи (и «да», и «нѣтъ») положительныя реальныя гарантіи и ожидая выхода во всеоружіи сознанія; а пока мыслимый предикатъ A оцѣнивается въ общественныхъ акціяхъ математическимъ ожиданіемъ $A.p$. Это правило учета (иногда въ сознаніи, въ мысли, иногда въ матеріальномъ обязательствѣ) назовемъ *закономъ включеннаго третьяго*; оно устанавливаетъ стоимость будущаго и проблемматичнаго предмета въ наличной жертвѣ, устанавливаетъ основной принципъ долженствованія въ проблемѣ кредитуемой и рискуемой цѣнности, имѣющій жизненное общественное значеніе.

Законъ исключеннаго третьяго Аристотелевской логики переходитъ въ законъ включеннаго третьяго *психологики* (психологика—жизнь мысли, эволюція Гегельянской философіи тождества). Этотъ законъ съ помощію ряда теоремъ, опытовъ и методовъ теоріи вѣроятностей приводитъ къ условіямъ надежнаго предвидѣнія, надежнаго сложенія силъ общественныхъ и основательнаго увѣрованія *).

*) Законъ этотъ встрѣчается въ логикѣ инженера бар. *М. Ф. Таубе*: „Сводъ основныхъ законовъ мышленія“ (Петроградъ, 1909); авторъ извлекъ этотъ законъ изъ твореній славянофиловъ, особенно *А. С. Хомякова*, обосновывая славянофильскую гносеологію (познаніевѣдѣніе). Слѣдуя міровоззрѣнію ихъ философіи, М. Ф. Таубе размножилъ три закона Аристотеля (тождества, противорѣчія и исключеннаго третьяго) до девяти (сокращенно до семи), соотвѣтственно:

1) Логикѣ отдѣльныхъ предметовъ (Аристотель);

2) Психологикѣ жизненной перемѣнчивости (Гегель);

3) Металогикѣ трансцедентныхъ предѣльныхъ сущностей (Хомяковъ, Лейбницъ);

связывая всѣ три стороны бытія вещественнаго, душевнаго и духовнаго строя во всеобщую онтологію, въ законы достаточнаго основанія онтологики. По этимъ ступенямъ М. Ф. Таубе восходитъ отъ вопросовъ естественно-исторической морфологіи къ біологической эволюціи и, наконецъ, къ вопросамъ духовно-нравственнаго начала

Это «да»—«нѣтъ», это неопредѣленное ни A, ни не—A не значитъ что детерминизмъ великихъ схоластовъ, какъ Аристотель, отрицается сполна; что было бы опаснымъ въ вопросахъ общественности и политики, которая должна исповѣдовать въ управленіи народнымъ политическимъ тѣломъ достаточный, надежный детерминизмъ, защищая жизнь названнаго тѣла въ цѣломъ и по частямъ въ міровой борьбѣ за существованіе на земномъ шарѣ. Въ мѣру необходимости детерминизмъ долженъ быть, въ области общественной психологіи, выращиваемымъ, развиваемымъ; а въ политикѣ онъ долженъ быть основанъ на резервахъ противъ неожиданности, сообразующихся съ предѣлами итога смутно опредѣленныхъ величинъ и оцѣниваемыхъ въ зависимости отъ худшаго разрѣшенія сомнѣнія, колеблющагося между «да» и «нѣтъ» при развитіи событій въ частицахъ народнаго политическаго тѣла. Эти резервы нужны, чтобы осуществить функцію политики, долженствующей съ достовѣрностью проводить государственный корабль между множествомъ сциллъ и множествомъ харибдъ.

Въ приписываніи предметамъ жизненно измѣнчиваго предикта x, явленіе котораго зависитъ отъ способностей огромной среды (какъ міръ, государство, область, классъ, сословіе), отъ массивной совокупности несовмѣстимыхъ (конкуррирующихъ) и совмѣстимыхъ (не вполнѣ конкуррирующихъ) причинъ, благопріятствующихъ соотвѣтственно оказательству одного изъ несовмѣстимыхъ видовъ:

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

измѣнчиваго предиката x, надлежитъ по закону включеннаго третьяго тщательно регистрировать эти несовмѣстимые вѣроятные виды и исчислить профилактическія гарантіи (резервы) на каждую изъ этихъ гипотезъ по цѣлямъ самосохраненія даннаго политическаго тѣла и убѣжища въ немъ всѣхъ его индивидуальныхъ подданныхъ элементовъ.

и свободнаго творческаго почина,—однимъ словомъ къ трансцедентному міросозерцанію и его номографическому рисунку. Не имѣя возможности излагать здѣсь всѣхъ основныхъ законовъ мышленія въ этомъ ихъ построеніи, мы хотимъ сказать, что законы эти въ иной послѣдовательности встрѣчаются ниже, какъ тѣ формулы закона достаточнаго основанія, коими приходится пользоваться въ апріорныхъ сужденіяхъ, операціяхъ и подсчетахъ теоріи вѣроятностей. Еще *Паскаль* умѣло примѣнилъ включенное третье и четвертое даже къ трансцедентной области вѣры, къ сверхчувственному міру религіозно-нравственнаго сознанія.

Философія не вправѣ пренебрегать особыми (подсознательными, вѣроятностными) толчками и незамѣтными перемѣнами психологіи въ подходящей воспитывающей догадку обстановкѣ (*Гербартъ*); подъ ея дѣйствіемъ сознаніе незамѣтно растетъ, какъ растительный организмъ; незрѣлыя дѣти и огромное большинство зрѣлой человѣческой массы, находитъ нравственную опору и связь съ ближними лишь по догадкѣ и по аналогіи и противоположенію съ собою.

По этой логической схемѣ, по теоремѣ вѣроятностнаго сложенія и по формуламъ математическаго ожиданія, профилактическія гарантіи исчисляются какъ льготныя достаточныя залоги — основанія и притомъ временныя; онѣ въ качествѣ временного (періодическаго) резерва уходятъ по координатѣ вѣроятности какъ бы въ «скрытое тепловое состояніе», а въ «точкѣ замерзанія» выдѣляются изъ скрытаго состоянія, умѣряя «холодъ».

Въ этомъ смыслѣ еще Лапласъ называлъ теорію вѣроятностей нормою здраваго смысла.

Законъ тождества можно формулировать такъ: «A есть A» или «$A = A$». Этотъ законъ содержитъ *требованіе*, чтобы въ процессѣ нашего мышленія, сужденій, умозаключеній каждая мыслимая вещь, каждая мысль, которую мы обозначаемъ символически при помощи A, сохраняла свое тождество. Если въ нашемъ сознаніи возникаетъ какая-либо мысль (A), то она и въ дальнѣйшихъ процессахъ мышленія *должна* мыслиться съ тѣмъ же содержаніемъ, съ какимъ мыслилась вначалѣ. То, что мы мыслили въ данный моментъ о той или другой вещи, мы должны мыслить и спустя извѣстное время, т. е. мы должны мыслить съ тѣмъ же самымъ содержаніемъ, съ какимъ мыслили раньше.

Безъ соблюденія этого закона—говорятъ послѣдователи Аристотеля—не можетъ осуществиться логическое мышленіе, т. е. мышленіе истинное. Не было бы, по ихъ мнѣнію, никакого смысла, если бы я, говоря, что «S есть T», въ то же время думалъ, что S при повтореніи сужденія не останется тождественнымъ себѣ, а превратится въ нѣчто другое.

Однакоже подобныя или одинаковыя единицы даннаго однороднаго класса могутъ замѣщать другъ друга, какъ двѣ одинаковыхъ монеты S и S'; или какъ два одинаково дисциплинированныхъ солдата S и S', чередующихся въ бою или на часахъ; или какъ два равнодостойныхъ работника въ полѣ или на фабрикѣ; или какъ два одинаковыхъ шанса въ исчисленіи шансовъ игры, напримѣръ, два одноцвѣтныхъ шара урны, содержащей бѣлые и черные шары и обычно трактуемой въ задачахъ теоріи вѣроятностей какъ примѣрный приборъ для теоретическихъ выводовъ и опытныхъ повѣрокъ.

Считая, по этимъ соображеніямъ, законъ тождества въ вышеуказанной формулировкѣ съуживающимъ формы мышленія, Джевонсъ предложилъ обобщающій законъ, извѣстный подъ именемъ «*замѣщенія подобныхъ*» (см. *Джевонсъ*: «Основы науки. Трактатъ о логикѣ и научномъ методѣ». Переводъ проф. М. Антоновича. Спб. 1881). Въ обобщающемъ мышленіи, неразличающемъ одной единицы отъ другой подобной, напримѣръ, эллина отъ іудея, имѣетъ смыслъ, если бы я, говоря, что «S есть T», въ то же время думалъ, что при повтореніи сужденія значеніе S не

остается абсолютно самотождественнымъ, а замѣщается эквивалентнымъ ему S', игнорируя различіе между S и S'. Поэтому мы различаемъ законъ *самотождества* (не допускающаго замѣны) отъ закона *тождества* (сравн. съ М. Ф. Таубе).

Конечно, признаніе эквивалентности или подобія между S и S', разрѣшающее подстановку или замѣщеніе одного другимъ, должно имѣть подъ собою *достаточное основаніе*; въ противномъ случаѣ замѣщеніе можетъ оказаться ошибкой, даже подлогомъ, злоупотребленіемъ, фальсификаціей, преступленіемъ, уголовнымъ или политическимъ.

Замѣщеніе подобныхъ есть основной законъ мышленія категоріями (группами, классами, совокупностями, сословіями).

Взглядъ, неразличающій въ ряду членовъ A_1, A_2, A_3, ... одного члена отъ другого, есть, конечно, результатъ обобщающей абстракціи отъ конкрета, представляющій образецъ безразличія, нелицепріятія, дальтонизма, слѣпого относительно перелива красочныхъ свойствъ, очевидныхъ на близкомъ разстояніи или же при вниманіи и вооруженіи познавательными и оптическими средствами. Политика примѣняетъ законное абстрактное категорическое безразличное сужденіе въ отношеніи тѣхъ подданныхъ, кои *равны передъ закономъ*, какъ два евангельскихъ ближнихъ, обязанныхъ любить одинъ другого, какъ себя, но любить Бога больше себя.

Политическое мышленіе, долженствующее обезпечить безсмертіе національнаго политическаго тѣла въ вѣкахъ исторіи, ведетъ свои расчеты замѣщенія подобныхъ по *тарифамъ*, имѣющимъ различныя размѣнныя «монеты» для выкупа и оцѣнки жизненной выгоды и невыгоды. Въ число этихъ «монетъ» входятъ и жизни самихъ гражданскихъ индивидуумовъ, въ крайнемъ случаѣ отдаваемыя въ обмѣнъ по самой дорогой цѣнѣ за жизнь цѣлаго политическаго тѣла и за землю, являющуюся жилищемъ главнымъ средствомъ существованія территоріальныхъ тѣлъ.

Замѣщеніе подобныхъ совершенно необходимо, какъ способъ нравственной связи съ себѣ подобными, ближними, при раздѣленіи труда и общихъ повинностей, при несеніи тяготъ другъ друга, вообще при завязкѣ и развязкѣ общественныхъ комбинацій на достаточныхъ равныхъ основаніяхъ; при чемъ гарантіи, достаточныя основанія и эквивалентъ (цѣна, коэффиціентъ прямой и обратной пропорціональности) при количественномъ замѣщеніи подобныхъ опредѣляются гражданскимъ уложеніемъ, предварительнымъ договоромъ сторонъ, законами спроса и предложенія при свободной конкурренціи спрашивающихъ и предлагающихъ, научно поставленными экспериментами по пути положительной эволюціи, наконецъ, выводами на основаніи суда общественной совѣсти, по скольку она культивирована въ отношеніи пониманія закона достаточныхъ и необходимыхъ основаній.

Во многихъ сужденіяхъ замѣщеніе абсолютно не допустимо. Потому-то необходимо иногда не вѣрить, отрицать замѣщеніе, желать неприкосновенности, отталкивать въ обмѣнѣ цѣнностей хищную лукавую фальсификацію вмѣстѣ съ фальсификаторами.

Такъ, вторая синайская заповѣдь абсолютно запрещаетъ «дѣлать себѣ кумира», т. е. подмѣнять въ сужденіи Бога богами.

Въ дѣйствительности и въ научныхъ концепціяхъ «замѣщеніе подобныхъ» играетъ роль тогда, когда происходитъ какая-либо *перестановка* при сохраненіи сходственнаго признака, какъ-то: или замѣна однихъ частицъ среды другими въ движущейся волнѣ; или замѣна однихъ частицъ воды другими въ рѣкѣ, въ атмосферѣ и пр.; или замѣна въ машинѣ механической работы теплотою (механическій эквивалентъ); или обмѣнъ вещества въ живомъ организмѣ; или наслѣдственная замѣна отцовъ и матерей происходящимъ отъ нихъ потомствомъ, сохраняющимъ, не смотря на мутаціи, сходственные родовые и видовые признаки, или замѣна въ неумирающихъ историческихъ корпораціяхъ, какъ государство, церковь, школа, умирающихъ лицъ новыми при долженствованіи пронести чрезъ всю исторію какую-либо идею — традицію, религіозную, политическую, научную, техническую и пр.; или злободневная промышленная замѣна одной цѣнности другою при одинаковости содержащейся въ нихъ финансовой валюты, какъ стоимости хлѣба, труда и товаровъ въ деньгахъ и какъ метафизической покупной экономической идеи—силы; и т. д.

Замѣщеніе подобныхъ подчинено *закону пропорціональности* или вообще *тарифу* и *закону достаточныхъ основаній*, обнимающему разныя нормы и гарантіи долженствованія, разграничивающему терпимыя замѣщенія отъ нетерпимыхъ и играющему, вмѣстѣ съ закономъ причиной связи, большую роль въ установкѣ основныхъ понятій и теоремъ исчисленія вѣроятностей.

Однѣ части закона достаточныхъ основаній являются юридическими и нравственными нормами и жизненными дисциплинами, прививаемыми воспитаніемъ, школою, какъ привычка—вторая природа; другія же части являются, независимо отъ усилій мысли, неизбѣжными, роковыми законами физической природы, мертвой (біологически неорганизованной) и живой (организованной біологически).

Въ составѣ закона достаточныхъ основаній нужно различать:

1) Законъ *несовмѣстимости* въ данномъ процессѣ другъ съ другомъ отдѣльныхъ элементовъ причинной группы A, B, C, ... На этомъ законѣ, когда онъ имѣетъ силу, зиждется числовое опредѣленіе вѣроятности, теорема сложенія вѣроятностей и опредѣленіе стоимости мыслимой вѣроятностной перемѣнной величины посредствомъ математическаго ожиданія. На этомъ же законѣ, напримѣръ, въ торговомъ размѣнѣ цѣнностями зиждется идея торговой конкурренціи продающихъ и идея торговой конкурренціи покупающихъ; каковыя идеи однакоже не вездѣ и не всегда гарантируются, а потому являются условными по категоріямъ.

2) Законъ *совмѣстительства* въ данномъ процессѣ другъ съ другомъ отдѣльныхъ членовъ творческой группы O_1, O_2, O_3, ..., производящей соотвѣтственно совмѣстные факты A_1, A_2, A_3... На этомъ *кооперативномъ законѣ*, когда онъ имѣетъ силу, зиждется теорема вѣроятностнаго умноженія и вѣроятностное ученіе о сложныхъ событіяхъ въ союзахъ, въ товариществахъ, въ страховыхъ обществахъ и кассахъ взаимопомощи и въ послѣдней, высшей кооперативной инстанціи, называемой государствомъ и недопускающей status in statu.

3) *Законъ вѣроятностной зависимости* другъ отъ друга совмѣстимыхъ фактовъ A и C. Законъ этотъ приводитъ къ теоремѣ Байе объ апостеріорныхъ вѣроятностяхъ, къ ученію о связи наблюденныхъ фактовъ съ измѣнчивостью вѣроятностныхъ воззрѣній человѣка, зависящихъ отъ фактической стороны, съ измѣнчивостью курса въ субъективномъ кредитѣ людей; приводитъ къ эмпирической эволюціи воззрѣнія, къ повышенію или пониженію значенія жестовъ, символовъ и гражданскихъ обязательствъ, учитываемыхъ въ ситуаціи частныхъ соотношеній, а также въ ситуаціи общественной культурности, въ ситуаціи биржи, въ ситуаціи выгоды для народной экономіи и въ ситуаціи политическихъ предпочтеній.

Законъ вѣроятностной зависимости другъ отъ друга совмѣстимыхъ явленій A и C считается съ вѣроятностной скалой p, исчисляя по этой скалѣ относительно явленія A *эмпирическую варіацію* $\delta p = p' - p$, въ которой p и p' суть вѣроятности явленія A, взятыя *до* и *послѣ* наблюденія обстоятельства C. Эта эмпирическая варіація δp характеризуетъ *работу* или *вліяніе* элементарнаго факта C на колебаніе *курса довѣрія* въ психологіи наблюдателей и оцѣнщиковъ за время $\delta\tau$ наблюденія факта C (см. нашу книгу: «Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности»). Она бываетъ онтологически рѣшительною, если $p' = 1$ и если $p' = 0$. Она распространяется при помощи указаннаго ниже (часть III) варіаціоннаго исчисленія на сложныя предпріятія, въ которыхъ дѣйствуютъ совокупности рабочихъ факторовъ природы и человѣка; она играетъ роль въ онтологіи натуральныхъ приростовъ и финансовыхъ прибылей и въ установленіи историческихъ балансовъ демографической статистики и экономіи, когда фактическимъ контролемъ (ревизіей) сличается *теоретическое* ожиданіе съ *практикой*, съ дѣйствительностью и констатируется либо прибыль, либо нуль, либо убыль курсовой стоимости ожиданія учитываемыхъ предметовъ въ срочномъ оборотѣ дѣлъ и интересовъ съ данной хозяйственной точки зрѣнія.

4) *Законъ крѣпостной зависимости факта A отъ факта C.* За-

конъ этотъ, являющійся предѣльнымъ (крайнимъ) случаемъ предшествующаго закона, можетъ быть названъ закономъ неразрывной связи или рѣшительной, роковой необходимости. Законъ этотъ говоритъ объ утвердительной или отрицательной *достовѣрности* факта A послѣ наступленія факта C, когда вѣроятность p факта A въ слѣдъ за C *скачкомъ* переходитъ въ $p' = 1$ или же въ $p' = 0$. Если имѣетъ мѣсто утвердительная достовѣрность ($p' = 1$), то C есть либо производящая причина явленія A, либо вѣрный спутникъ этой причины, слѣдъ, достаточно уличающій ее. Если же имѣетъ мѣсто отрицательная достовѣрность ($p' = 0$), то имѣетъ мѣсто *несовмѣстимость* фактовъ A и C, при чемъ фактъ C является производящею причиною факта не—A или уликою этой причины.

Фактъ C будемъ называть, въ случаѣ крѣпостной зависимости, *рѣшительнымъ критическимъ фактомъ* относительно факта A.

Соприкасаясь съ фактами, законы нерѣшительной и рѣшительной зависимости участвуютъ въ фактическомъ контролѣ развитія упованій и исполненія; а въ экспериментальномъ психологическомъ методѣ они вырабатываютъ объективныя вѣроятности, провѣряя субъективную работу фантазіи и умѣряя курсы довѣрія, вздуваемыя либо собственной иллюзіей, либо рекламой рыночной парламентарности.

5) *Законъ вѣроятностной независимости* другъ отъ друга совмѣстимыхъ фактовъ A и C. Законъ этотъ является другимъ предѣльнымъ, принципіально весьма важнымъ пунктомъ закона вѣроятностной зависимости, соотвѣтствующимъ тому крайнему случаю, когда вышеуказанная варіація δp равна абсолютному нулю,

$$\delta p = p' - p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Этотъ разъединительный законъ развивается въ большую хартію, ибо независимость другъ отъ друга извѣстныхъ группъ производящихъ причинъ факта A и факта C есть важное гражданское понятіе и коренной законъ недѣлимыхъ элементовъ (атомовъ) природы. Законъ вѣроятностной независимости является условіемъ для важнѣйшихъ изъ кооперативныхъ законовъ большихъ чиселъ, высказываемымъ въ формѣ теоремъ Я. Бернулли, Пуассона и Чебышева. Онъ служитъ тою кардинальною осью философіи исторіи, которая создаетъ, напримѣръ, понятіе о юридическихъ коллективныхъ лицахъ (сложныхъ единицахъ), какъ совокупностяхъ простыхъ правовыхъ независимыхъ единицъ O_1, O_2,.... Ихъ кооперація черпаетъ свою опору и убѣжденіе въ приблизительныхъ достовѣрностяхъ, открываемыхъ ученіемъ о математическихъ ожиданіяхъ массивнаго итога независимыхъ перемѣнныхъ и о среднихъ величинахъ этихъ перемѣнныхъ. Коалиція простыхъ лицъ O_1, O_2,... не раздѣльна въ однихъ счетахъ, какъ одно юридическое лицо, и не сливается въ другихъ счетахъ.

Мышленіе со временъ Демокрита при уклоненіи отъ аристотелевской дидактики, двигалось по этой кардинальной оси достовѣрностей, обосновываемыхъ съ возможною математическою строгостью въ ученіи о среднихъ величинахъ. Отбросимъ моменты, когда пертрубаціи вызываютъ отклоненія отъ предѣльнаго условія (A). Цѣнность этого условія въ томъ, что оно привязываетъ частное сужденіе къ группѣ приблизительныхъ достовѣрностей общаго упованія и дѣлаетъ это наиболѣе просто и прямо.

6) *Аксіома о двоякой природѣ теоретической достовѣрности.* Эта аксіома отличаетъ абсолютную (аподиктическую) достовѣрность отъ приблизительной достовѣрности, фигурирующей въ законѣ большихъ чиселъ и никогда недостигающей (если не помогаютъ рѣшительные факты) въ предѣлѣ до абсолютной достовѣрности, къ которой она однако можетъ неограниченно приближаться.

Въ законахъ статистическаго (эмпирическаго) мышленія тѣ и эти достовѣрности и соотвѣтствующія имъ историческія регулярности смѣшиваются, что ведетъ ко многимъ недоразумѣніямъ въ области статистики и юридическаго мышленія. Это смѣшеніе основъ критики отмѣчено въ моей монографіи: «Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности» (Москва, 1902).

7) *Аксіома устойчивости абсолютныхъ достовѣрностей* въ обстоятельствахъ текущаго времени и мѣста. Эта аксіома выражается такъ: абсолютно достовѣрное до наступленія обстоятельства E остается абсолютно достовѣрнымъ и послѣ наступленія этого обстоятельства; абсолютно достовѣрное вездѣ бываетъ достовѣрно и въ данномъ мѣстѣ L.

Эта аксіома служитъ исходнымъ пунктомъ также и для формулированія аналогичнаго *постулата,* если въ ея формулѣ замѣнить абсолютную достовѣрность *относительною* (приблизительною) достовѣрностью. Постулатъ этотъ можно примѣнять лишь съ *нѣкоторымъ рискомъ* и, слѣдовательно, съ *осмотрительностью*, правила которой даются выводами теоріи вѣроятностей и уставами учрежденій, производящихъ фактическій контроль (ревизію). Приблизительно достовѣрное послѣ нѣкоторыхъ маловѣроятныхъ обстоятельствъ можетъ потерять свой кредитъ. *Въ области относительныхъ достовѣрностей нѣтъ правила безъ исключеній.*

Законодательная практика, производя постулаты (статьи) гражданскаго и уголовнаго кодекса, являющіеся окаменѣлыми предпосылками (догмами, аксіомами) юридическаго мышленія, *должна держаться вблизи абсолютныхъ достовѣрностей, рѣшительно гарантированныхъ и воспринятыхъ обычно въ народной психологіи,* и должна въ соотвѣтствіи съ матеріальными нуждами гарантированія вербовать *кустодію* противъ неожиданныхъ явленій.

§ 5. Основная математическая классификація функцій. Тѣла физическія и тѣла общественныя, основныя на вѣрѣ.

Число и мѣра являются условіями числовой закономѣрности, которою управляются большія человѣческія констелляціи, да и весь остальной міръ (Пиѳагоръ. Аристотель: Метафизика),—міръ, какъ великая, необъятная совокупность сосуществованій и воплощеній.

Какъ скоро какая-нибудь конкретная величина способна измѣряться, она дѣлается математическимъ количествомъ, и на сцену тотчасъ выступаетъ математическая теорія соотвѣтствующихъ конкретныхъ явленій, независимо отъ того будетъ-ли ихъ природа умственная (мысленно воображаемая) или физическая, воплощенная.

Математика различаетъ измѣренія *абсолютныя* отъ измѣреній *относительныхъ* (см. *О. Д. Хвольсонъ*: Курсъ физики. Томъ I, отд. 3, гл. 1, § 1).

Въ относительныхъ физическихъ измѣреніяхъ мѣра (единица) бываетъ произвольною, но сохраняющею опредѣленное отношеніе къ абсолютной мѣрѣ.

Правомѣріе, числовая алгебра, финансовая метафизика*) и соціальная физика **) должны имѣть дѣло какъ съ физическими мѣрами, такъ и съ живыми личными единицами—мѣрами, какъ человѣкъ съ его способностями, колеблющимися по скаламъ отъ лица къ лицу (см. выше).

Кромѣ того, при торговомъ размѣнѣ *бумажныхъ* обязательствъ играютъ роль соотвѣтственныя мѣры ихъ стоимости на деньги, зависящей отъ *оправданнаго на дѣлѣ* довѣрія, отъ капризовъ рыночнаго спроса и предложенія, отъ рыночнаго режима то конкурренціи, то соглашенія и концентраціи и отъ характера финансовой политики, т. е. денежнаго выпуска и налога, а, слѣдовательно, и отъ бумажно-денежнаго дѣла, т. е. государственнаго кредита. Въ частномъ и общегосударственномъ кредитѣ обращаются въ большомъ числѣ сопрягаемыя съ дѣломъ чистыя идеи права и ихъ ходячія, по матеріалу дешевыя, обозначенія: векселя, чеки, бумажныя деньги, акціи, облигаціи и пр., колеблющіяся по курсу на золото подъ вліяніемъ какъ оправдывающихся на дѣлѣ ожиданій, такъ и настроенія: сомнѣнія, отрицанія и довѣрія къ бумагѣ, къ молвѣ, къ лицамъ, являющимся дебиторами и контрагентами.

*) См. ниже и см. книгу автора: «Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты».

**) *Quetelet*: Physique sociale, ou essai sur le développement de facultés de l'homme. *П. А. Некрасовъ*: Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности. (Матем. Сборникъ, т. XXIII).

Результаты какъ счисленій, такъ и измѣреній всякаго рода выражаются числовыми величинами, отъ которыхъ зависятъ ихъ *функціи*.

Величины могутъ измѣняться по соотвѣтствующимъ скаламъ непрерывно и прерывно. Сообразно съ этими двумя способами измѣненія количествъ функціи раздѣляются на непрерывныя и прерывныя, а сама чистая математика распадается на два громадныхъ отдѣла *): теорію непрерывныхъ функцій и теорію прерывныхъ функцій. Теорію непрерывныхъ функцій называютъ математическимъ анализомъ, а теорію прерывныхъ функцій аритмологіей. Такое естественное подраздѣленіе чистой математики предложилъ Н. В. Бугаевъ, и оно должно сдѣлаться достояніемъ научной классификаціи, такъ какъ оно устраняетъ много недоразумѣній въ пониманіи связи многихъ отдѣловъ чистой математики и ея приложеній.

Анализъ есть только первая ступень въ развитіи строгихъ математическихъ истинъ, простѣйшая форма, подъ которою онѣ появляются, уступая по наглядности лишь истинамъ геометріи. Древній періодъ можно назвать геометрическимъ. Позднѣе наступилъ періодъ аналитическій.

Числовую величину нужно отличать отъ *порядковаго числа* съ его функціями, изображаемаго геометрически для образнаго выраженія порядковаго счета на бумагѣ. Порядковое число является орудіемъ *номографіи*, номографическаго разсужденія и соображенія и геометрическаго анализа связей; о чемъ будемъ часто говорить ниже.

Ученіе о порядковыхъ числахъ составляетъ нынѣ обширную отрасль анализа, называемую иносказательно *числовою геометріей* (по Бугаеву) или, если угодно, *графическою наукой* (по терминологіи французовъ, напр., М. д'Окань).

Порядковое число можетъ перемѣтить, наименовать по порядку, по скалѣ необъятное количество предметовъ мысли и оказательства (внѣшняго, публичнаго проявленія) и взять ихъ во всѣхъ сочетаніяхъ; оно можетъ быть художественно-музыкальнымъ, ибо музыка есть текущее порядковое число волненій среды; оно есть лучъ свѣта, тепла, электричества, притяженія, отталкиванія, ибо и этотъ лучь есть порядковое число волненій невѣдомой среды; оно выражаетъ множество видимыхъ и невидимыхъ независимыхъ перемѣнныхъ, функціи которыхъ мы эмпирически воспринимаемъ, какъ наши впечатлѣнія и какъ реальныя цѣнности.

Теорія же сочетанія выводитъ къ законамъ *синтеза*, опредѣляющимъ психологическую ассоціацію понятій, инволюцію впечатлѣній, геометрическую инволюцію формъ, алгебраическое комбинаторное исчисленіе группъ,

*) *И. В. Бугаевъ*: 1) Естественная классификація цѣлыхъ чиселъ и прерывныхъ функцій (Матем. Сборникъ, т. XIV) и 2) Математика и научно-философское міросозерцаніе.

множествъ и категорій, химическое соединеніе атомовъ, обладающихъ сродствомъ, и общественный союзъ существъ, стоящихъ на разныхъ ступеняхъ въ царствахъ природы.

Въ многообразіяхъ числовой геометріи (неэвклидовой) играютъ роль обыкновенныя координаты (считая въ ихъ числѣ вѣроятностную координату воззрѣній) и комплексныя числа, двухмѣрныя и многомѣрныя (см. проф. *В. А. Васильевъ:* Введеніе въ анализъ. Часть II. Казань. 1908).

Но строго непрерывныя аналитическія закономѣрности (номограммы) не могутъ объяснить всего міроустройства.

Присматриваясь къ явленіямъ природы, мы скоро подмѣчаемъ такіе факты, которые не могутъ быть объяснены съ точки зрѣнія одной непрерывности. Такъ, напримѣръ, разсматривая таблицу простыхъ чиселъ (Эратосфеново рѣшето), мы видимъ, что числа, ихъ характеризующія, не подчиняются закону непрерывности. Нѣтъ простыхъ тѣлъ всякой плотности. Каждое простое тѣло есть самостоятельный индивидуумъ. Разсматривая сложныя химическія тѣла, мы также обнаруживаемъ, что они образуются изъ элементовъ, вступающихъ въ химическія соединенія только въ опредѣленныхъ пропорціяхъ. Непрерывность непримѣнима къ объясненію всѣхъ химическихъ явленій; здѣсь часто прилагаются аритмологическія функціи.

Атомистическія теоріи физики и химіи ясно указываютъ на индивидуальныя особенности въ строеніи вещества. Эти особенности оказываются въ кристаллическомъ строеніи минераловъ. Атомы обнаруживаютъ себя въ диффузіи, которая свойственна не только соприкасающимся газамъ и жидкимъ тѣламъ, но и соприкасающимся твердымъ тѣламъ (см. *А. Сперанскій*: «Молекулярное движеніе въ твердыхъ тѣлахъ». Физико-математическій ежегодникъ. Москва, 1900). Эти явленія не могутъ быть объяснены одною непрерывностью. Физико-химическое міросозерцаніе формулируетъ законы этихъ явленій съ помощію аритмологическихъ функцій и перемѣщеній.

Изъ акустики мы знаемъ, что только опредѣленное сочетаніе звуковъ производитъ эстетическое впечатлѣніе. Музыкальное чередованіе звуковъ имѣетъ аритмологическій характеръ.

Явленія сознанія, идеи и ихъ ассоціаціи и диссоціаціи также представляютъ много сторонъ, не подчиняющихся аналитическому взгляду на духовную природу. Соціальная физика Паскаля и Кетле развивается въ соціальную физико-химію *), въ многоединство Демокрита и Лейбница и въ кооперацію независимыхъ причинныхъ группъ теоремы Чебышева.

Въ соціологіи человѣкъ есть самостоятельный соціальный элементъ, и непрерывность непримѣнима къ объясненію многихъ общественныхъ

*) См. мою монографію: «Математическая статистика».

явленій. Прерывность всегда обнаруживается тамъ, гдѣ проявляется самостоятельная индивидуальность. Она подмѣчается также и тогда, когда на сцену выступаютъ вопросы о сомнѣніи, отрицаніи и довѣріи и вопросы о цѣлесообразности, гдѣ появляются этическія задачи.

Алгебра, анализъ, аритмологія, геометрія и теорія вѣроятностей даютъ всѣ элементы для выработки коренныхъ основъ научно-философскаго міросозерцанія и мышленія. Распространить эту основную классификацію элементовъ математики на вопросы конкретнаго знанія, на функціи природы и общественныхъ классовъ и сословій — это есть дѣло прикладной математики, политики и техники. Теорія вѣроятностей должна дать отвѣты тамъ, гдѣ благодаря пертурбаціямъ не приложимы анализъ и аритмологія. Она выступаетъ большею частью въ сферѣ очень сложныхъ событій. Къ области ихъ безспорно могутъ быть отнесены многія общественныя явленія. Законъ большихъ чиселъ показываетъ, что вліяніе пертурбацій, нарушающихъ опредѣленный, детермированный ходъ явленій, получаетъ приблизительную опредѣленность (достовѣрность) въ большомъ числѣ наблюденій. На основаніи этого закона наши общія заключенія о массовыхъ случайныхъ явленіяхъ могутъ имѣть независимое отъ сомнѣній значеніе въ особенности для большихъ политическихъ тѣлъ, какъ государство.

Общественные союзы, отъ семейнаго союза и отъ малыхъ территоріальныхъ общинъ до величественныхъ общинъ, какъ государство, основаны въ мысли на вѣрѣ, на ея взаимностяхъ и кругахъ и на статочностяхъ (силахъ) оправдывающейся вѣроятности, входящей элементомъ порядка въ совокупности явленій вселенной.

Статьи кодексовъ, устраивающіе на землѣ порядокъ среди случайностей и пертрубацій, это суть, въ переводѣ на языкъ математики, продолженія статутовъ обычной геометріи древнихъ, устраивающія землю и права населенія *). Ситуація юридическая (правопорядокъ) есть ситуація вѣроятностная и геометрическая въ широкомъ смыслѣ слова **), обслуживающая всюду нужды населенія въ защитѣ формулами закона и судами. Въ эти формулы, какъ букву закона, судебными традиціями и отборомъ судей можно вложить тотъ или другой живой духъ закона; отчего существенно зависитъ характеръ дѣятельности въ странѣ ея судебной организаціи, личные органы которой подбираются изъ рядовъ населенія

*) Вѣроятностныя номограммы учитываются въ геодезіи, въ кадастрѣ, въ сѣти банковъ; онѣ присоединяются къ рисункамъ номографіи въ духѣ книги *Maurice d'Ocagne*: Traité de Nomographie. (Paris, 1899) и книги проф. *Н. Герсеванова*: Основанія номографическаго исчисленія съ приложеніемъ ихъ къ инженерному дѣлу. (С.-Петерб., 1908).

**) *Poisson*: Recherches sur la probabilité des jugements. Paris, 1837.

соотвѣтственно духу законовъ и народной культуры *). Выработка характеровъ въ этой культурѣ требуетъ опредѣленной культурной выдержки или народнаго образованія въ данномъ духѣ.

Въ построеніи для жителей государства гражданскаго кодекса и въ примѣненіи разума его статей къ разуму народнаго творчества и самосохраненія, индивидуальнаго и государственнаго, необходимы математическіе методы геометріи, дифференціальнаго и интегральнаго анализа вещей и событій, аритмологіи и теоріи вѣроятностей. Гражданскій кодексъ опредѣляетъ въ каждый моментъ исторіи частно—правовыя отношенія подданныхъ индивидуумовъ, т. е. опредѣляетъ дифференціацію и интеграцію правъ и функцій. Государство и его области представляютъ собою интегральныя территоріальныя и историческія родовыя и національныя событія; отдѣльныя же правовыя единицы представляютъ собою атомныя явленія, простѣйшія дифференціальныя индивидуальныя частицы политическаго тѣла.

Въ этомъ смыслѣ законы цивилизаціи выговариваемые, какъ гражданскій и уголовный кодексъ, аналогичны атомистическимъ и монадологическимъ теоріямъ съ ихъ самостоятельными, независимыми единицами, приводимыми однакоже къ стройному движенію предустановленною гармоніей, частью незыблемой, вѣчной и совершенной, частью несовершенной и реформируемой по способу послѣдовательнаго развитія и приближенія къ совершеннѣйшей красотѣ и истинѣ.

---

*) Противъ Пуассоновской юридической ситуаціи, вѣрной лишь въ общей массѣ судебныхъ приговоровъ, а не въ индивидуальныхъ приговорахъ, нужно сдѣлать ту оговорку, что достовѣрность приговора 12 присяжныхъ грубо приближенна, особенно при невысокой культурѣ судей. Бертранъ говоритъ о судебныхъ ошибкахъ, отсюда проистекающихъ, слѣдующее.

«Ни Курно, ни Пуассонъ не совершили ни малѣйшей ошибки, какъ геометры; они передаютъ свои гипотезы весьма основательно. Но гипотезы не имѣютъ ни малѣйшаго отношенія (въ индивидуальномъ частномъ случаѣ) къ положенію обвиняемаго передъ судьями. Невинный, надъ коимъ тяготѣютъ клеветническія показанія, т. е. жертва махинацій, черезъ чуръ ловкихъ, чтобы какой-нибудь судья могъ ихъ подозрѣвать, есть лишь *обвиняемый*. Пуассонъ же, чтобы считаться съ установленной гипотезой, относитъ таковыхъ къ разряду *виновныхъ*. Въ этомъ случаѣ единодушная ошибка судей является доказательствомъ строгой формы, съ которой юридическая алгебра заставляетъ ихъ считаться, ведя за своимъ непоколебимымъ предопредѣленіемъ. Но Кондорсе далъ мудрый совѣтъ, а именно: для состава судебныхъ присутствій избирать дѣйствительно просвѣщенныхъ».

Слѣдовательно, народное просвѣщеніе и подборъ просвѣщенныхъ судей лежатъ въ основѣ частностей правопорядка. Это нужно сказать не только о подборѣ судей уголовнаго и гражданскаго суда, но и о подборѣ судей для обсужденія законопроектовъ въ области судебныхъ уложеній. Пуассоновскія же ситуаціи и выводы, относясь къ массивныхъ явленіямъ въ странѣ, пріобрѣтаютъ высшую достовѣрность въ *судебной политикѣ*, подсчитывающей массы приговоровъ, а не въ *индивидуальныхъ случаяхъ* судебнаго функціонированія.

Математика, поправляя популярное слово (прикрасу неправды), совершенно правильно завоевала себѣ мѣсто въ вопросахъ національно-государственнаго сознанія, цивилистики, просвѣщенія и политики, трактуя вопросы о томъ, какъ и какими скалярными мѣрами и гарантіями установить гармонію факторовъ, исключить накопленіе погрѣшностей, оградить цѣлое общество (политическое тѣло) и его индивидуальныя единицы и отряды (классы, сословія) отъ невыносимыхъ соціальныхъ конфликтовъ и экономическихъ кризисовъ и приблизить міръ къ спасительнымъ достовѣрностямъ, отцѣживаемымъ большею частью изъ вѣроятностныхъ провидѣній и спасительныхъ гипотезъ, являющихся отвлеченными истинами, важными для объясненія міровой структуры.

Однако и экспериментальный методъ необходимъ. Экспериментальный методъ теоріи вѣроятностей сталъ именоваться Математической Статистикой, въ которой, благодаря *обратной* теоремѣ Я. Бернулли и ея обобщеніямъ, составлено понятіе объ *эмпирической вѣроятности*, называемой *частостью* явленія въ рядѣ конкретно повторяемыхъ испытаній и обладающей въ массовомъ процессѣ близостью къ теоретическимъ вѣроятностямъ, добываемымъ посредствомъ исчисленія статочностей и достаточныхъ основаній.

Эти два понятія о вѣроятности, не смотря на ихъ близость, нужно строго различать, а также и сличать въ цѣляхъ контролированія одного понятія другимъ. Міръ мысли и міръ фактовъ повѣряютъ другъ друга *практикой*.

Отвлеченныя теоремы (истины) теоріи вѣроятностей, будучи соединены съ экспериментальными выводами, двукратно выводятъ сознаніе къ свѣту достовѣрности изъ темноты смутныхъ представленій и неясныхъ провидѣній.

Людской міръ есть совкупность (интеграція) единицъ, кои на картѣ земного шара проектируются точками, движущимися пылинками, дифференціалами. Движеніе, вошедшее въ среднюю норму жизни живыхъ единицъ въ ихъ общественной средѣ, бываетъ привычкою, второю природою, обычнымъ методомъ поведенія. Оно представляетъ какъ бы косное, уравновѣшенное перемѣщеніе точечной системы по уравновѣшеннымъ *консервативнымъ* путямъ (см. проф. Д. *Бобылевъ*: Курсъ аналитической механики. Прибавленіе. Стр. 98. С.-Петербургъ, 1903). Эта система бываетъ со многими степенями свободы; формула ея, получаемая интеграціей, содержитъ много *произвольныхъ постоянныхъ* $C = (a, b)$; каковыя постоянныя въ свой чередъ могутъ измѣняться въ зависимости отъ воли живыхъ единицъ разнаго рода и отъ вѣроятностныхъ кооперативныхъ соотношеній въ средѣ этихъ единицъ (индивидуальностей, монадъ).

Произвольныя постоянныя C, коихъ въ общественной интеграціи и въ

мірѣ вообще бываетъ слишкомъ много, — это суть величины, курсы которыхъ могутъ то стоять неподвижно, то повышаться, то опускаться въ кредитѣ и въ моторныхъ центрахъ живыхъ существъ, не только разумныхъ, но и такъ называемыхъ неразумныхъ, у которыхъ однако же наблюдаются пертурбаціи, основанныя на ихъ довѣріи, сомнѣніи и отрицаніи *).

Общественность, гражданственность, политика и наука держатся въ идейной своей сторонѣ на вѣрѣ, на ея окрѣпшихъ въ дѣйствіи идеяхъ, системахъ, планахъ и учрежденіяхъ. Довѣріе, какъ психологическій фактъ **), разбивается волнами и ударами отрицанія и сомнѣнія; общественная жизнь людей была бы невозможною, если бы она не имѣла точки опоры въ идейной достовѣрности, а также и въ фактическихъ матеріальныхъ гарантіяхъ справедливости и прочности порядка и структуры.

§ 6$_1$. Исчисленіе вѣроятности, какъ юридическое основаніе понятія о фактической власти при возможномъ владѣніи.

По этому вопросу извѣстный ученый юристъ, покойный проф. *В. А. Юшкевичъ* въ статьѣ: «Изслѣдованіе въ области ученія о владѣніи. Пріобрѣтеніе владѣнія по римскому праву» говоритъ въ слѣдующее ***).

Какъ только владѣніе является въ своей мысленной, аналогической натуральному владѣнію и логически съ нимъ тождественной формѣ, оно цѣликомъ основано на существующемъ въ оборотѣ подсчетѣ вѣроятности нашей власти надъ объектомъ. Въ чемъ, въ частности, выражается мысленное владѣніе въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, этого нельзя выразить ни общею формулою, ни исчерпывающимъ перечисленіемъ. Мы имѣемъ здѣсь дѣло съ quaestio facti. Тѣмъ не менѣе, теорія можетъ и должна представить тѣ основныя формы, въ которыя обращается всякое владѣніе.

Само собою навертывается вопросъ: тѣ безтѣлесные, логически тождественные съ натуральнымъ владѣніемъ моменты, которые соединяютъ

*) «Животное опредѣляющее свою пищу по одному ея виду или идущее къ мѣсту убѣжища,—говоритъ Бэнъ—распознаетъ извѣстныя совпаденія естественныхъ свойствъ и обнаруживаетъ въ полной мѣрѣ состояніе вѣры въ отношеніи къ нимъ. Самое скромное насѣкомое, обладающее постояннымъ жилищемъ или извѣстными средствами для удовлетворенія своихъ потребностей, одарено способностью вѣрить. Каждое новое совпаденіе явленій, внесенное въ рутину животнаго существованія и содѣйствовавшее достиженію его цѣлей, есть новый членъ вѣры. Ребенокъ, нашедшій дорогу къ груди матери, которая накормитъ и согрѣетъ его, сдѣлалъ успѣхи въ способности вѣры; и тотъ же путь идетъ, расширяясь, черезъ всю жизнь». *Bain*: The Emotions and the Will. London. 1888, p. 506.

**) Проф. *П. Соколовъ*: Вѣра. Психологическій этюдъ. Москва. 1902.

***) См. «Ученыя Записки Лицея въ память Цесаревича Николая». Вып. 4. Москва, 1910 г.

владѣніе въ длящееся состояніе, несомнѣнно, уступаютъ тѣлеснымъ моментамъ въ смыслѣ обезпеченности объекта за субъектомъ. Не является ли это препятствіемъ къ признанію въ нихъ состоянія владѣнія? Отвѣтъ можетъ быть только отрицательнымъ. Несомнѣнная разница между тѣлесными и безтѣлесными моментами, изъ которыхъ слагается владѣніе, не принципіальная, а чисто практическая *).

Вѣдь, строго говоря, даже владѣніе тѣлесное, которое является совершеннѣйшимъ видомъ владѣнія вообще, не представляетъ чего-либо абсолютнаго; нѣтъ владѣнія на свѣтѣ, котораго не могла бы преоборотъ чужая, болѣе сильная рука; а возможность насилія и грабежа не есть ли это горькая иронія надъ всемогуществомъ тѣлеснаго владѣнія? *При владѣніи, слѣдовательно, рѣчь идетъ не объ абсолютной власти лица надъ объектомъ, а лишь о власти относительной, вѣроятной.* Въ этомъ отношеніи между тѣлеснымъ и мысленнымъ владѣніемъ не существуетъ логическаго различія.

Однако вѣроятность представляетъ весьма различныя степени. Между «почти достовѣрнымъ» и «едва вѣроятнымъ» помѣщается великое множество посредствующихъ степеней вѣроятности («чрезвычайно вѣроятно», «очень вѣроятно», «довольно вѣроятно» et cet.). Какая же подразумѣвается степень вѣроятности, когда мы говоримъ о нашей власти надъ объектомъ при мысленномъ владѣніи? Отвѣтъ на нашъ вопросъ даетъ сама практическая жизнь. Обыкновенно всякій знаетъ, является ли данное отношеніе лица къ вещи еще такимъ, которое обезпечиваетъ нашу фактическую власть надъ нею, или же объектъ уже вышелъ изъ сферы нашего воздѣйствія. Подмѣчено, что простые, неученые люди, которые тщетно трудились бы надъ разрѣшеніемъ отвлеченной математической задачи, прекрасно справляются съ самыми сложными заданіями, какъ только они принимаютъ конкретную форму въ практической жизни. Наблюденіе это какъ нельзя лучше подтверждается при опредѣленіи власти субъекта надъ объектомъ при мысленномъ владѣніи. Логическій пріемъ, съ которымъ мы здѣсь имѣемъ дѣло, есть ничто иное, какъ операція, извѣстная въ математикѣ подъ именемъ теоріи вѣроятности. А между тѣмъ каждый простолюдинъ умѣетъ пользоваться этимъ пріемомъ на практическомъ поприщѣ образованія формъ для владѣнія. И приходится только удивляться остротѣ анализа и тонкости учета различныхъ возможностей, которые люди собственно проявляютъ при создаваемыхъ ими, на

*) Въ этихъ словахъ Юшкевича и ниже обнаруживается вліяніе на нашихъ юристовъ кантіанства, отрицающаго принципъ отклоненій отъ паритета въ проблемѣ обмѣна тѣлесной кредитуемой цѣнности на мыслимую безтѣлесную, записанную развѣ въ бумагѣ (см. § 1$_2$).

первый взглядъ, какъ бы машинально, формахъ мысленнаго владѣнія *). На основаніи исчисленія вѣроятности власти субъекта надъ объектомъ, предпринимаемаго въ разныхъ случаяхъ отдѣльными людьми (а вѣдь, всѣ люди въ одинаковыхъ условіяхъ мыслятъ одинаково) и передаваемаго затѣмъ отъ одного къ другому и изъ поколѣнія въ поколѣніе, образуется въ концѣ концовъ прочный осадокъ установившихся воззрѣній на формы мысленнаго владѣнія. Въ частности хозяйственная жизнь, явленія которой повторяются изо дня въ день съ извѣстнымъ однообразіемъ, представляетъ особенно благодарное поле для образованія формъ мысленнаго владѣнія. Эти-то формы владѣнія и суть именно тѣ формы, которыя, согласно даннымъ опыта, въ чрезвычайно большомъ числѣ случаевъ, съ достаточной вѣроятностію обезпечиваютъ нашу власть надъ тѣлесными вещами.

Если мы дѣйствительно угадываемъ настоящій ходъ и истинныя пружины образованія понятія о мысленныхъ состояніяхъ владѣнія, то очевидно, что эти послѣднія должны уступать тѣлесному владѣнію по степени своей практической законченности и опредѣленности въ такой же мѣрѣ, въ какой они уступаютъ ему по степени своей практической обезпеченности; въ области вѣроятнаго, за предѣлами тѣлеснаго критерія, не существуетъ непреложныхъ признаковъ владѣнія; ибо во многихъ случаяхъ можетъ не хватить достаточныхъ опытныхъ данныхъ, а потому и исчисленіе вѣроятности, вслѣдствіе отсутствія твердыхъ посылокъ, не приведетъ къ положительному результату; вмѣстѣ же съ этимъ и рѣшеніе вопроса о владѣніи станетъ сомнительнымъ и неопредѣленнымъ**). Этимъ объясняются колебанія римскихъ юристовъ.

Исчисленіе вѣроятной власти, лежащей на основаніи понятій о мысленномъ владѣніи, опирается на среднія данныя жизненнаго опыта; вслѣдствіе сего за основаніе всегда принимаются обыкновенныя жизненныя условія: чрезвычайные субъекты, объекты и обстоятельства въ расчетъ не идутъ. Стрѣлокъ-виртуозъ, процентъ попаданія у котораго достигаетъ, напримѣръ, 199 на 200, еще не можетъ претендовать на владѣніе дикимъ звѣремъ, который близко пробѣгаетъ передъ нимъ на открытомъ мѣстѣ, хотя, быть можетъ, степень власти нашего стрѣлка надъ звѣремъ гораздо болѣе вѣроятна, чѣмъ степень власти путешествен-

*) Конечно, для юридическихъ исчисленій этотъ учетъ слишкомъ близорукъ, субъективенъ, патологиченъ (см. ниже, § 8), иногда спекулативно-хищенъ по отношенію къ правамъ ближняго и къ общему благу. Даже представители царства животныхъ упражняютъ себя, какъ мы видѣли, въ анализѣ возможностей и вѣроятностей. Эта вѣроятность инстинктивная. Важна вѣроятность выправленная, математическая.

**) Потому-то и выдвигаются данныя опыта и политика ручательствъ, запасныхъ капиталовъ, страховыхъ резервовъ, залоговъ, налоговъ и фактическаго контроля съ пеней.

ника, проѣзжающаго по мѣстности, гдѣ на сто человѣкъ одинъ подвергается ограбленію (т.-е. 200:1 и 100:1), надъ своимъ кошелькомъ. Если по исключенію удастся дрессировать нѣкоторыхъ насѣкомыхъ, то изъ этого еще не слѣдуетъ, чтобы эти насѣкомыя принадлежали къ ручнымъ животнымъ и чтобы можно было обсуждать ихъ, соотвѣтственно, въ правѣ владѣнія и т. п. То же самое, наконецъ, нужно сказать и относительно обстоятельствъ, въ которыхъ происходитъ владѣніе. Во времена гражданскихъ войнъ и анархіи происходитъ, какъ извѣстно, фактически значительная перестановка въ предположеніяхъ нашей власти надъ вещами. Въ общемъ отношеніе между субъектомъ и объектомъ становится въ такія времена непосредственнѣе и тѣснѣе. Однако это нисколько не вліяетъ на понятіе о владѣніи, разъ установившееся. Но если бы мы себѣ представили, что гражданская война и анархія сдѣлались бы въ какой либо странѣ состояніемъ нормальнымъ (чему, къ счастію, исторія, кажется, не знаетъ примѣровъ), то измѣнились бы тотчасъ и формы владѣнія и при томъ окончательно. Измѣненіе это произошло бы въ направленіи общей матеріализаціи отношеній по владѣнію, а это, съ точки зрѣнія экономическаго прогресса, было бы равносильнымъ возвращенію даннаго общества къ состоянію варварства.

Подобно тому какъ мысленное владѣніе уступаетъ натуральному по степени своей практической обезпеченности и законченности (опредѣленности), такъ же точно уступаетъ оно ему и по степени непосредственности, *наличности* господства надъ матеріальнымъ благомъ. Однако и здѣсь рѣчь идетъ не о принципіальной, а только о чисто практической противоположности. Между настоящимъ и будущимъ рѣзкой границы провести нельзя. Какъ каждый моментъ настоящаго уже принадлежитъ ближайшему прошлому, такъ же точно каждый моментъ будущаго смотритъ уже въ сторону настоящаго. Слѣдовательно, непосредственно предстоящее будущеее можно разсматривать еще, какъ настоящее. Но еще и будущее, не столь близко предстоящее, представляется въ жизни, въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ, какъ настоящее, поскольку оно непосредственно должно наступить (является certum an). Изъ этого видно, что владѣніе, съ точки зрѣнія момента непосредственности, наличности, который его характеризуетъ, практически весьма растяжимо.

И такое лишь относительно наличное владѣніе имѣетъ все же еще большую цѣнность.

И такъ результатъ, къ которому мы пришли, говоритъ Юшкевичъ, таковъ: Corporaliter tenere, stare, sedere есть прототипъ и исходная точка понятія владѣнія, но отнюдь не единственная возможная его форма. Владѣніе можно представить себѣ и какъ чисто мысленное явленіе. И когда мы говоримъ о владѣніи, какъ *длящемся состояніи*, то мы не-

избѣжно допускаемъ мысленное владѣніе. «*Animo retinere possessionem nos posse*» *есть необходимый элементъ въ понятіи владѣнія.*

Теорія можетъ и должна представить основныя формы, въ которыя обращается всякое владѣніе. Такихъ формъ три:

I. Для движимостей—custodia (храненіе).

II. Для земельныхъ участковъ, какъ представителей недвижимости вообще, — категорія, которая не имѣетъ особаго техническаго наименованія и фигурируетъ у юристовъ подъ названіемъ «retinere possessionem» (на недвижимость).

III. Для рабовъ (рѣчь идетъ о римскомъ правѣ) — отношеніе, которое одинаково лишено техническаго наименованія, тоже называемое порою «retinere possessionem» *).

По Юшкевичу, надо называть юридическую теорію, которая требовала тѣлеснаго пріобрѣтенія,— *матеріалистическою*, а ту, которая допускала и чисто мысленное пріобрѣтеніе владѣнія,— *спиритуалистическою*. Вѣроятность является необходимою концепціей въ правооборотахъ спиритуалистической теоріи. Отношеніе матеріалистической и спиритуалистической теорій другъ къ другу разработано въ трудахъ той школы права, представителемъ которой является Юшкевичъ, весьма законченно и ясно.

§ 6_2. Физико-математическія аналогіи въ вопросахъ финансоваго права и политической экономіи.

Рѣшеніе вопросовъ финансоваго права и политической экономіи становится все болѣе и болѣе твердо на почву раціональныхъ математическихъ теорій и ея опытовъ; а теоріи Смита, Посошкова и пр. все болѣе и болѣе отходятъ въ область пережитковъ. Доказательствомъ этого успѣха точныхъ методовъ служатъ современныя научныя энциклопедіи **), дающія примѣчательную группу скалъ и алгебраическихъ и дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ цѣны мѣста (жилища, земли), труда, благъ и фи-

*) Въ современной цивилизаціи роль рабовъ играютъ домашнія животныя, машины, техническія служебныя сооруженія и деньги. Освобожденіе людей отъ рабства и экономической кабалы создало равенство всѣхъ классовъ передъ закономъ и рабочій вопросъ, т. е. оцѣнку мускульнаго и умственнаго труда, какъ товара, и амортизацію трудоспособности регулированіемъ, въ счетъ выручки работодателей, платы за трудъ по найму, включая въ нее и страховую премію на случай болѣзни, инвалидности и несчастій.

**) Таково Парижское изданіе: *Encyclopedie scientifique*, publiée sous la direction du *Dr. Toulouse*, куда вошелъ отдѣлъ: Bibliothèque de mathématiques appliquées, выпущенный подъ директорствомъ проф. *M. d'Ocagne*. Въ эту энциклопедію вошла примѣчательная книга извѣстнаго математика *H. Laurent*: „Statistique Mathématique“ (Paris, 1908), разсматривающая статистику, какъ экспериментальную часть раціональной политической экономіи.

нансовыхъ мѣновыхъ знаковъ (монетъ и бумажныхъ банковыхъ обязательствъ), въ связи съ количествомъ каждаго изъ этихъ цѣнныхъ элементовъ, обращающимся въ торговлѣ, и съ спросомъ рынковъ на эти элементы, какъ предметы нужды, размѣръ которой зависитъ отъ численности народонаселенія и неудовлетвореніе которой вызываетъ общественныя патологическія явленія, экономическій «голодъ» того или другого характера.

При исчисленіи цѣнъ могутъ съиграть важную роль различныя аналогіи и замѣщенія.

Аналогіи, какъ извѣстно, выражаютъ одинаковыми формулами явленія изъ различныхъ областей вѣдѣнія, повидимому, не имѣющихъ между собою ничего общаго. Психологическая ассоціація множества идей поддерживается аналогіями. Вмѣстѣ съ тѣмъ удачныя аналогіи даютъ возможность переносить предположенія и открытія, послѣ надлежащей интерпретаціи терминовъ, изъ одной области вѣдѣнія въ другую область вѣдѣнія и наоборотъ. Повѣрка этого умственнаго переноса производится на почвѣ устава, опыта и фактовъ, т. е. эмпирическаго метода.

Такъ, аналогіи могутъ служить для переноса нѣкоторыхъ формулъ научнаго естествознанія на формулы финансовой экономіи и народнаго богатства, дифференцируемаго въ средѣ частныхъ хозяйственныхъ и правовыхъ единицъ (дворовъ, хуторовъ, промышленныхъ заведеній, индивидуальныхъ рабочихъ единицъ и пр.).

Вообразимъ, что на стражѣ финансовыхъ интересовъ правовыхъ единицъ всякаго рода стоитъ въ данной странѣ *сѣть банковъ* (объективная custodia), систематически содѣйствующая — посредствомъ сохраненія и отпуска финансовой валюты (покупной силы) куда слѣдуетъ—народному творчеству и правильному рѣшенію субъективныхъ вопросовъ народной экономіи.

Дѣло дифференцированной между единицами народной экономіи, по скольку оно зависитъ отъ сѣти банковъ, оживляется и улучшается вслѣдствіе присоединенія къ операціи по дешевому отпуску финансовой валюты *обратной* кредитной операціи по вкладамъ народныхъ сбереженій разнаго рода, пускаемымъ опять въ полезный оборотъ, въ производительную работу.

При этомъ образуются два противоположныхъ, изолированныхъ другъ отъ друга теченія работающей финансовой валюты: прямое и обратное, анодное и катодное, погашающія въ конечномъ кооперативномъ разсчетѣ другъ друга такъ, какъ гаснутъ при соединеніи два равныхъ, противоположныхъ заряда электричества или же какъ получается нуль при сложеніи величинъ $+a$ и $-a$. То и другое финансовое теченіе въ изоляціи другъ отъ друга разносится какъ слѣдуетъ банкирскою сѣтью и ея счетоводами при помощи гражданскихъ бумажныхъ обязательствъ и съ помощью столбцовъ цыфръ въ бухгалтерскихъ книгахъ и статистическихъ

таблицахъ. Бумажные аппараты—документы и корреспонденція служатъ «проводниками» для тока численно выражаемыхъ зарядовъ положительной и отрицательной (прямой и обратной) финансовой валюты.

Въ эту формулу, аналогическую физико-математическимъ формуламъ, отливаются обязательства однихъ группъ общества передъ другими, взаимно выгодныя. При отсутствіи паритета между обязательствами и исполненіемъ учитывается потерянная энергія, покрываемая пенею съ неисправной стороны и интенсивностью промышленнаго производства.

Территоріальная система банковъ, какъ станцій для накопленія и передачи экономическихъ теченій въ странѣ, должна быть хорошо согласована съ задачами сложенія диференцированной (распыленной) по землѣ массовой человѣческой дѣятельности и съ задачами товарооборота для удовлетворенія жизненной человѣческой потребности.

Не будетъ удивительнымъ, если законы теченія работающей финансовой валюты между банками—резервуарами и въ народномъ хозяйствѣ, а, въ другой области вѣдѣнія, законы теченія электричества и распредѣленіе станцій и проводовъ электрической силы для опредѣленной физической или химической задачи—отольются, въ той и другой области, по одинаковымъ формуламъ алгебры и анализа.

Кромѣ того правильное теченіе экономической силы изъ банковъ, концентрирующихъ у себя въ резервуарахъ финансовую валюту, регулярно окупающее работу народныхъ силъ и машинъ въ промышленныхъ предпріятіяхъ страны, имѣетъ аналогію съ теченіемъ работающей теплоты, имѣющей механическій эквивалентъ, трактуемый въ термодинамикѣ. При этомъ въ финансовой динамикѣ теплоемкость переходитъ въ финансовую емкость вещей (считая и трудъ за вещь) при ихъ куплѣ—продажѣ; плата за передвиженіе благъ и за наемный трудъ по профессіямъ, вырабатывающимъ блага, понимается въ ея фиксированныхъ среднихъ размѣрахъ аналогично тому, какъ въ термодинамикѣ понимается механическій эквивалентъ теплоты. Скрытая теплота аналогична резервамъ финансовой валюты. Интересы труда, находящаго свой финансовый эквивалентъ и свой финансовый резервъ, при этомъ получаютъ надлежащую защиту закона, наравнѣ съ защищаемыми интересами прочихъ промышленныхъ классовъ.

Отклоненія отъ этой опорной для мысли схемы рѣшенія вопросовъ финансоваго права и народной экономіи изслѣдуются съ помощью мѣръ теоріи вѣроятностей и статистики и исчисляются какъ пертурбаціи и вѣроятныя погрѣшности, діаграммы которыхъ, аналогичныя діаграммамъ химіи и физики частичныхъ силъ, изображаются при помощи статистическихъ кривыхъ, иллюстрирующихъ возможныя случайности, ихъ бури и волны, ударяющія въ тѣ или другія установившіяся теченія и положенія.

При этомъ разныя *патологическія* отклоненія исправляются резервами, исчисляемыми по законамъ достаточныхъ основаній, включая въ этотъ кодексъ также законы большихъ и малыхъ чиселъ и вообще законы случайности, трактуемые въ теоріи вѣроятностей.

Преобразованія и векторныя математическія теоріи, нынѣ широко распространенныя въ механикѣ и въ физико-химическихъ теоріяхъ электричества, магнетизма *), свѣта и тепла **), должны получить, по аналогіи, широкое распространеніе также въ сферѣ финансоваго права, мелкаго кредита, экономіи и вообще наукъ политическихъ и общественныхъ (см. мою кн. «Матем. Статистика»).

Финансовое право, кредитъ народному творчеству и народныя сбереженія на черный день, поставленныя на почву математическихъ теорій и на почву фактовъ съ ихъ ревизіей, могутъ надежно развивать трудъ и народное богатство. Математическій методъ въ установкѣ этихъ дѣлъ имѣетъ то достоинство, что онъ объективно-нормальный, некатастрофическій для банковъ и нелихвенный въ ихъ пользу, т. е. непатологическій для остальныхъ дѣятелей-кормильцевъ и для продовольствуемыхъ предметами жизненной необходимости.

Функцію національной сѣти банковъ нужно отличать отъ функціи государственнаго эмиссіоннаго банка, выпускающаго на рынки золотыя монеты, бумажныя деньги (иначе говоря—безпроцентные займы) и размѣнныя серебряныя и мѣдныя деньги, соразмѣряя эти выпуски съ спросомъ страны на денежные знаки и съ задачей уравновѣшиванія колебанія хлѣбныхъ цѣнъ вблизи здравой нормы, отклоненной отъ народныхъ голодовокъ.

Государство, бюджетъ котораго питается налогами на все населеніе, должно и можетъ въ послѣдней высшей интегрирующей и обобщающей инстанціи покрывать отъ невзгодъ и отъ кабалы народное хозяйство своими свободными резервами и щитомъ закона. Оно должно, поэтому, концентрировать большую свободную финансовую валюту, необходимую для него, какъ для главной въ странѣ финансово-динамической силы, обязанной уравновѣшивать финансовыя теченія и товарооборотъ по главнымъ магистралямъ, развѣтвляющимся потомъ по мелкимъ путямъ страны, доминировать надъ всякою неисправностью отдѣльныхъ банковъ въ службѣ народной экономіи и питать ихъ энергію въ моменты неблагопріятныхъ стеченій обстоятельствъ, освобождая людей отъ экономической кабалы золотому тельцу.

---

*) Проф. *А. А. Эйхенвальдъ*: О магнитномъ дѣйствіи тѣлъ, движущихся въ электростатическомъ полѣ. Москва, 1904.

**) *Г. И. Лобовиковъ*: Основанія механической теоріи теплоты. Москва, 1908.

§ 6$_3$. Общегосударственная задача въ отношеніи къ мѣстному и частному праву. Политическое объединеніе.

Общегосударственная задача есть задача всеинтегрирующая въ предѣлахъ территоріи государства. При этомъ способъ общаго политическаго мышленія и масштабы его мѣръ зависятъ отъ особенностей его точки зрѣнія; оно становится на такую вышеотвлеченную, идеальную точку, съ которой милліоны людей данной національно-государственной единицы (народнаго организованнаго множества или, по Бугаеву, высшей сложной монады) представляются какъ бы органическою пылью территоріи, многочисленною какъ звѣзды небеснаго свода и проективно нарисованною на картѣ малаго размѣра.

Съ этой высшей точки зрѣнія улавливается лишь номографически главное, общее, общеполитическое, единое; мелкіе же индивидуальныя, идіографическія частности при этомъ исчезаютъ, отбрасываются какъ незамѣтныя отличія и весьма малыя величины, хотя съ мѣстной и частной точки зрѣнія, имѣющей другіе масштабы и близкую перспективу, эти мелочи суть крупныя величины и яркія отличія, кои не могутъ быть отброшены какъ нечувствительныя, т. е. безъ патологическаго толчка.

Мѣстныя и частныя задачи, слѣдовательно, не сполна захватываются общеполитическими, государственными задачами. Общеполитическое, государственное право не исключаетъ мѣстнаго и частнаго права, называемаго преимущественно обычнымъ, и задается лишь объединеніемъ всѣхъ частностей и мелкихъ территоріальныхъ единицъ на почвѣ взаимности людскихъ, повидимому, отдаленныхъ, но существенныхъ жизненныхъ интересовъ и на историческомъ умыслѣ дѣйствительнаго сохраненія родовой національно-государственной единицы въ земской вѣчности.

Идея политическаго объединенія естественнаго множества мелкихъ частныхъ и общинныхъ правовыхъ единицъ (подданныхъ монадъ) въ націю, какъ политическое организованное тѣло, вызвала къ жизни древнюю идею національной монархіи, т. е. увѣнчаннаго повелительнаго союза монарха съ рядами и общинами народнаго множества;—союза надклассоваго и вышепартійнаго, борющагося за существованіе цѣльной территоріально-родовой единицы. Матеріальная родовая одухотворенная монархія, осуществляя объединеніе и сложеніе силъ, ихъ концентрацію, стоитъ къ рядамъ и общинамъ народа въ наиболѣе непосредственныхъ и въ наиболѣе естественныхъ отношеніяхъ, сводящихъ ревизію машины посредствующихъ учрежденій къ необходимому коронно-народному контролю и къ обезпеченію совершенія государственной работы, защитной отъ поврежденія и засилія.

Юридическая политика, создавая формулы закона и институты права, можетъ устанавливать равновѣсіе силъ лишь являясь органомъ Величества, достаточнымъ, чтобы распылять торжество неправды, поврежденія и корысти и возстановлять торжество правды и милости.

Нужно ли говорить, что радикальная политическая формула народоправства (по Монтескье, Руссо и пр.) не даетъ матеріальнаго личнаго родоваго объединенія, не совмѣстима съ естествомъ сосредоточенной власти. Ибо радикальное народовластіе есть распыленіе власти, равносильное безвластію, торжеству игры случайности и юридическому безсилію насадить право защитою угнетенныхъ противъ засилія корысти и поврежденія.

Очевидно, даже геніальный полетъ фантазіи не можетъ охватить наименованіе, взаимоотношеніе (притяженіе, отталкиваніе и нейтральность) и движеніе всѣхъ мельчайшихъ будущихъ и настоящихъ единицъ, ситуируемыхъ въ пространствѣ и времени данной страны. Правительство ея можетъ охватить эту сложнѣйшую ситуацію лишь отчасти и лишь по категоріямъ (классамъ) единицъ и притомъ иногда съ грубымъ округленіемъ чиселъ. Таблицы ея и карты, поэтому, имѣютъ грубые пробѣлы, подобные дырьямъ изодраннаго кафтана, не покрывающаго всѣхъ частей защищаемаго тѣла. Поэтому кодексы и статистическіе и эмпирическіе законы большихъ чиселъ, суть лишь болѣе или менѣе планомѣрно разставленныя, необходимыя *впхи*, между которыми пустые промежутки заполняются частною самодѣятельностію единицъ, ихъ свободою и юридическими гипотезами, обращенными въ *публичныя* руководящія *догмы* права, между которыми существуютъ вѣчныя, старыя, какъ Римъ, оправдываемыя разумомъ и безчисленными извѣстными фактами. Эти догмы культурнымъ человѣкомъ всасываются въ школѣ и съ материнскимъ молокомъ и являются прописными истинами. Для всемогущей математической дедукціи эти догмы являются точками опоры, аксіомами здраваго смысла и житейскаго опыта.

§ 7. Вѣроятность и гипотезы. Необходимость работы духа въ проблемахъ общественной дифференціаціи и интеграціи. Гражданская юриспруденція на христіанской основѣ.

Теорія вѣроятностей, трактуя о *временныхъ*, на жизненные сроки разсчитанныхъ *гипотезахъ*, пріоткрывающихся въ послѣдующемъ фактѣ къ концу срока, можетъ и должна, интересуясь состоятельностью и безсмертіемъ коллективныхъ родовыхъ неумирающихъ единицъ (сложныхъ монадъ, по

ГОСУДАРСТВЕННАЯ БИБЛИОТЕКА СССР ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА

Бугаеву), какъ человѣческій родъ, раса, государство, города, поселки, областныя общественныя территоріальныя единицы и пр., помнить о важнѣйшихъ *вѣчныхъ гипотезахъ*, т. е. заходить въ трансцедентную область метафизики. Она въ границахъ своего интереса должна дѣлать это потому, что вѣчныя гипотезы и суть самыя важныя устойчивыя истины, на которыхъ, какъ на идейныхъ *камняхъ*, возводятся историческія конституціи — амортизаціи племенъ человѣческаго рода, являющіяся въ мысли твердою почвою всѣхъ построеній, интеграцій и дифференціацій.

Исходя изъ атомистическо-аритмологическаго міросозерцанія и постулируя соотношеніе вѣчныхъ гипотезъ къ временнымъ явленіямъ, приходится говорить такъ:

Міръ есть вѣчная кооперація, многоединство, безъ погрѣшности несовмѣстимое съ кабалою разумныхъ существъ кумирамъ; и, ради постояннаго исправленія наростающей смертельной погрѣшности, нельзя исходить изъ представленія о существованіи безусловно однозначной, безповоротной причинной связи явленій, не допускающей *перестановки* и *поправки* въ множественности причинъ и слѣдствій*). Кооперація, случай и юридическія гипотезы вѣчно необходимы; законъ, совѣтъ и вѣроятности суть необходимые въ жизни сознанія спиритуалистическіе пути познаванія, испытанія, правооборота, правильнаго владѣнія, размѣна и жертвъ взаимной любви.

Существенныя опредѣленія жизненной силы и силъ сознанія навсегда останутся въ наукѣ гипотетическими, воспринимаемыми общимъ взглядомъ на міръ и увѣрованіемъ; но увѣрованіе именно въ избранныя гипотезы, какъ вѣчныя, является для народовъ важнѣйшею догматическою почвою, необходимою для развитія на нихъ *мышленія*, *права* и *всякаго* болѣе или менѣе *общепринятаго знанія*. Культъ божески объективной истины, погашающей юридически огонь погрѣшностей и кабалу кумирамъ, и совѣсть, внутренній голосъ истинности, суть на крайнихъ ступеняхъ какъ обобщенія, такъ и міровой дифференціаціи, основные пути науки и вѣры.

Даже аксіомы воспріятія пространства, какъ категоріи предметнаго мышленія, ставшія твердыми членами установившагося міросозерцанія,

*) О противоположномъ взглядѣ на причинную связь явленій см. въ книгѣ *А. А. Чупрова*: Очерки по теоріи статистики. Изд. 2. Очеркъ II. С.-Петерб., 1910.— Въ исторіи развитія этихъ взглядовъ любопытно малодушество Лапласа, автора геніальнаго трактата по теоріи вѣроятностей. Живя въ вѣкъ гильотины и обоготворенія человѣческаго разума, онъ почти отрекся отъ спиритуалистическаго значенія вѣроятностей въ правооборотахъ государства и въ жизненныхъ опытахъ исторіи. Галилей менѣе малодушествовалъ передъ костромъ, нежели Лапласъ передъ гильотиной. Но за геніальные вклады Лапласа въ науку исторія, конечно, прощаетъ ему его малодушество.

имѣютъ вѣчно гипотетическій характеръ и нуждаются въ *увѣрованіи* *), какъ это выяснилось со времени Лобачевскаго и Римана.

Столь же гипотетичны объясненія законовъ всемірнаго тяготѣнія, свѣта, теплоты, электричества, химическаго притяженія и отталкиванія. Если принять атомистическую и монадологическую теорію **) за почву науки, то употребляемый нынѣ физиками міровой эфиръ, какъ посредникъ, можетъ быть замѣненъ индивидуумами, отношеніе которыхъ опредѣляется достовѣрностями и вѣроятностными функціями; при чемъ метафизика, какъ почва мысли, вѣры и науки, получитъ Лейбницевскій, Хомяковскій и Бугаевскій характеръ.

При этомъ атомистическо-аритмологическомъ міросозерцаніи правящій разумъ, который для нѣкотораго мгновенія зналъ бы всѣ дѣйствующія силы въ природѣ и взаимное расположеніе всѣхъ составляющихъ ее тѣлъ, если бы при томъ онъ былъ достаточно мощнымъ, дабы подвергнуть эти данныя вычисленію, не охватилъ бы въ одной совершенно опредѣленной формулѣ движеній величайшихъ свѣтилъ и движеній мельчайшихъ единицъ и мыслилъ бы о нихъ общими элементарными категоріями (классами), не различая иногда одной единицы отъ другой и довольствуясь лишь общими достовѣрными гранями и вѣроятностнымъ воззрѣніемъ въ опредѣленіи соотношеній между самостоятельными, самодѣятельными единицами. Онъ долженъ былъ бы для обращенія нежелательныхъ пертурбацій къ желательному міропорядку прилагать силу взысканій и гарантіи правооборота. Но достовѣрно гарантированное по категоріямъ будущее, какъ и зарегистрованное прошедшее, и размѣры новыхъ гарантій были бы открыты его взору и воздѣйствію его могущества.

Полезно сопоставить эту способность разума, трактуемую атомистическо-аритмологическимъ міровоззрѣніемъ, съ воображаемою способностью разума, трактуемаго раціоналистическимъ детерминизмомъ и обрисованнаго слѣдующими словами Лапласа: «Разумъ (une intelligence), который для нѣкотораго даннаго мгновенія зналъ бы всѣ дѣйствующія въ природѣ силы и взаимное расположеніе всѣхъ составляющихъ ее тѣлъ, если бы притомъ онъ былъ достаточно мощнымъ, дабы подвергнуть эти данныя вычисленію, охватилъ бы въ одной формулѣ движенія величайшихъ свѣтилъ небесныхъ и движенія мельчайшихъ атомовъ: ничто не было бы для него недостовѣрнымъ; будущее, какъ и прошедшее, были бы открыты его взору».

Такъ какъ вѣроятность въ исторической ситуаціи и эволюціи является существеннымъ спиритуалистическимъ элементомъ («отрицать, вѣрить и

*) См. мою книгу: «Приложеніе алгебры къ геометріи. Конкретное истолкованіе геометріи Лобачевскаго». Москва. 1897.

Г. Челпановъ: Проблема воспріятія пространства. Часть II. Кіевъ. 1904.

**) *Н. В. Бугаевъ:* Основы эволюціонной монадологіи.

сомнѣваться — говоритъ Паскаль — для человѣка то же, что для лошади бѣжать»), то, конечно, мы не принимаемъ за истину этотъ горделивый предсказаніемъ, но попадающій въ «ямы» квіетизмъ детерминизма, основаннаго на роковомъ фатализмѣ какъ аристотелевской схоластики, такъ и кантіанства, также не оставляющаго мѣста вѣроятности, всеинтегрирующей правящей заботѣ. Промысла и истинной свободѣ отъ кабалы кумирамъ.

Метафизика отнюдь не должна быть ни исключительно матеріалистической, ни исключительно спиритуалистической *). Различаютъ въ разсужденіяхъ и исчисленіяхъ, въ творчествѣ и причинныхъ связяхъ явленій тріединство: матерію (тѣло), душу и духъ. И настоящая философія, если она не ограничивается однимъ чувственнымъ міромъ, убѣждаетъ насъ въ томъ, что необходима вѣра душъ (нашихъ «я») въ сверхчувственный міръ, т.-е. религія. Нравственность души искони связана съ сокровищами религіи. Наибольшая сила нравственнаго ученія находится въ религіи и въ Евангеліи въ особенности: она превышаетъ всякую другую, трактующую о морали и основывающую гражданское право и людскія обязанности не на мертвой только буквѣ и таблицахъ закона, но и на совѣсти, на голосѣ живыхъ душъ *просвѣтленной* части народнаго множества.

Теоретическая почва истинной народоспасительной свободы впервые прочно заложена въ душахъ именно тогда, когда система христіанскаго ученія явилась со всею властью, чтобы обновить міръ. Идея истинной свободы и связи съ ближними, себѣ подобными, до того времени была совершенно чужда звѣроподобнымъ человѣческимъ созвѣздіямъ древняго міра, образцомъ котораго былъ древній Римъ съ его рабствомъ, экономическою кабалою и жестокою борьбою общественныхъ классовъ. Современный міръ воспроизводитъ снова эту жестокую борьбу классовъ и по стольку стремится къ современному рабству, по скольку онъ подчинился крѣпостной зависимости отъ классовыхъ кумировъ и міровыхъ королей золотого тельца и отрекается отъ добровольной покорности христіанскимъ юридическимъ основамъ истинной положительной коронной и народной свободы, въ правооборотахъ которой возможно рядомъ съ богачами достойное человѣческое существованіе для трудящихся классовъ, богатыхъ лишь нищетою.

Институтъ личной собственности, укрѣпляемой гражданскимъ и нравственнымъ («не укради») порядками, есть жизненно-необходимая лицевая точка опоры; однако же матеріализація права собственности есть вопросъ такой достовѣрности, которая подвержена катастрофамъ, противъ чего необходима упорная работа *цѣломудреннаго* духа и матеріальныхъ факторовъ правооборота.

---

*) *А. И. Введенскій:* Логика, какъ часть теоріи познанія. С.-Петербургъ. 1909 Приложеніе. — Въ этомъ пунктѣ теоріи А. И. Введенскаго и В. А. Юшкевича совпадаютъ.

ГЛАВА II.

Вѣроятность и повторяемыя дѣла (функціи). Quaestio facti. Статистика вѣроятностныхъ явленій и отношеніе ея матеріаловъ къ таблицамъ и чертежамъ номографическаго исчисленія и интерполированія.

§ 8_1. Объективная вѣроятность и дѣла. Патологія вѣроятностныхъ субъективныхъ взаимоотношеній и эпидемія помѣшательствъ. Спеціализація; общая согласованность спеціальныхъ функцій и профессій.

Вѣроятность есть частію субъективное (психологическое), частію объективное (статистическое) воззрѣніе, принадлежащее математическому методу изслѣдованія и вычерпываемое планомѣрно, посредствомъ наблюденія фактовъ и изъ опросовъ. Объективная вѣроятность явленія выражаетъ, какимъ должно быть *нормальное* состояніе сознанія въ вопросахъ сомнѣнія и вѣры относительно прихода и расхода преходящихъ явленій и относительно *базисовъ* (основъ) мышленія и поведенія. Субъективная же вѣроятность содержитъ въ себѣ большую или меньшую долю болѣзни сознанія, *патологію* въ вопросахъ вѣры, сомнѣнія и отрицанія.

Размноженіе крайне субъективныхъ вѣроятностей, отъ учета которыхъ зависятъ важныя взаимоотношенія въ общественной средѣ, вовлекаетъ общество, среду въ патологическій процессъ, въ панургово стадо, въ паденіе курса нормальныхъ престижей и авторитетовъ, въ эпидемію помѣшательствъ. Словесная лукавая «прикраса неправды» творитъ эту эпидемію. Хищникамъ она играетъ въ руку.

Объективная вѣроятность есть довольно сложный продуктъ разума, составленный изъ учета: 1) производящихъ причинъ явленія, 2) достаточныхъ основаній, являющихся заповѣдями дѣла и отчета и нормами права и долга, хотя и повелительными, но однакоже обходимыми при помощи разныхъ уловокъ (ибо человѣческіе законы, какъ предписанія, обставлены весьма несовершенными гарантіями ихъ исполненія), и 3) мнѣній опрашиваемыхъ добросовѣстныхъ субъектовъ, способныхъ дать правдоподобный отвѣтъ, чаще согласующійся, чѣмъ расходящійся съ истиною *).

*) *Poisson*: Recherhes sur la probabilité de jugements en matière criminelle et en matière civile.—*В. Я. Буняковскій:* Основаніе матем. теоріи вѣроятностей.

Объективная вѣроятность есть та, которая имѣетъ заповѣдь и оправданіе на дѣлѣ и передъ судомъ общества, владѣющаго методами математической критики. Такая вѣроятность есть научно-эмпирическая, математическая.

Весьма знаменитые логики дѣлали и дѣлаютъ ошибки относительно гносеологической роли объективной вѣроятности *) только отъ того, что они довольствуются пропедевтическимъ опредѣленіемъ термина: «объективная вѣроятность». Между тѣмъ болѣе глубокое опредѣленіе объективной вѣроятности вырабатывается лишь послѣ изученія теорій Я. Бернулли, Д. Бернулли, Байе, Гаусса, Пуассона, Чебышева, Бугаева, Пирсона, Лорана и пр.; вырабатывается *синтезомъ* математической вѣроятностной теоріи съ курсомъ фактовъ.

Какъ «вѣра безъ дѣлъ (безъ практики, безъ функцій, предпріятій) мертва», такъ и вѣроятность безъ наблюденія хода функцій (повторяемыхъ дѣлъ) до смерти паталогична, фантастична, недостаточно хорошо выводитъ къ правильному рѣшенію, а иногда благопріятствуетъ растовщическому хищному кредитному учету въ процентномъ отношеніи. Объективированіе вѣроятности въ большинствѣ осложненныхъ процессовъ требуетъ не только почвы теоріи, но почвы фактовъ. Статистика имѣетъ дѣло съ quaestio facti, нащупываетъ почву фактовъ.

Объективная вѣроятность созрѣваетъ путемъ *сличенія* предположеній, смѣтныхъ таблицъ, смѣтныхъ діаграммъ съ ходомъ функціонированія, съ серіями записей, таблицами и діаграммами теченія фактовъ. Удостовѣреніе почвы фактовъ и соотвѣтствующее статистическое отчетовѣдѣніе играютъ большую роль въ объектированіи вѣроятностей. Субъективная таблица вѣроятностей (смѣтная діаграмма), добытая грубыми приближенными косвенными выкладками и пробными развѣдками, доростаетъ послѣ ряда опытовъ почти до истинной объективной вѣроятности. Эти «чудеса» совершаются при условіи планомѣрно организованныхъ наблюденій; при чемъ въ планѣ наблюденія играютъ роль какъ наблюдаемая *спеціальная* вѣроятностная функція, такъ и *общій концертъ* функцій, соотвѣтствующій

*) Дж. Ст. Милль, какъ видно изъ сравненія перваго изданія его логики съ позднѣйшими изданіями, очень много путался и блуждалъ въ опредѣленіи гносеологической роли вѣроятностнаго мышленія. Ранѣе Юмъ и Кантъ сильно запутали основной принципъ въ проблемѣ кредитуемой и рискуемой цѣнности. По ихъ слѣдамъ пошли Карлъ Марксъ и неокантіанцы.

Въ замѣчательной книгѣ *А. И. Введенскаго:* „Логика, какъ часть теоріи познанія“ авторъ базируется на точномъ, но узкомъ, пропедевтическомъ опредѣленіи объективной вѣроятности. Отсюда авторъ сдѣлалъ выводъ, что „трансцедентныя гипотезы не могутъ отличаться другъ отъ друга степенями вѣроятности“. Однако же въ трансцедентное бытіе входитъ многоединство (напримѣръ, тріединство), и слѣдовательно колебаніе вѣроятности составляетъ предвѣчную способность жизни мысли въ воззрѣніяхъ отдѣльныхъ членовъ (ипостасей) многоединства. Съ другой стороны Промыслъ не былъ бы Промысломъ, если бы Онъ не допускалъ свободы и таланта; а гдѣ талантъ и свобода, тамъ и вѣроятность съ правооборотомъ.

формулѣ установившагося міровоззрѣнія и формулѣ перемѣнности въ природѣ. Взятая изъ теоретической почвы теорема Байе о связи фактовъ съ вѣроятностями и законъ большихъ чиселъ съ его достовѣрностями служатъ сцѣпленію мысли и фактовъ. Потому-то и невозможно для испытателя общества, претворяющаго мысли въ факты, раздѣлить рѣзкою чертою теорію вѣроятности отъ статистики, которая повторяетъ вѣроятность явленій подъ формой частости фактовъ.

Факты, согласные съ основными теоретическими принципами установившагося общепризнаннаго міросозерцанія, сочетающаго функціи и профессіи въ ихъ синтезѣ, имѣютъ рѣшающее значеніе въ новообразованіи духовнаго интереса, какъ и матеріальной выгоды функціонирующихъ, кооперирующихъ, конкуррирующихъ. При этомъ основные теоретическіе принципы (аксіомы, догмы, догматы) міросозерцанія не должны зависѣть отъ пертурбацій, отъ игры случайныхъ фактовъ; если такой фактъ, созданный рукою человѣка, противорѣчитъ основному принципу, то опрокидывается фактъ, какъ неисполненіе долга или же нарушеніе общепризнанныхъ требованій здраваго смысла, принципъ же сохраняетъ свою истинность и требуетъ возмѣщенія.

Вѣроятность, какъ воззрѣніе, имѣетъ дѣло съ отношеніемъ нашего знанія къ незнанію и сомнѣнію, къ философіи субъективно-безсознательнаго и къ вопросамъ раздѣленія самаго труда знанія и завѣдыванія; каковое раздѣленіе (спеціализація) совершенно неизбѣжно, ну хотя бы въ виду необъятности полнаго, цѣльнаго знанія для силъ отдѣльныхъ частныхъ индивидуальностей. Это раздѣленіе, являющееся, при его гармоничности и при условіи изощренія классовъ въ своихъ спеціальныхъ функціяхъ, условіемъ современнаго прогресса, распространено не только въ индустріи и техникѣ, но и въ политикѣ, въ наукѣ, въ научно-философской дифференціаціи.

Индустрія, напримѣръ, нынѣ вырабатываетъ товарныя массы для рынка, не зная въ точности ни потребителей этихъ массъ, ни своей предполагаемой выручки. Земледѣлецъ не увѣренъ, найдетъ ли онъ удачный сбытъ своему продукту. Сельско-хозяйственный батракъ и фабричный рабочій не знаютъ, найдутъ ли они приложеніе своему мускульному труду. Всѣ подобныя раздѣленія хороши тогда, когда они составляютъ продумываемый, натурально-планомѣрный концертъ функцій (дѣлъ, предпріятій), предполагающій *номограмму* хода фактовъ и дирижерство.

Мысленному, теоретическому концерту функцій соотвѣтствуетъ въ практикѣ концертъ профессій, которыя насаждаетъ профессіональное образованіе населенія, дѣлаемаго при этомъ завершеніи человѣческихъ типовъ трудоспособнымъ и достаточнымъ въ экономическомъ отношеніи; ибо достатокъ есть слѣдствіе не только знанія, но и умѣнья потрудиться.

§ 8_2. Два порядка записи явленій. Числовыя нормы и нарушающія ихъ бури. Улучшеніе дѣйствующихъ вѣроятностей и достовѣрностей.

Творчество *графической* науки, устанавливающее таблицами и діаграммами законы и нормы прихода и расхода, выпуска и тиража проходящихъ, текущихъ явленій и полезныхъ средствъ, опирается, кромѣ приціповъ, на точную ихъ запись.

Можно записывать явленія въ порядкѣ *измѣренія* ихъ количественныхъ свойствъ и въ порядкѣ *исчисленія*; причемъ явленіе должно быть формально «опредѣленно» въ порядкѣ ограниченія предѣлами и признаками, болѣе или менѣе ясными.

Измѣрить можно, напримѣръ, расходъ воды въ потокахъ, количество хлѣбныхъ полей, воздѣлываемыхъ въ странѣ, и пр. Учитывать же можно число людей, живущихъ въ странѣ, число лошадей, число зеренъ и пр. Объ измѣреніяхъ и ихъ погрѣшностяхъ будемъ говорить ниже (часть II).

Если же говорить объ исчисленіи явленій, если требуется исчислить вѣроятность ихъ, то бываетъ позволительно при статистическомъ опредѣленіи вѣроятностей округлять, исправлять результаты наблюденія, не выходя изъ предѣловъ, указываемыхъ теоремою Я. Бернулли и другими истинами теоріи вѣроятностей.

Предположимъ, напримѣръ, что медицина желаетъ опредѣлить вѣроятности излѣчиванія ея средствами тифозной лихорадки. Съ этою цѣлію она фактами констатируетъ, что

на	n_0	больныхъ возраста	0	излѣчивается	m_0
»	n_1	»	1	»	m_1
»	n_2	»	2	»	m_2
	. . . . .				

Числа $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_a, \ldots$ не суть совершенно устойчивыя; при повтореніи наблюденія на новой группѣ больныхъ числа эти нѣсколько измѣнились бы. Статистика опредѣляетъ среднюю (Пуассоновскую) вѣроятность p_a излѣчиванія больныхъ возраста a такъ: $p_a = m_a : n_a$, если наблюдено, что изъ n_a лицъ возраста a выздоровѣло m_a больныхъ. Но эта средняя вѣроятность не достовѣрная; истинная средняя вѣроятность бываетъ немного болѣе или менѣе $\frac{m_a}{n_a}$, какъ показываетъ теорема Я. Бернули и ея Пуассоновское обобщеніе.

Поэтому дозволительно немного округлять, измѣнять статистически опредѣляемую вѣроятность, если нужно выровнять діаграмму, какъ норму предсказательныхъ исчисленій, смѣтную норму. Существенно же ошибочною будетъ такая «поправка», которая не оправдывается теоріей и въ соотвѣтствующей практикѣ вызоветъ патологическія явленія.

Таблицы, добываемыя статистикой для исчисленія, напримѣръ, страховыхъ тарифовъ: жизненныхъ, отъ огня, отъ другихъ хозяйственныхъ кризисовъ, санкціонируются послѣ обсужденія и становятся повелительною *нормою* (номограммою) соотношеній между заинтересованными сторонами.

При выводѣ перемѣнной вѣроятности исчисляемаго массивнаго явленія берутъ изъ точныхъ статистическихъ свѣдѣній насколько возможно большое число наблюденныхъ единицъ, подходящихъ къ вопросу, и исчисляютъ среднія вѣроятности по вышеуказанному примѣру. Но таблица итоговъ единичныхъ случаевъ потомъ, для *нормировки* разсчетовъ вѣроятности, перерабатывается по *способу числового округленія* и *интерполированія* (см. ниже); она составляется для какого нибудь произвольнаго *основного* числа исчисляемыхъ единицъ, напримѣръ, для 1000 или для 10000 или для 100000; правильныя дроби отбрасываются. Въ этомъ видѣ таблица выпускается въ свѣтъ какъ показательная или же предупредительная норма взаимоотношеній того или другого рода (юридическая, медицинская, біологическая, хозяйственная, торговая, страховая и пр.). Такъ составляются, напримѣръ, таблицы смертности въ данномъ населеніи, номограммы тарифовъ: торговыхъ, путейскихъ, почтовыхъ, страховыхъ отъ огня, отъ несчастныхъ случаевъ и на случаи болѣзни, инвалидности, сиротства и пр.

Этого рода выравниванія, допускаемыя въ нормахъ учета, требуютъ осмотрительной математической критики, избѣгающей множества *парадоксовъ* (сиренъ, сциллъ и харибдъ) и имѣющей въ виду, чтобы отклоненія округленныхъ вѣроятностей отъ неизвѣстнаго истиннаго ихъ значенія не препятствовали установить въ страховомъ порядкѣ гарантіи противъ форсмажерныхъ погрѣшностей и чтобы ассимиляція числовой нормы-догмы была для общества по наглядности легка. Подобныя округленія нужно воспрещать при добываніи точнаго сырого, *истиннаго* матеріала статистики.

Неровность перемѣнности въ колоннахъ сырыхъ цыфръ статистики есть всеобщій фактъ, относящійся также и къ нравственной статистикѣ. Уже по одному этому напрасна была тревога относительно значенія нравственной статистики *). Не смотря на шероховатость или неровность, числа статистики являются важною опорою смѣтныхъ исчисленій, включая сюда и смѣты моральной статистики, обосновывающей бюджетъ въ области преступленій и тюремъ.

Нельзя также слишкомъ сильно полагаться и на прославленную устойчивость числа массовыхъ явленій въ рядѣ лѣтъ (изъ года въ годъ); не только малыя колебанія этихъ чиселъ, но и огромныя числовыя бури отмѣчаются статистикой какъ въ сферѣ физики земного шара, такъ въ природѣ человѣка (эпидеміи, войны...) и въ его общественныхъ хозяй-

*) *А. А. Чупровъ:* „Очерки по теоріи статистики. Очеркъ IV“. С.-Петербургъ, 1910. Изд. 2-е.

ственныхъ процессахъ. Важно учесть вѣроятность и размахъ этихъ бурь относительно «погоды» нормальнаго средняго типа и застраховаться отъ нихъ.

Выровненныя и отнесенныя къ опредѣленному числу единицъ среды, таблицы вѣроятностей суть руководящія абстракціи правопорядка, не столь далекія отъ *обыкновенной* конкретной дѣйствительности и легко ею ассимилируемыя въ своемъ обычномъ поведеніи среди пертурбацій и неопасныхъ пошатываній.

Предписанныя законодательною волею для постояннаго, гдѣ слѣдуетъ, употребленія, хорошія нормальныя таблицы тарифовъ и тиражей удачно перестраиваютъ субъективныя (иногда дикія, иногда хищныя) патологическія вѣроятностныя соотношенія субъектовъ къ объектамъ, улучшаютъ формулу и правила той естественной урны (среды), изъ которой людямъ выпадаютъ тѣ или другія долевыя жребіи въ игрѣ случайности. Вѣроятности, благопріятствующія растовщически хищному % учету, изгоняются, %% вдвигаются въ нормальныя границы; а вмѣстѣ съ тѣмъ перерождаются къ лучшему приближенныя человѣкотворныя достовѣрности, стремясь къ божескимъ объективнымъ достовѣрностямъ.

Трудность объективнаго опредѣленія относительныхъ достовѣрностей и вѣроятностныхъ діаграммъ явленій еще не есть поводъ отрицать эту меліорацію урны (среды) мѣрами теоріи вѣроятностей съ опытами. Точныя величины вообще опредѣляются трудно; но это не даетъ еще основанія ихъ отрицать. Положимъ, я впервые увидалъ гору Арарать, и еще не получилъ въ точности числовыхъ величинъ ея высоты, объема, вѣса, орошенія и пр. Можно ли на этомъ основаніи отрицать эти величины, характеризующія Арарать? То же самое нужно сказать о величинахъ вѣроятностей и о вѣроятностныхъ таблицахъ и діаграммахъ явленій.

§ 9. Государство и статистика. Описательная и опросная (анкетная) статистика. Статистическій методъ законодательнаго творчества и историко-статистическій методъ. Роль закона и матеріальнаго кредита въ исторической перестановкѣ причинъ при переходѣ отъ натуральнаго хозяйства къ финансовому.

I. Переходя къ выясненію собственной роли статистики, названіе которой происходитъ отъ слова: status—государство, напомнимъ, что статистика въ тѣсномъ смыслѣ слова, изучаетъ силы государства и ихъ проявленіе въ предѣлахъ территоріи, на которую распространяется авторитетъ государства. Статистика и ея бюджеты тѣснѣйше связаны съ государствовѣдѣніемъ и управленіемъ въ области народнаго хозяйства. Государство является интеграторомъ и распредѣлителемъ важнѣйшихъ силъ, поскольку онѣ могутъ находиться во власти его земскихъ констелляцій и институтовъ общегосударственнаго права. Статистика есть условіе государственнаго самопознанія.

Статистика описываетъ землю, населеніе и его инвентарь и собираетъ сырой истинный фактическій матеріалъ такъ, чтобы можно было надежными научными методами разрабатывать результаты статистическаго дознанія до той степени, которая позволяетъ предвидѣть и круглымъ счетомъ предсказывать будущее, активно наклонять исторію въ благопріятную сторону, счастливо руководить, предохранять и защищать подданныхъ государства въ ихъ личной безопасности и въ ихъ хозяйственной дѣятельности, регулировать доходы и налоги, укрѣплять полезныя предпріятія, частныя и общественныя, и экономить средства для борьбы съ невзгодами и засиліями.

Финансовая оцѣночная статистика стремится уравновѣсить тарифами, кредитомъ и налогомъ три экономическія стихіи: сельское хозяйство, наемный трудъ и движимый капиталъ, денежный и товарный.

Кромѣ внѣшне описательной статистики и финансовой оцѣночной статистики, въ управленіи культурою и людьми играетъ роль *опросная* статистика, касающаяся мнѣній и внутренней стороны человѣка.

Опросная статистика обращается съ опредѣленнымъ вопросомъ къ міру людей, способныхъ дать правдивыя показанія изъ области своихъ индивидуальныхъ фактовъ, имѣющихъ общественный интересъ. Къ матеріаламъ, получаемымъ изъ опроса человѣческаго множества, примѣняется номографическое исчисленіе, дающее интересныя діаграммы, разъясняющія общественныя загадки постольку, поскольку въ душевной области спрашиваемаго множества происходятъ противорѣчивые измѣнчивые порывы къ проявленію или, наоборотъ, удержанію, способному колебаться по вѣроятностной скалѣ, согласованной со скалою нуждъ жизни и гражданской культуры и со скалою пользъ и жертвъ разнаго рода. Здѣсь статистика встрѣчается съ удачнымъ выборомъ скалы, по которой будутъ распредѣляться собранные матеріалы, съ удачею постановки вопросовъ и съ желаніемъ и способностью опрашиваемой среды дать правдивый отвѣтъ даже въ томъ случаѣ, если имя отвѣчающихъ будетъ покрыто шифромъ, тайною какъ на исповѣди.

Анкетная статистика получила широкое развитіе въ нѣкоторыхъ странахъ, напримѣръ, въ Соединенныхъ Штатахъ Сѣверной Америки. «Тамъ—говоритъ И. И. Янжулъ *)—публика давно привыкла и хорошо оцѣнила достоинство анкетнаго способа изслѣдованія разныхъ общественныхъ и даже психологическихъ явленій. Сплошь и рядомъ тамъ въ области педа-

*) *И. И. Янжулъ*: «Очерки по вопросамъ народнаго образованія, экономической политики и общественной жизни» (сборникъ статей подъ общимъ заглавіемъ: Между дѣломъ) С.-Петербургъ 1904 г.

гогики и психологіи предпринимаются обширныя изслѣдованія статистическимъ методомъ, опросомъ многихъ лицъ, какъ взрослыхъ, такъ и маленькихъ дѣтей; собранный матеріалъ подвергается обычной въ статистикѣ обработкѣ, а выводы и заключенія подносятся публикѣ въ видѣ діаграммъ, картограммъ или просто тѣхъ или иныхъ цифръ, дающихъ возможность сужденія и проникновенія часто въ такія стороны человѣческой души, которыя безъ этого пріема оставались бы навсегда, можетъ быть, за семью печатями и недоступными для взгляда посторонняго...»

Система анкетъ въ примѣненіи къ законодательной дѣятельности называется референдумомъ. Общій референдумъ есть трудно осуществимое, затяжное дѣло. Эта система замѣняется привлеченіемъ въ законодательныя палаты выбранной доли населенія. Институтъ референдума введенъ съ 1874 года въ законы Швейцаріи. Человѣческое стадо Швейцаріи настолько ничтожно по числу, что тамъ самый процессъ референдума простъ, ясенъ и дешевъ. Референдумъ въ Швейцаріи ставитъ надъ двумя палатами депутатовъ третью инстанцію, долженствующую исправлять ошибки и злоупотребленія народныхъ представителей, волнующія народную совѣсть.

Обращеніе къ голосу народа въ извѣстныхъ случаяхъ бываетъ необходимо, имѣя въ виду зрѣлую, *порядковую* часть народа, по Паскалю— рядовой народъ, о которомъ говорится: «гласъ народа — гласъ Божій».

Точная справка тѣмъ или другимъ порядкомъ о мнѣніи народа соотвѣтствуетъ общественному или «сборному» праву (беру термины А. С. Хомякова и И. В. Кирѣевскаго), опирающемуся непосредственно на совѣсть «живыхъ душъ» просвѣтленной народности (націи), а не на букву только. Справка эта уже въ обычномъ теченіи дѣлъ (при хорошей организаціи какъ мѣстныхъ учрежденій, такъ и центральныхъ) циркулируетъ отъ верху и до низу, до мельчайшихъ коренныхъ общественныхъ единицъ (общинъ), а также отъ низу и до верху; кругъ этотъ (цѣпь прямыхъ и обратныхъ теченій справки и отчета) замыкается возможнымъ согласованіемъ (примиреніемъ) формулъ закона съ сущностью, которую онъ одѣваетъ и защищаетъ своими статутами.

Дозволительно осуществимымъ осмотрительнымъ законодательнымъ творчествомъ изслѣдовать лишь измѣнчивую область относительныхъ (приблизительныхъ) достовѣрностей и субъективныхъ вѣроятностей;—*область, гдѣ самый законъ является перемѣнною во времени и обстоятельствахъ формулою*, завися отъ приростовъ жизни, нуждъ, богатства, культуры и пр. Здѣсь только и возможно плодотворное примѣненіе законодательнаго творчества; причемъ выводъ изъ матеріаловъ изслѣдованія долженъ зависѣть не отъ *автоматическаго* счета числа голосовъ, а отъ критическаго *синтеза* этого числа съ мѣрами, открывающими цѣнныя области достовѣрности, какъ надежной директивы законодательнаго мышленія.

Достовѣрности суть духовныя цѣнности, которыми дорожитъ мысль закона. Было бы Геростратовски грѣшно, преступно примѣнять перемѣну мысли и формулъ закона къ областямъ дѣйствія непрерѣкаемой, абсолютной достовѣрности или обязанности, къ неприкосновенной суверенной святости закона, ставя неизмѣнный священный принципъ, требующій лишь исполненія или приложенія въ практикѣ, подъ знакъ вопроса или сомнѣнія и подъ судъ людской толпы; голосъ толпы не въ силахъ и, слѣдовательно, не правоспособенъ рѣшать центральнаго вопроса объ основныхъ (конституціонныхъ) формулахъ государственности государствъ, у которыхъ основные законы являются фундаментомъ строя и порядка и драгоцѣнными продуктами не момента, а многовѣковаго завѣта и опыта. Одна только постановка подобнаго вопроса публицистами и дешевыми политиками, возбуждая сомнѣніе у множественнаго цѣлаго, которое держится не однимъ только внѣшнимъ принужденіемъ, но и убѣжденіемъ (увѣрованіемъ), уже вчинаетъ неустойчивый (катастрофическій) процессъ исторіи (революцію идей); что̀ доказано на дѣлѣ исторіей Франціи, утратившей, благодаря публицистамъ, фальсифицировавшимъ съ помощію толпы общественное мнѣніе, и дешевымъ политикамъ, внутреннее равновѣсіе, а затѣмъ и міровую гегемонію, ей принадлежавшую въ XVIII вѣкѣ.

Всѣ установившіеся курсы довѣрія падаютъ у людей права и порядка отъ плохого политическаго всенароднаго выхода; открытые враги порядка и пронырливая политика хищниковъ, играющихъ обычно въ подпольѐ какъ сторона нечестныхъ и искусныхъ игроковъ, выигрываютъ матеріально (тѣлесно) на пониженіи этихъ курсовъ довѣрія.

И судъ присяжныхъ иногда выноситъ терновый вѣнецъ правдѣ.

II. Попутно съ анкетами и съ наружно описательными (этнографическими, политико—географическими и физико-географическими) элементами статистической теоріи, попутно съ изображеніемъ силъ и фигуры земли посредствомъ картограммъ (географическихъ картинъ и изолиній), характеризующихъ проявленныя способности разныхъ точекъ земного шара, необходимо эмпирически опредѣлять уклоненія итожнаго и интегральнаго тѣлеснаго повторяемаго явленія отъ центральнаго средняго до чрезвычайныхъ и форсмажерныхъ предѣловъ; а для этого вывода нужно тщательно установить историко-статистическій методъ, сличающій вѣроятныя цѣнныя ожиданія съ фактическимъ наступленіемъ и разсматривающій въ послѣдовательныхъ періодахъ (срокахъ) описываемаго и наблюдаемаго времени проявленіе и развитіе силъ въ фактахъ, въ *рѣдкихъ* буряхъ и въ нормальний *частости* фактовъ.

Историко-статистическій методъ заднимъ числомъ, на фактахъ повѣряетъ плодотворность законовъ и законодательнаго творчества; онъ разсматриваетъ не только географическую статику, но и историческую пере-

мѣнность въ культурѣ и численности населенiи и его интересовъ, совершающуюся подъ дѣйствiемъ какъ изданныхъ законовъ, такъ и различныхъ причинъ или жизненныхъ силъ, учитывая въ потокѣ времени ихъ расходъ и возстановленiе то безъ прибыли, то съ убылью, то съ прибылью.

Время входитъ въ общественно-историческiя и въ естественно-историческiя функцiи отъ многихъ перемѣнныхъ не только *явно*, но и *не явно*, посредствомъ произвольныхъ постоянныхъ и *пертурбацiоннаго* ихъ вліянiя на формулу функцiи перемѣнныхъ.

Время, пространство и автоматическая причинная связь явленiй времени на земномъ шарѣ все болѣе и болѣе побѣждаются: мысль можетъ нынѣ облетѣть кругомъ земного шара по телеграфу въ нѣсколько часовъ; а систематическое функцiонированiе мелiорацiонныхъ и страховыхъ кредитныхъ учрежденiй, сопутствующихъ налогу на доходы и эмиссiонной финансовой дѣятельности государства, вноситъ закономъ, искусствомъ мудрыхъ правительствъ и учетомъ явленiй перестановку моментовъ матерiальнаго (тѣлеснаго) владѣнiя и побѣду надъ худымъ временемъ, устраивая въ порядкѣ закона и матерiальнаго кредита обмѣнъ правъ будущаго на права настоящаго и наоборотъ. Тутъ заднiя причины (дѣйствующiя) и переднiя причины (конечныя цѣли), иначе говоря, предшествующiе и послѣдующiе моменты вступаютъ въ прагматическую (а не въ автоматическую) ассоцiацiю другъ съ другомъ и съ посредствующими фактами, какъ воплощенiями идей. Эта историческая критическая перестановка причинъ примѣчательна.

Для философiи исторiи и для историко-статистической теорiи, а также для практики современнаго хозяйства, которое стало денежнымъ, исправленiе автоматической причинной связи явленiй политикою перестановокъ имѣетъ большое значенiе, превращающее возможныя разрушительныя экономическiя катастрофы въ рядъ безопасныхъ толчковъ, работающихъ на общую и свою пользу, и тѣмъ самымъ оздоровляющее революцiонныя историческiя экономическiя воззрѣнiя.

Наибольшею подвижностью и способностью сосредоточиваться въ центрахъ промышленности обладаетъ именно денежный капиталъ, власть котораго, поэтому, можетъ закрѣпостить себѣ разбросанныя по землѣ, необъединенныя силы мелкихъ единицъ сельскаго хозяйства и свободнаго труда. Капиталистическiе тресты, монiополизируя промыслы и ставя повелительныя цѣны, являлись бы угрозою всему населенiю, если не умѣрять ихъ власть какъ налогомъ и нацiональною сѣтью банковъ, приближенною къ мелкимъ нуждамъ населенiя, такъ и рацiональною системою финансовой оцѣнки труда и размѣнныхъ экономическихъ цѣнностей.

Такъ какъ въ исторiи совершается развитiе численности человѣческаго населенiя, избытки котораго должны населять не перенаселенныя

пространства земли и ненасыщенныя трудомъ дѣла, то политика перестановокъ должна предусматривать переселенiя избытковъ населенiя и развитiе предпрiятiй въ новыхъ областяхъ труда людей. Поэтому поправка автоматической причинной связи должна не подавлять, а поощрять положительную, промышленную свободу внутренняго капитала, пока свобода эта имѣетъ цѣлью творчество и не перешла въ status in statu, въ засилiе, въ отрицательное явленiе, въ закрѣпощенiе капиталу; противъ чего, конечно, государство сохраняетъ за собою достаточныя гарантiи.

Всѣ силы населенiя съ потомствомъ, поскольку онѣ организовали себя подъ щитомъ права, должны быть сбережены, использованы въ дѣлѣ и амортизированы въ рядахъ поколѣнiй. Честная политика не должна измѣнять не только крупнымъ величинамъ, но и «малымъ симъ».

III. Свобода иностраннаго денежнаго капитала представляетъ особенно острую опасность относительно возможности закрѣпощенiя ему внутреннихъ экономическихъ теченiй. Поэтому прикрытый законами и кустодiей сосудъ (урна), называемый самостоятельнымъ государствомъ (нѣчто вродѣ «изолированнаго государства» фонъ-Тюнена,—государства безъ «оконъ» и «дверей», подобно Лейницевой монадѣ), если и можетъ допустить «открытыя двери» по отношенiю къ международному сношенiю, то отверстiя эти должны быть раскрыты не слишкомъ широко и притомъ на основѣ строгой торговой международной компенсацiи (копѣйка за копѣйку, очко за очко); въ противномъ случаѣ страна будетъ экономически завоевана иностраннымъ капиталомъ и нашествiемъ и иностранною культурою.

§ 10. Вѣроятности жизни и смерти индивидуумовъ населенiя, даваемыя статистикой. Движенiе численности населенiя. Давленiе народовъ другъ на друга.

Вѣроятностныя таблицы жизни и смерти индивидуумовъ населенiя, въ виду безконечной запутанности жизненныхъ явленiй, могутъ быть опредѣлены по соображенiямъ закона большихъ чиселъ, лишь эмпирически изъ большого числа наблюденiй. Онѣ опредѣляются съ запозданiемъ, заднимъ числомъ, и при одинаковости обстоятельствъ переносятся на ближайшее будущее поколѣнiе при современныхъ ему разсчетахъ, касающихся его индивидуумомъ. Замѣщенiе подобныхъ (см. § 4) здѣсь дѣйствуетъ во всей своей силѣ, если какiя либо исключительныя обстоятельства не препятствуютъ такому переносу таблицъ одного поколѣнiя на жизненные учеты другого поколѣнiя. *Освѣженiе* таблицъ производится постепенно.

Таблицы смертности необходимы: 1) для обществъ по страхованiю жизни *) при установленiи тарифа; 2) для всѣхъ лицъ, кои желаютъ учре-

*) *Е. Савичъ.* Элем. теорiя страхованiя жизни и трудоспособности. С.-Петерб., 1900. *С. П. Луневскiй.* Курсъ страхованiя жизни и трудоспособности. С.-Петерб., 1910.

дить кассу взаимопомощи съ филантропическими цѣлями; 3) таблицы смертности, въ соединеніи съ таблицами заболѣваемости, позволяютъ обезпечить помощь рабочимъ въ случаѣ болѣзни и въ случаѣ необходимости предоставить пожизненную пенсію въ старости; 4) онѣ суть драгоцѣнныя вспомогательныя руководства для медиковъ въ множествѣ случаевъ.

Таблицы, относящіяся къ рождаемости и смертности, освѣдомляютъ націи о способѣ, коими онѣ могутъ сохраняться въ случаѣ безлюдства и зачинающагося вырожденія, какъ во Франціи.

Скажемъ въ заключеніе, что таблицы смертности и прироста народонаселенія позволяютъ вычислить стоимость пользованія вещами и стоимость полной собственности.

Вильфредъ Парето при помощи статистики, примѣненной къ нѣсколькимъ странамъ, констатируетъ уменьшеніе брачности, когда цѣна ржи увеличивается и наоборотъ.

Пусть изъ обозрѣнія огромнаго числа N лицъ, жизнь и смерть которыхъ наблюдена, выведенъ рядъ (таблица):

$$l_x,\ l_{x+1},\ \ldots,\ l_{x+n},\ l_{x+n+1},\ \ldots,$$

изображающій числа остающихся живыми въ возрастахъ

$$x,\ x+1,\ \ldots,\ x+n,\ x+n+1,\ \ldots$$

Введемъ обозначеніе:

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Очевидно:

$$l_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots$$

(до конца таблицы).

Вѣроятность p_x лицу въ возрастѣ x лѣтъ остаться живымъ въ теченіе слѣдующаго года статистически опредѣляется такъ:

$$p_x = l_{x+1} : l_x.$$

Вѣроятность q_x лицу въ возрастѣ x лѣтъ умереть въ теченіе слѣдующаго года статистически опредѣляется такъ:

$$q_x = d_x : l_x.$$

Эти положенія стали издавна твердымъ членомъ установившагося міровоззрѣнія статистиковъ. Критика, основанная на строгихъ выводахъ теоріи вѣроятностей, признаетъ необходимость этого твердаго опредѣленія, ибо оно есть лучшее изъ худыхъ опредѣленій. Но необходимо также

принять въ разсчетъ другой твердый членъ теоріи, говорящій, что въ этомъ опредѣленіи всегда есть нѣкоторая погрѣшность *).

Таблица смертности:

$$l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_x, l_{x+1},\ \ldots$$

устанавливаетъ въ смѣтномъ порядкѣ нормальный выморочный расходъ (тиражъ) человѣческаго населенія. Приходъ же населенія обусловливается браками и рождаемостью, восполняющею народонаселеніе.

Подъ «народонаселеніемъ» разумѣютъ численность одновременно живущихъ на данной территоріи людей. Его приростъ зависитъ отъ взаимоотношенія числа рожденій и смертей, съ одной стороны, а также отъ эмиграціи (выселенія) и иммиграціи (притока населенія изъ другихъ территоріальныхъ единицъ). Статистическія изслѣдованія въ большинствѣ странъ показываютъ постоянный перевѣсъ числа рожденій надъ числомъ смертныхъ случаевъ, что составляетъ «естественный приростъ народонаселенія». Въ перенаселенныхъ странахъ бываетъ еще перевѣсъ эмигрантовъ надъ иммигрантами. Исключивъ этотъ перевѣсъ изъ естественнаго прироста населенія (а въ колонизуемыхъ странахъ прибавивъ перевѣсъ иммигрантовъ надъ эмигрантами), получимъ «дѣйствительный приростъ народонаселенія».

За 1871—80 гг. оба вида прироста народонаселенія въ главнѣйшихъ государствахъ характеризуются слѣдующими данными **) на *тысячу* жителей:

	Естеств. приростъ.	Дѣйств. приростъ.
Германія	11,9	10,1
Австрія	7,5	7,0
Венгрія	2,3	0,8
Франція	1,7	2,0
Великобританія	14,1	13,2
Ирландія	9,2	—4,4
Италія	7,0	5,7
Россія	13,7	14,2
Швейцарія	7,3	6,5
Бельгія	9,8	9,2

*) *А. Ю. Давидовъ:* 1) „Теорія среднихъ величинъ, съ приложеніемъ ея къ составленію таблицъ смертности". Москва, 1857, 2) „Приложеніе теоріи вѣроятностей къ статистикѣ". Учено-литературныя статьи профессоровъ и преподавателей Моск. Унив., изданныя по случаю столѣтняго юбилея Москва. 1855.

**) Проф. *Карлъ Фуксъ*: „Политическая экономія. Переводъ подъ редакціей Кеченджи-Шаповалова. С.-Петербургъ. 1908. Нѣсколько отличныя цифры естественнаго прироста извлекаются изъ данныхъ, приводимыхъ въ книгѣ *H. Laurent*: Statistique Mathématique. Paris. 1908.

	Естеств. приростъ.	Дѣйств. приростъ.
Нидерланды	12,1	11,7
Данія	12,0	9,8
Швеція	12,3	9,1
Норвегія	13,9	9,9

Франція представляетъ примѣръ опасности слабаго естественнаго прироста; ей грозитъ напоръ плодовитыхъ сосѣдей, вынуждающихъ ее пополняться иммиграціей, несмотря на то, что она плотно населена.

Обратная опасность зависитъ отъ чрезмѣрнаго прироста населенія. Священникъ Мальтусъ первый указалъ на эту опасность, когда въ послѣдней четверти 18-го вѣка и первой 19-го вѣка, съ побѣдой фабричнаго способа производства, въ Англіи въ новыхъ промышленныхъ центрахъ появились обширные кадры безземельнаго «пролетаріата». Съ тѣхъ поръ призракъ «перенаселенія» не перестаетъ тревожить умы.

Вышеприведенное сличеніе естественнаго и дѣйствительнаго приростовъ народонаселенія въ различныхъ государствахъ устанавливаетъ между прочимъ, что иностранная колонизація въ предѣлы Россіи перевѣшиваетъ эмиграцію изъ Россіи; перевѣсъ выражается числомъ 0,9 на тысячу жителей, т. е., около 140000 на всю Россію ежегодно. Если детальнѣе разсмотрѣть это явленіе, то замѣтимъ, что оно развивается преимущественно у западныхъ границъ. Колонизація, начавшаяся съ 1861 года благодаря политикѣ «открытыхъ дверей» (до того она равнялась почти нулю), дала къ настоящему времени опредѣленную картину иностраннаго резерва въ Россіи, легко извлекаемую изъ данныхъ оффиціальной статистики (*Ежегодникъ Россіи*).

Вся вообще колонизація съ Запада, развивающаяся по линіямъ наименьшаго сопротивленія, вытѣсняетъ коренные этническіе элементы Россіи на Востокъ; а отсюда ихъ гонитъ въ противоположную сторону желтая раса, желтая опасность. «Россія—говоритъ Д. И. Менделѣевъ—есть особая страна, стоящая между молотомъ Европы и наковальней Азіи, долженствующая такъ или иначе ихъ помирить».

Это явленіе совершается столько же подъ дѣйствіемъ политическихъ факторовъ, сколько и подъ вліяніемъ соціально-экономическихъ мотивовъ, — совершается столько же по естественнымъ путямъ, какъ моря и рѣки, сколько и по современнымъ искусственнымъ путямъ.

Итакъ, при соприкосновеніи этническіе элементы, подобно молекулярнымъ химическимъ элементамъ, движущимся въ физическихъ тѣлахъ, *производятъ другъ на друга давленіе и диффундируютъ.*

Менделѣевская статистическая этническая *центрографія* *), связанная съ обозначеніемъ на картѣ плотности населенія территоріальныхъ единицъ и распространенная, какъ методъ или правило, на всю страну и на отдѣльныя ея части, а также на разныя этническія разновидности, коренныя и пришлыя, способна, по перемѣщенію центровъ въ рядѣ лѣтъ исторіи, суммарно взвѣшивать вышеупомянутыя «молекулярныя» давленія другъ на друга этническихъ элементовъ и иллюстрировать ихъ диффузію и сторону наименьшаго сопротивленія.

§ 11. Законъ Мальтуса.

Пусть p_0 есть численность населенія страны въ моментъ t_0 и p ея населеніе въ послѣдующій моментъ t. Предположимъ сначала, что нѣтъ ни эмиграціи, ни иммиграціи. Во время dt населеніе возрастетъ на положительное (или отрицательное) количество dp, которое, конечно, пропорціонально p и dt, если населеніе остается постояннымъ въ своихъ обычаяхъ, нравахъ и т. д. Слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$dp = k \,.\, p \,.\, dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

k означаетъ постоянный коэффиціентъ; интегральное же уравненіе будетъ:

$$p = p_0 \,.\, e^{k\,(t-t_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Итакъ, народонаселеніе возрастаетъ или убываетъ въ геометрической прогрессіи. Это и есть законъ Мальтуса. Количество $k \,.\, p$ есть *скорость* роста народонаселенія.

Статистики доказываютъ, что народонаселеніе въ Америкѣ удваивается въ 25 лѣтъ. Законъ измѣненія народонаселенія въ Европѣ ни коимъ образомъ не подчиняется закону Мальтуса. Однако же онъ ошибоченъ не болѣе, чѣмъ ошибоченъ въ ученіи о газахъ законъ Маріотта, вѣрный въ тѣсныхъ предѣлахъ. При выходѣ изъ этихъ предѣловъ параметры k и p_0 измѣняетъ свое значеніе, т. е. они *постоянны относительно;* аритмологически же они перемѣнны, дѣлаютъ замѣтные или же незамѣтные *скачки*. При томъ внѣшнія пертурбаціи могутъ присоединять къ формулѣ добавочные члены. Поэтому отношеніе къ закону Мальтуса нужно не автоматическое и не догматическое (непререкаемое), а *критическое*, соединенное съ наблюденіями.

Законъ Мальтуса часто оправдывается для животныхъ. «Я воспитывалъ—говоритъ H. Laurent **)—въ теченіе года пару мышей, и къ концу

*) *Д. И. Менделѣевъ*: Къ познанію Россіи. Часть II, о центрѣ Россіи. С.-Петербургъ, 1906.

**) *H. Laurent*: Stat. Mathém., n° 39.

года ихъ было уже болѣе ста. Кролики сдѣлались настоящимъ бичемъ въ Австраліи, гдѣ дѣлаютъ все возможное, чтобы ихъ истребить, и не достигаютъ цѣли. Съ другой стороны самки селедки содержать въ своемъ чревѣ тысячу икринокъ. Присоединимъ къ этому, что самка способна метать икру одинъ разъ въ жизни въ десятилѣтнемъ возрастѣ и послѣ того немедленно умираетъ, оставляя послѣ себя 500 самокъ. Вычисляя, какова должна быть въ настоящее время численность селедочныхъ самокъ въ океанѣ въ предположеніи, что въ день рожденія Христова въ морѣ была только одна самка, найдемъ, что это рыбное населеніе было бы таково, что оно не могло бы помѣститься въ объемѣ воды, равнымъ объему сферы, которой радіусъ равенъ разстоянію земли отъ солнца.

Что же это значитъ? Законъ Мальтуса, вѣрный въ извѣстныхъ случаяхъ, вѣрный въ теоріи, оказывается ошибочнымъ въ огромномъ большинствѣ случаевъ.

Ошибка разсужденія состоитъ въ томъ, что мы повѣрили, будто $dp = k \,.\, p \,.\, dt$; повѣрили, будто численность населенія находится въ одинаковыхъ условіяхъ относительно *возможности прироста*, по мѣрѣ того, какъ она возрастаетъ. Особенно замѣтимъ, что эммиграція равна абсолютному нулю, если p обозначаетъ численность населенія всего земного шара въ моментъ t.

На менѣе обширной скалѣ, одинаковыя причины препятствуютъ неограниченному размноженію человѣческихъ расъ. Недостатокъ пропитанія— вотъ что мѣшаетъ размноженію до безконечности.

Констатируется, что всюду, гдѣ велика смертность, велика и рождаемость, и наоборотъ. Опустошенія, дѣлаемыя смертью, стремятся восполниться этою самою игрою силы природы.

Болѣе велика рождаемость мальчиковъ, чѣмъ дѣвочекъ; смертность также болѣе велика среди мужчинъ, чѣмъ среди женщинъ.

Въ дѣйствительности законъ Мальтуса таковъ: численность населенія имѣетъ стремленіе возрастать въ геометрической прогрессіи, тогда какъ средства существованія возрастаютъ въ ариѳметической прогрессіи. Но еще не видно, какъ можно доказать существованіе ариѳметической прогрессіи Мальтуса.

Одна изъ причинъ, которая способствуетъ измѣненію (модификаціи) закона Мальтуса, есть эмиграція и иммиграція. Такъ, на *тысячу* жителей приходится:

	коренныхъ:	пришлыхъ:
Въ Парижѣ. . . .	322	678
» Римѣ.	446	554

	коренныхъ:	пришлыхъ:
» Берлинѣ. . . .	437	563
» Вѣнѣ.	385	615
» Лондонѣ. . . .	629	371

Въ дѣйствительности формула $dp = k \,.\, p \,.\, dt$ точна въ предположеніи, что dp пропорціонально p въ теченіи короткаго періода времени. Но вообще k есть функція времени, если нѣтъ ни эмиграціи, ни иммиграціи.

Если происходитъ эмиграція или иммиграція, то нужно присоединить поправочный членъ; получимъ формулу:

$$dp = kp \,.\, dt + l \,.\, dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ k и l суть постоянныя для малаго періода времени. Количество l служитъ мѣрою эмиграціи или иммиграціи, оно есть скорость прироста, зависящаго отъ причинъ *искусственныхъ* (artificielles)». (Лоранъ).

§ 12. Отношеніе таблицъ эмпирическихъ функцій одного независимаго перемѣннаго x къ таблицамъ отвлеченныхъ функцій.

Послѣ того, какъ для изслѣдуемаго перемѣннаго предиката x, принадлежащаго большому числу m наблюдаемыхъ предметовъ, собранъ фактическій сырой истинный матеріалъ, опредѣляющій числа v_x предметовъ, соотвѣтствующія каждому частному значенію перемѣннаго x,—послѣ этого получается числовая эмпирическая функція v_x перемѣннаго x. Эту функцію можно записать въ форму таблицы.

Вообразимъ, что всѣ возможныя наблюденныя значенія x записаны въ *возрастающемъ* порядкѣ въ слѣдующей строкѣ:

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_l, \; \ldots, \; x_a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Соотвѣтственныя же значенія функціи v_x пусть представляются слѣдующею строкою:

$$v_{x_1}, \; v_{x_2}, \; \ldots, \; v_{x_l}, \ldots, \; v_{x_a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Воображая себѣ *таблицу* функціи v_x, нужно думать, что эти двѣ строки записаны въ двѣ вертикальныя колонны или графы такъ, что значенія x_l и v_{x_l} размѣщаются въ одной и той же горизонтальной линіи— строкѣ, отмѣчаемой по порядку числомъ l. Будемъ въ ту же табличную горизонтальную строку, въ четвертую колонну записывать разность $v_{x_{l+1}} - v_{x_l}$, которую обозначимъ символомъ Δv_{x_l},

$$\Delta v_{x_l} = v_{x_{l+1}} - v_{x_l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

Четвертая колонна закончится въ предпослѣдней табличной строкѣ, гдѣ будетъ стоять послѣдняя разность $\Delta v_{x_{a-1}}$. Таблица будетъ имѣть слѣдующій видъ:

№ строки.	x	v_x	Δv_x
1	x_1	v_{x_1}	Δv_{x_1}
2	x_2	v_{x_2}	Δv_{x_2}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
l	x_l	v_{x_l}	Δv_{x_l}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$a-1$	x_{a-1}	$v_{x_{a-1}}$	$\Delta v_{x_{a-1}}$
a	x_a	v_{x_a}	—

Первая колонна этой таблицы опредѣляетъ порядокъ, содержитъ порядковое число l, именно: нумерацію строкъ. Содержаніе таблицы дается остальными цыфровыми колоннами или графами.

Согласно обозначенію (III), разность Δv_{x_l} есть приростъ функціи v_{x_l}, соотвѣтствующій приросту перемѣннаго x_l на величину своей табличной разности $x_{l+1} - x_l$, которую обозначимъ чрезъ Δx_l,

$$\Delta x_l = x_{l+1} - x_l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

Изученіе *приростовъ* или *дифференціаловъ* представляетъ интересъ не только въ чистой математикѣ, но и во всѣхъ ея приложеніяхъ къ естествознанію, статистикѣ, экономіи и праву.

Четвертая колонна вышеприведенной таблицы, содержащая приросты или диффиренціалы функціи v_x, выводится простымъ разностнымъ исчисленіемъ изъ третьей колонны. Наоборотъ третья колонна той же таблицы выводится интеграціей, т. е. сложеніемъ; выводится изъ четвертой колонны, *если данъ какой нибудь одинъ членъ третьей колонны.*

Въ самомъ дѣлѣ нетрудно установить тождественное уравненіе:

$$v_{x_l} = v_{x_1} + \Delta v_{x_1} + \Delta v_{x_2} + \ldots + \Delta v_{x_{l-1}}; \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

нетрудно также установить, что

$$v_{x_l} = v_{x_s} + \Delta v_{x_s} + \Delta v_{x_{s+1}} + \ldots + \Delta v_{x_{l-1}}. \quad . \quad . \quad (VI)$$

если $l > s$; а если $l < s$, то будемъ имѣть:

$$v_{x_l} = v_{x_s} - (\Delta v_{x_l} + \Delta v_{x_{l+1}} + \ldots + \Delta v_{x_{s-1}}). \quad . \quad . \quad (VII)$$

При счетѣ табличныхъ строкъ отъ «начальной» строки s, занимающей *центральное* положеніе въ таблицѣ, величины x_s и v_{x_s} называются центральными или «начальными» значеніями перемѣнныхъ x_l и v_{x_l}.

Форма вышеприведенной таблицы сохраняется и тогда, когда эта таблица не статистическая, а можетъ быть, чисто математическая, абстрактная; напримѣръ, вторая колонна можетъ представлять *отборный* рядъ отвлеченныхъ первоначальныхъ чиселъ x (Эратосфеново рѣшето), или отборный рядъ первичныхъ чиселъ x *) и пр., а третья графа можетъ представлять одну изъ *аритмологическихъ* функцій числа x, играющихъ роль въ теоріи чиселъ, въ анализѣ **) и въ алгебрѣ (напримѣръ, въ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій высшихъ степеней).

Такимъ образомъ, чистая, отвлеченная теорія аритмологическихъ функцій можетъ быть приложена къ функціямъ статистическимъ, эмпирическимъ, имѣющимъ конкретное значеніе, когда, напримѣръ, въ таблицѣ функціи v_x вторая колонна будетъ представлять число x_l умершихъ въ возрастѣ моложе l лѣтъ изъ даннаго числа N родившихся, а третья колонна можетъ представлять какое либо количественное слѣдствіе выморочнаго процесса или же, наоборотъ, какую либо количественную причину его.

§ 13. Понятіе о рѣшетахъ, нарушающихъ ариѳметическую прогрессію перемѣннаго, и о числовыхъ уплотненіяхъ въ истинныхъ сырыхъ таблицахъ. Аритмологическія особенности перемѣннаго x въ пунктахъ уплотненія и разрѣженія.

Если разность Δx_l смежныхъ значеній перемѣннаго x для всѣхъ значеній цѣлаго числа l отъ 1 до $a-1$ есть *постоянная* величина h, то вторая колонна обсуждаемой таблицы, опредѣляющая рядъ значеній перемѣннаго x, представитъ ариѳметическую прогрессію съ разностью h. Такое перемѣнное x назовемъ *ариѳметически прогрессивнымъ перемѣннымъ*. Скала этого перемѣннаго ниже названа *правильною*.

Но статистика и чистая математика часто имѣютъ дѣло съ такими *шероховатыми* рядами значеній прерывнаго перемѣннаго x, въ которыхъ разность Δx не сохраняетъ постояннаго значенія. Въ такомъ случаѣ чрезъ h мы будемъ обозначать общую наибольшую мѣру всѣхъ разностей:

$$\Delta x_1, \quad \Delta x_2, \ldots, \quad \Delta x_l, \ldots, \quad \Delta x_{a-1};$$

*) *Н. В. Бугаевъ:* Ученіе о числовыхъ производныхъ.

**) *Д. М. Синцовъ:* Раціональные интегралы линейныхъ уравненій. Казань 1898.

а соотвѣтствующій рядъ значеній перемѣннаго x, наполняющихъ вторую графу таблицы, будемъ называть *скалярнымъ рѣшетомъ*. Всѣ разности Δx_l будутъ удовлетворять неравенству:

$$\Delta x_l \geqq h$$

и всѣ отношенія:

$$\frac{\Delta x_1}{h}, \quad \frac{\Delta x_2}{h}, \ldots, \quad \frac{\Delta x_l}{h}, \ldots, \quad \frac{\Delta x_{a-1}}{h}$$

будутъ *цѣлыми* положительными числами, у которыхъ общій наибольшій дѣлитель есть 1.

Если числа Δx_1, $\Delta x_2, \ldots$ *несоизмѣримыя*, то въ популярномъ смыслѣ мѣры h не существуетъ; математики же считаютъ мѣру h безконечно малою величиною.

Сверхъ того, если перемѣнное x аналитически *непрерывное*, то математики, разсматривая разность смежныхъ значеній непрерывно возрастающаго перемѣннаго, обозначаютъ эту разность символомъ dx, считая величину dx безконечно малою; она же есть величина h.

Случаи, когда h безконечно мала, назовемъ вообще запредѣльными, трансфинитными. Эти случаи хотя и мыслятся, но выходятъ за предѣлы нашихъ грубыхъ ощущеній.

Таблицы необъятныхъ, безконечныхъ размѣровъ, мыслимыя въ умѣ, разбиваютъ на части (области), и каждый кусокъ таблицы трактуютъ отдѣльно, распространяя на него, какъ таблицу, аналогическое понятіе о мѣрѣ h, объ ариѳметической прогрессивности перемѣннаго или, наоборотъ, рѣшетистости его. Въ тѣхъ областяхъ таблицы съ значеніями разностной функціи Δv_x и ея интеграла v_x, въ которыхъ перемѣнное x представляетъ «рѣшето», графическая картина (см. ниже) функцій Δv_x и v_x представляетъ своеобразный (особый) характеръ.

Классическій примѣръ скалярнаго рѣшета представляетъ «Эратосфеново рѣшето», обнимающее безконечный рядъ первоначальныхъ чиселъ; при этомъ функціи v_x и Δv_x перемѣннаго первоначальнаго числа подчиняются особому весьма примѣчательному интегральному и дифференціальному исчисленію, изложенному въ геніальномъ трудѣ *Н. В. Бугаева*: «Ученіе о числовыхъ производныхъ» (Математ. Сборн., томъ V). Другія скалы теоріи чиселъ (аритмологіи) ведутъ къ другимъ типамъ интегральнаго и дифференціальнаго аритмологическаго исчисленія.

Какъ ни причудливы законы числовыхъ интеграцій и дифференціацій, они наблюдаются въ природѣ вещей. Въ моменты рѣзкаго нарушенія ариѳметической прогрессивности приростовъ перемѣннаго x происходятъ иногда критическіе переходы частичныхъ тѣлъ изъ одного физическаго

или химическаго состоянія въ другое (твердое тѣло переходитъ въ жидкое и пр.); «чудеса» физико-химическихъ явленій укладываются въ формулы аритмологіи *).

Остановимъ вниманіе еще, напримѣръ, на слѣдующемъ примѣчательномъ аритмологическомъ свойствѣ предѣльныхъ числовыхъ функцій, зависящемъ отъ особенностей характера перемѣннаго x.

Пусть перемѣнное x способно принимать лишь значенія вида $x = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q суть цѣлыя взаимно простыя числа. Иначе говоря, x обнимаетъ совокупность *всѣхъ* чиселъ, кромѣ чиселъ, несоизмѣримыхъ съ 1. Въ этомъ случаѣ вышеуказанная мѣра h будетъ неуловимымъ, безконечно малымъ числомъ δx; и тѣмъ не менѣе возрастающій рядъ значеній x будетъ прерывнымъ, аритмологическимъ, съ пропускомъ всѣхъ несоизмѣримыхъ чиселъ **). Если этотъ рядъ нанести на скалу перемѣннаго x, какъ указано ниже (§ 14_2), то получится *пунктиръ*. Пусть точки этого пунктира не пропускаютъ чрезъ себя воображаемыхъ микробовъ; тѣмъ не менѣе мыслима микробная субстанція, существа которой имѣютъ столь малыя тѣльца, что они проскочатъ въ промежутки между точками пунктира, а также передадутъ волны своей среды черезъ пунктирную преграду, съ одной стороны на другую.

Метафизическій характеръ разсматриваемой проницаемости преграды состоитъ въ томъ, что нѣтъ микроскопа съ конечною силою увеличенія, чрезъ который можно было бы разсмотрѣть толщину проскакивающихъ чрезъ щели воображаемыхъ микробовъ и измѣрить діаметръ δx щели между двумя данными смежными точками пунктира. И тѣмъ не менѣе существуютъ въ физикѣ и химіи и въ сосудистыхъ органахъ живыхъ организмовъ явленія проницаемости и просачиванія, кои могутъ быть объяснены только допущеніемъ подобныхъ неуловимыхъ никакимъ микроскопомъ щелей.

Когда x есть перемѣнный предикатъ (способность, признакъ, принадлежность) индивидуумовъ, когда существуетъ зависящая отъ x функція v_x, обнаруживающаяся какъ наблюдаемый и записываемый *фактъ*, тогда соотвѣтствующая статистическая таблица значеній этой функціи устанавливаетъ именно этотъ сырой конкретный фактъ.

Представимъ величины $x_1, x_2, \ldots, x_a$ отрѣзками на данной линіи, откладывая ихъ отъ даннаго начала O и опредѣляя ихъ размѣръ при помощи даннаго масштаба, принятаго за единицу. Концы этихъ отрѣзковъ, несовпадающія съ O, обозначимъ тѣми же символами $x_1, x_2, \ldots, x_a$.

---

*) *В. Г. Алексѣевъ.* О совпаденіи методовъ формальной химіи и символической теоріи инваріантовъ. (Журн. русск. физико-химич. Общества. Томъ 33. 1901).

**) См. „Сборникъ статей Пуанкаре, Гельмгольтца, Кронекера и др. по основаніямъ ариѳметики». Переводъ подъ редакціей *Н. И. Парфентьева*. Казань. 1906.

Плотностью d наполненія отрѣзка (x_1, x_a) точками $x_1, x_2, \ldots, x_a$ будемъ называть число, опредѣляемое по формулѣ:

$$d = \frac{a}{l},$$

гдѣ l есть длина отрѣзка (x_1, x_a), $l = |x_a - x_1|$.

Можемъ, дѣля отрѣзокъ (x_1, x_x) скалярной линіи на части, опредѣлять плотности наполненія этихъ частей тѣми изъ точекъ $x_1, x_2, \ldots, x_a$, кои на нихъ будутъ лежать. Плотности эти могутъ оказаться иногда равномѣрными и совпадающими съ общею плотностью d, иногда же различными, причемъ общая плотность d будетъ среднею величиною.

Если при этомъ вышеуказанная таблица функціи v_x будетъ представлять рѣшета, то плотность наполненія соотвѣтствующихъ частей отрѣзка (x_1, x_a) точками $x_1, x_2, \ldots, x_a$ окажется неравномѣрною.

Истинныя, *сырыя* статистическія таблицы, неподвергнутыя искусственнымъ выравниваніямъ, часто представляютъ какъ рѣшета, такъ и неравномѣрную плотность.

Такъ, истинная таблица смертности, показывающая цѣлыя числа пережившихъ возрастъ x, изъ даннаго зарегистрированнаго числа m родившихся, и съ абсолютною точностью регистрирующая именно тѣ моменты x, когда совершаются умиранія, уменьшающія число v_x (а въ промежуткѣ между смежными смертными моментами сохраняется *постоянство* числа v_x), представляетъ рѣшета, бросающіяся въ глаза особенно для предѣловъ старчества; а въ младенческомъ возрастѣ наблюдается уплотненіе точекъ x возрастной скалы (x_1, x_a).

Если далѣе классифицировать причины смертныхъ случаевъ *) (по родамъ болѣзни, по полу, по наслѣдственнымъ признакамъ и проч.) и составить отдѣльныя таблицы смертности для каждаго рода, то получимъ аналогичныя картины.

Возьмемъ еще примѣръ. Пусть въ данной странѣ установленъ подоходный налогъ на индивидуумовъ населенія n, пусть v_x есть число индивидуумовъ, годовой доходъ которыхъ превышаетъ x. Истинная таблица, представляющая функцію v_x и записывающая лишь тѣ опредѣленныя значенія непрерывно возрастающаго x, для которыхъ v_x перескакиваетъ съ одного значенія на другое (убывая, обычно, а въ промежуткахъ между указанными значеніями x сохраняя постоянное значеніе v_x),—такая таблица будетъ представлять рѣшета, особенно рѣзкія въ предѣльныхъ пунктахъ, приближающихся къ наибольшему доходу x_a.

Краевыя части статистическихъ таблицъ соотвѣтствуютъ наибольшимъ (форсмажернымъ) уклоненіямъ способности въ отношеніи къ средней способности. Края эти, какъ показываютъ примѣры, обладаютъ необычайными особенностями. Разсматриваемыя въ части III настоящаго труда высшія вычисленія оцѣниваютъ на теоретической почвѣ эту особенность, подтверждаемую эмпирически.

*) *А. Ю. Давидовъ*: «Приложеніе теоріи вѣроятностей къ медицинѣ».

Задача теоріи вѣроятностей, между прочимъ, переработкой возвести статистическую сырую истинную таблицу въ достоинство отшлифованной формулы, пригодной для предсказаній и приказаній и для рѣшеній вопросовъ статистическаго бюджета. Переработка сводится къ округленіямъ и вѣроятностнымъ меліораціямъ съ помощію резервовъ; ошибки же такой переработки исправляются въ порядкѣ накопленія дальнѣйшихъ опытовъ и освѣженія таблицъ новыми сырыми истинными фактическими матеріалами.

§ 14$_1$. Геометрическое представленіе зависимости между функціей и перемѣннымъ числомъ (діаграмма). Лакуны сокращенныхъ таблицъ и ключи поправки лакунъ. Потеря нѣкоторыхъ ключей поправки лакунъ на днѣ океана незнанія. Заполненіе лакунь опытомъ и интерполированіемъ.

I. Въ числѣ вспомогательныхъ представленій связи (зависимости) между перемѣннымъ x и его функціей v_x, кромѣ таблицъ, важную роль играютъ, какъ извѣстно, діаграммы, т. е. фигуры, изображающія геометрически названную связь и рисуемыя на плоскости координатъ (либо декартовыхъ, либо полярныхъ, биполярныхъ и пр.).

Если фигурою изображается на плоскости прямоугольныхъ координатъ x и y измѣненіе функціи v_x, то можно строить геометрическій образъ какъ рядъ точекъ (x, y), опредѣляемыхъ при помощи уравненія:

$$y = v_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VIII)}$$

Это уравненіе и вышеприведенная (§ 12) таблица при $x = x_l$ опредѣляютъ величину $y = y_l = v_{x_l}$. Если принять опредѣленную длину L за 1, то въ этомъ масштабѣ можемъ построить абсциссу $\overline{Ox_l} = x_l$ и ординату $\overline{x_l M_l} = y_l = v_{x_l}$ (см. отъ руки сдѣланную фигуру 1). Такимъ образомъ получимъ точку (x_l, y_l) или M_l (фиг. 1).

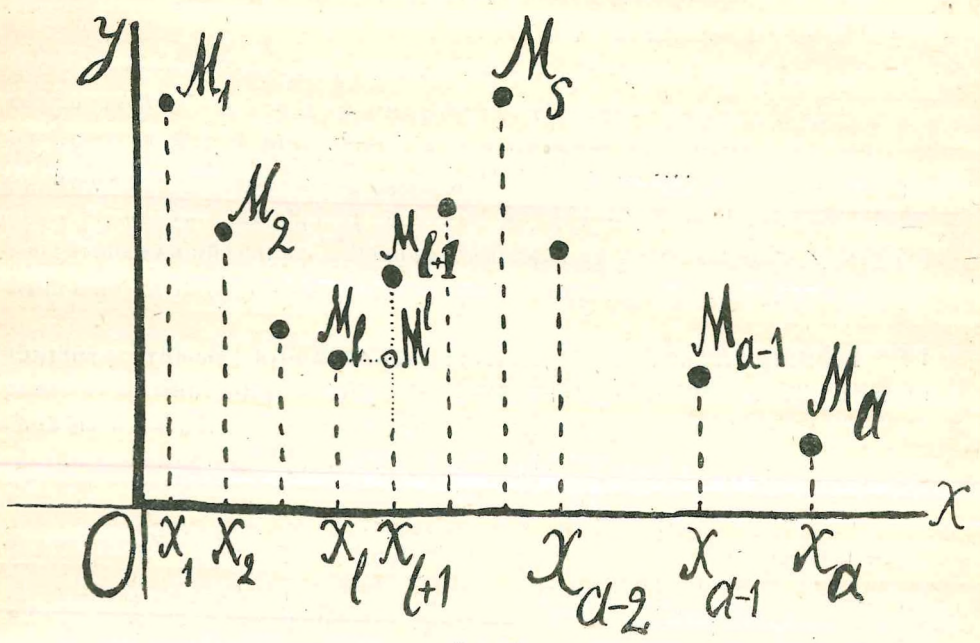
Пунктирный рядъ $M_1, M_2, \ldots, M_a$ (фиг. 1) своими ординатами представитъ рядъ членовъ второй колонны вышеприведенной таблицы; отрѣзокъ же $M^l M_{l+1}$ (см. фиг. 1) представитъ величину Δv_x.

Изобразимъ еще на плоскости прямоугольныхъ Декартовыхъ координатъ картину измѣненія отношенія $\frac{\Delta v_x}{\Delta x}$, которое называется *дифференціальнымъ коэффиціентомъ*. При полученіи соотвѣтствующей фигуры нужно разсматривать уравненіе

$$y = \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IX)}$$

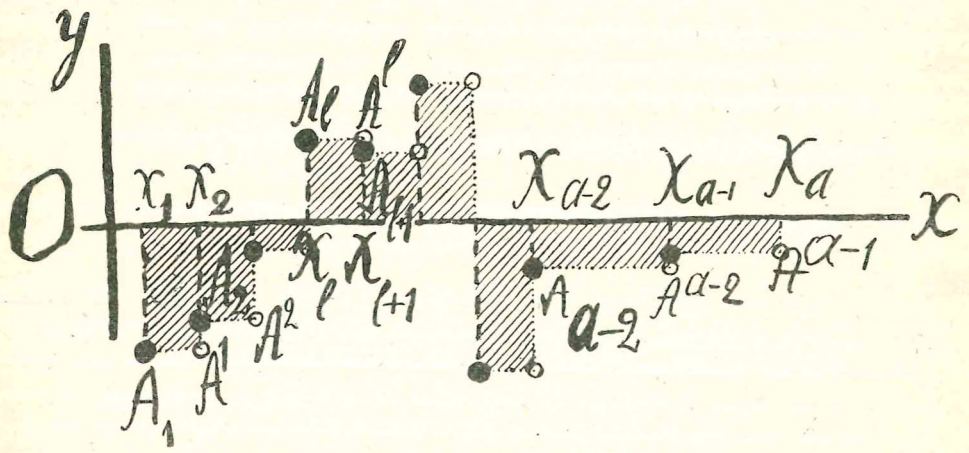
и рядъ точекъ A_l или (x_l , y_l), полагая:

$$y_l = \Delta v_{x_l} : \Delta x_l, \quad (l = 1, 2, \ldots, a - 1).$$



Фиг. 1.

Изъ этой діаграммы членъ Δv_l таблицы § 12 выводится, какъ площадь прямоугольника $A_l\, A^1{}_l\, x_{l+1} x_l$ (см. отъ руки сдѣланную фигуру 2), равная произведенію $y_l \,.\, \Delta x_l$, ибо $y_l = \overline{x_l A_l}$ и $\Delta x_l = \overline{x_l x_{l+1}}$.



Фиг. 2.

Разность же $v_{x_l} - v_{x_1}$, какъ видно изъ чертежа, а съ другой стороны изъ равенства (V) § 12, представится площадью фигуры

$$x_1 A_1 A^1 A_2 A^2 \ldots A_{l-1} A^{l-1} x_{l-1} x_1 ,$$

слагающейся изъ $l - 1$ прямоугольниковъ. При сложеніи направленные внизъ прямоугольники считаются отрицательными величинами.

Въ зависимости отъ природы функціи v_x, вышеуказанныя пунктирныя линіи $M_1 M_2 \ldots M_a$ и $A_1 A_2 \ldots A_{a-1}$ могутъ быть болѣе или менѣе плавными или, наоборотъ, болѣе или менѣе зигзагообразными. Такъ, кривая температуры v_x человѣка, наблюдаемая въ зависимости отъ времени x, будетъ дѣлать для заболѣвшаго перемежающейся лихорадкой большіе зигзаги; а для здороваго человѣка температурная кривая будетъ болѣе плавной. Температурная кривая даннаго географическаго пункта, чертимая при помощи пишущихъ метеорологическихъ приборовъ, также можетъ являть картину, болѣе плавную и менѣе плавную; а при физико-географическихъ форсмажерахъ эта плавность исчезаетъ и замѣняется огромными зигзагами.

II. Графическій методъ можетъ приблизительно передавать свойства функціи v_x *непрерывнаго* перемѣннаго x. Если и сама функція v_x также непрерывная (аналитическая), развертывающаяся въ рядъ Тейлора (см. ниже), то зависимость ея отъ перемѣннаго x представится непрерывною кривою. При этомъ вышеуказанныя приращенія Δv_x и Δx дѣлаются безгранично малыми и обозначаются символами dv_x и dx, а пунктирная линія, опредѣляемая уравненіемъ (IX), переходитъ въ непрерывную.

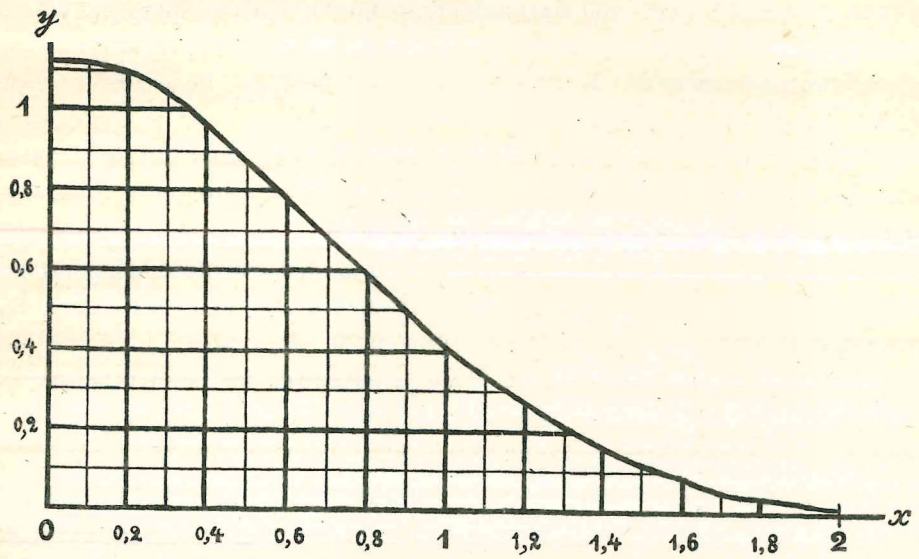
Таблица § 12 при этомъ условіи сдѣлалась бы необъятною (ибо число $a = \infty$). Въ этомъ случаѣ таблицу приходится *сокращать*, округляя числа и пропуская ряды перемѣннаго x и соотвѣтственныхъ значеній функціи v_x; эти пропущенныя значенія называются *нетабличными* въ отличіе отъ табличныхъ, т. е. занесенныхъ во вторую и третью колонны вышеприведенной таблицы. Сокращенную таблицу назовемъ *фальшивымъ рѣшетомъ*. При такой таблицѣ необходимы *ключи* для поправки, для восполненія ея *пробѣловъ* или *лакунъ*. Свойства этихъ «ключей» зависятъ отъ свойствъ дифференціальнаго коэффиціента $\frac{dv_x}{dx}$. Если этотъ коэффиціентъ есть функція *прерывная* при измѣненіи x, а также если табличныя приращенія функціи v_x велики, то поправки табличныхъ пробѣловъ въ области этихъ перерывовъ требуютъ особой осмотрительности. Наоборотъ, если дифференціальный коэффиціентъ $\frac{dv_x}{dx}$ есть функція непрерывная, а приращенія малы, то восполненіе табличныхъ лакунъ совершается приближеннымъ интерполированіемъ по способу пропорцій, какъ это дѣлается, напримѣръ, при пользованіи логариѳмическими таблицами, дающими опредѣленное число точныхъ десятичныхъ знаковъ.

Фальшивыя рѣшета будемъ отличать отъ рѣшетъ истинной таблицы (§ 12), имѣя въ виду, что лакуны суть искусственные пробѣлы въ сокращенной таблицѣ, являющіеся погрѣшностями сравнительно съ соотвѣтствующими мѣстами истинной таблицы. Діаметры табличныхъ лакунъ,

дыръ, бываютъ иногда огромные. Часто ключи для поправки лакунъ бываютъ затеряны на днѣ океана незнанія.

Иногда вмѣсто таблицы остается сплошная лакуна, и тутъ наступаетъ власть темноты, т. е. полнаго незнанія функціи. Тутъ возможно лишь гадать при помощи самыхъ *наивныхъ* гипотезъ теоріи вѣроятностей и защищаться отъ смертельныхъ и грубыхъ ошибокъ въ порядкѣ Робинзоновскихъ размышленій, вдохновеній, похожденій и меліорацій.

Но если въ сплошной лакунѣ, заступающей мѣсто истинной таблицы (номограммы), способной руководить дѣломъ, найдется хотя бы одна



Фиг. 3.

«точка» (x, v_x), соотвѣтствующая дѣйствительности, то этотъ просвѣчивающій пунктъ можетъ уже быть точкой опоры для благодарнаго труда изслѣдованія и выясненія скрытой номограммы. Такъ упавшее съ дерева яблоко навело, говорятъ, Ньютона на открытіе законовъ всемірнаго тяготѣнія.

Интерполированіе (см. ниже) служитъ для искусственнаго заполненія лакунъ, чтобы воспользоваться силами анализа. Это заполненіе часто дѣлается по вдохновенію, но подъ контролемъ опыта и критики.

III. Ради преодолѣнія безконечныхъ трудностей и запутанностей статистическаго исчисленія дозволительно, по правиламъ приближенія, замѣнять аритмологическія шероховатыя (неровныя) таблицы интерполяціонными аналитическими функціями, упрощая діаграмму соотвѣтствующей связи между перемѣннымъ x и его функціей v_x.

Въ результатѣ такихъ дѣйствій часто получается аналитическая функція

$$v_x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Ея Декартовская діаграмма для положительныхъ x представлена на фигурѣ 3 въ формѣ кривой, уравненіе которой опредѣляется такъ:

$$y = 2e^{-x^2} : \sqrt{\pi}.$$

Для отрицательныхъ же x получается симметричная относительно оси Oy кривая линія. Для значеній x, взятыхъ въ промежуткѣ (0, 2), діаграмма фиг. 3 представляетъ отчетливую картину. Но кривая діаграммы почти сливается съ осью Ox для значеній x, взятыхъ въ промежуткѣ $(2, +\infty)$.

Подобныя неотчетливыя части картины, притомъ уходящія въ ∞ изъ конечной области чертежа, замѣняются болѣе отчетливыми діаграммами, получаемыми нижеуказываемымъ измѣненіемъ масштабовъ или графическихъ модулей.

§ 14_2. Графическія пространства. Числовая градуировка скалъ аналитическихъ функцій и различныя основанія діаграммъ уравненій, представляющихъ связь между перемѣнными. Подборъ модулей діаграммы, проясняющихъ фигуру связи между перемѣнными. Транспарантъ.

I. Вышеуказанныя графическія представленія зависимости между функціей и перемѣннымъ теряютъ наглядность и отчетливость какъ для малыхъ по величинѣ, почти исчезающихъ измѣреній фигуры, такъ и для слишкомъ большихъ, не умѣщающихся на планѣ. Въ подобныхъ случаяхъ необходимы особые геометрическіе способы и графическія пространства изображенія связи между перемѣннымъ и его функціей.

Обратимся, напримѣръ, къ геометрическому представленію разностныхъ (дифференціальныхъ) функцій, опредѣляющихъ приростъ интегральной (начальной) функціи, обыкновенно почти незамѣтный, но существенный. Во всѣхъ рядахъ аритмологіи и анализа функцій встрѣчается этотъ «оптическій» обманъ въ оцѣнкѣ прироста Δv_x функціи v_x. Разсмотримъ этотъ исчезающій приростъ, по скольку онъ встрѣчается въ исчисленіи вѣроятностей.

Пусть итогъ n независимыхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, зависящій отъ случайныхъ обстоятельствъ, можетъ совпадать съ вышеуказанными значеніями x, записанными во второй графѣ таблицы § 12, и пусть функція v_x есть вѣроятность того, что въ предстоящемъ рядѣ m наблюденій осуществится неравенство $n < x$. При этомъ всѣ значенія величины Δv_x будутъ положительными, и притомъ, по теоремѣ сложенія вѣроятностей, будемъ имѣть:

$$\Delta v_{x_1} + \Delta v_{x_2} + \ldots + \Delta v_{x_l} + \ldots + \Delta v_{x_{a-1}} = 1.$$

Предположимъ, что обсуждается обычный въ теоріи вѣроятностей

случай, когда числа m и a могутъ возрастать неограниченно, при чемъ всѣ вѣроятности Δv_x обычно стремятся къ нулю.

Хотя функція Δv_x исчезаетъ, однако она вмѣстѣ съ выраженіемъ $x \,.\, \Delta v_x$ играетъ существенную роль въ подсчетахъ вѣроятностей и матеріальныхъ стоимостей (ставокъ). Геометрическое представленіе функціи Δv_x будетъ обладать желательною наглядностью, если мы воспользуемся скалами съ произвольными основаніями и масштабами (линейными модулями), съ числовою градуировкою и штрихами (помѣтками), слѣдуя правиламъ номографическаго исчисленія (см. *Н. Герсевановъ*. Основанія номографическаго исчисленія. Вып. I. 1896).

Элементы діаграммъ бываютъ двухъ родовъ: системы численно помѣченныхъ линій и системы численно помѣченныхъ точекъ (скалы функцій).

Если въ уравненіи

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

будемъ перемѣнному α придавать рядъ частныхъ значеній и будемъ вычерчивать соотвѣтственныя кривыя и помѣчать каждую изъ нихъ соотвѣтствующимъ значеніемъ α, то получимъ систему помѣченныхъ линій (A), характеризующую какое нибудь явленіе. Напримѣръ въ термодинамикѣ уравненіе (A) связываетъ для даннаго газа его температуру α съ его объемомъ y и давленіемъ x.

Но намъ нужны скалы функціи $f(\alpha)$ или системы помѣченныхъ точекъ. Разсмотримъ этотъ случай. Если мы на приготовленной кривой

$$\varphi(x, y) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

отъ заданной ея точки M, будемъ откладывать длины, равныя выраженію $L \,.\, f(\alpha)$, разумѣя подъ L нѣкоторый опредѣленный отрѣзокъ, называемый *модулемъ* скалы, и придавая перемѣнному α рядъ частныхъ значеній, и если будемъ помѣчать концы откладываемыхъ длинъ штрихами и соотвѣтствующими значеніями α, то получимъ криволинейную скалу функціи $f(\alpha)$. Кривая (B) называется *основаніемъ* скалы, а точка M началомъ скалы.

Опустивъ изъ всѣхъ помѣченныхъ точекъ криволинейной скалы перпендикуляры на оси OX и OY координатъ x и y и приписавъ основаніямъ этихъ перпендикуляровъ соотвѣтствующія помѣтки, мы получимъ на означенныхъ осяхъ двѣ *проекціи* криволинейной скалы или двѣ *проекціонныя скалы*. Если условимся модуль L считать неизмѣннымъ, то проекціонныя скалы дадутъ:

$$x = \varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad y = \psi(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Слѣдовательно, всякая скала можетъ быть задана двумя основными

опредѣленіями: либо заданіемъ основанія (B), модуля L и функціи $f(\alpha)$, либо заданіемъ модуля L и двухъ уравненій (C).

Скала функціи $f(\alpha)$ называется *нормальной*, если она построена на прямолинейномъ основаніи (B), и рядъ послѣдовательныхъ значеній перемѣннаго α между опредѣленными предѣлами β и γ представляетъ ариѳметическую прогрессію. Основаніе скалы въ этомъ случаѣ представляется уравненіемъ

$$y = mx + n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B')$$

а проекціонныя скалы выразятся уравненіями:

$$x = af(\alpha) + b \quad \text{и} \quad y = cf(\alpha) + d, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C')$$

гдѣ

$$a = \frac{L}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad c = \frac{mL}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad b = k, \qquad d = km + n,$$

k зависитъ отъ положенія начала M скалы на ея основаніи.

Если положимъ $f(\alpha) = \Delta v_\alpha$, опредѣляя Δv_α при помощи таблицы § 12, то получимъ скалу функціи Δv_α. Вообразимъ прямолинейную скалу этой функціи, принявъ за основаніе нѣкоторую прямую

$$y = mx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B'')$$

проходящую чрезъ начало координатъ, и предположивъ, что начало M скалы совпадаетъ съ началомъ O координатъ x и y. Тогда будемъ имѣть слѣдующія уравненія проэкціонныхъ скалъ:

$$x = \frac{L \,.\, \Delta v_\alpha}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{и} \quad y = \frac{m \,.\, L \,.\, \Delta v_\alpha}{\sqrt{1+m^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C'')$$

Модуль L можемъ выбрать такъ, чтобы величины x и y, соотвѣтствующія проекціоннымъ скаламъ, не исчезали при измѣненіи перемѣннаго α между данными предѣлами β и γ, хотя бы функція Δv_α при измѣненіи α въ промежуткѣ (β, γ) все время была почти исчезающею, незамѣтною величиною.

Такъ какъ для нормальной въ данномъ промежуткѣ скалы послѣдовательныя значенія перемѣннаго α составляютъ ариѳметическую прогрессію, т. е. $\Delta\alpha = h$, то для этого промежутка можемъ выбрать модуль L подъ условіемъ:

$$\frac{m \,.\, L}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\Delta\alpha}.$$

При этомъ будемъ имѣть проекціонныя уравненія

$$x = \frac{1}{m} \frac{\Delta v_\alpha}{\Delta\alpha} \quad \text{и} \quad y = \frac{\Delta v_\alpha}{\Delta\alpha}.$$

Возможенъ, конечно, и другой подборъ модуля L скалы (см. ниже).

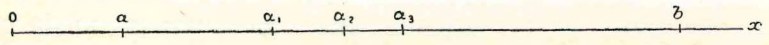
II. Простѣйшій случай подбора основанія (B') скалы есть тотъ, когда $m = 0$; при этомъ проекціонныя скалы (C') будутъ:

$$x = L f(\alpha) \quad \text{и} \quad y = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C''')$$

На фигурѣ 4 представлено схематически градуированіе прямолинейной скалы (C''') функціи $f(\alpha)$ перемѣннаго α для интервала (a, b), въ которомъ функція $f(\alpha)$ пусть будетъ *униформна*, т. е. имѣетъ только одно опредѣленное значеніе для каждаго опредѣленнаго значенія величины α. Вдоль оси Ox отъ начальной точки O на фиг. 4 отложены линейныя величины:

$$x_1 = L \,.\, f(\alpha_1) = O\alpha_1,\ x_2 = L \,.\, f(\alpha_2) = O\alpha_2,\ x_3 = L \,.\, f(\alpha_3) = O\alpha_3, \ldots,$$

пропорціональныя числамъ $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, $f(\alpha_3)$, ... Точки α_1, α_2, α_3, ... помѣчаются штрихами, перпендикулярными къ оси Ox. Скала изготов-



Фиг. 4.

ляется разъ навсегда въ видѣ чертежа на бумагѣ или же какъ линейка изъ дерева или металла.

Подборъ модуля L выясняется, между прочимъ, въ связи съ умѣстимостью всей скалы функціи $f(\alpha)$ на линейкѣ данной длины L_0, содержащей числовыя помѣты между штрихомъ a и штрихомъ b.

Очевидно, модуль L нужно опредѣлить изъ уравненія:

$$L \,.\, \{f(b) - f(a)\} = L_0,$$

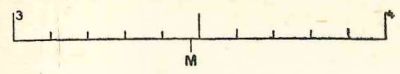
гдѣ L_0 есть заданная длина отрѣзка скалы между штрихами a и b.

Разность $\Delta x_k = O\alpha_{k+1} - O\alpha_k$ называется *ступенью* скалы; для нормальной скалы она постоянна и мала, напр., соотвѣтствуетъ минимальному интервалу въ $^1/_2{}^{mm}$. Очевидно, градуированная скала способна замѣнить таблицу функціи.

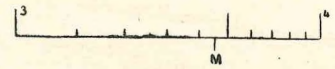
Если функція $f(\alpha)$ непрерывная (аналитическая) и если данный пунктъ M скалы, отсѣкающій отрѣзокъ OM, равный величинѣ $L \,.\, f(\alpha)$, не совпадаетъ со штрихомъ градуированной скалы, то соотвѣтствующее неизвѣстное значеніе перемѣннаго α «котируется» (отъ слова «la cote»—цѣна, курсовая числовая запись), т. е. приближенно исчисляется посредствомъ *интерполяціи на глазомѣръ*, считая малыя приращенія перемѣннаго числа α пропорціональными приращеніямъ функціи $f(\alpha)$ и ихъ геометрическимъ образамъ на скалѣ.

Пусть, напримѣръ, требуется прочесть на глазомѣръ числовое значе-

ніе α для точки M на градуированной скалѣ, представляемой фигурою 5. Оно будетъ $\alpha = 3{,}47$. Для точки же M скалы, представленной фигурою 5′, эта котировка будетъ: $\alpha = 3{,}45$.



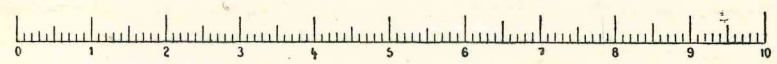
Фиг. 5.



Фиг. 5′.

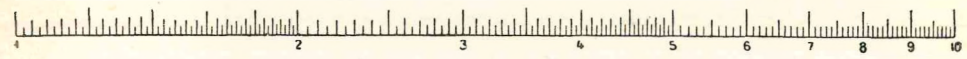
Градуированныя, наиболѣе употребительныя въ приложеніяхъ нормальныя скалы суть:

1° *Скала правильная или равномѣрная.*—Такая скала есть нормальная, соотвѣтствующая функціи $f(\alpha) = \alpha$. Видъ ея представленъ на фиг. 6.



Фиг. 6.

2° *Скала логариѳмическая.*—Это есть скала функціи $f(\alpha) = log\ \alpha$. При градуированіи *) этой скалы, изображенной на фиг. 7, интервалъ между точками 1 и 10 взятъ въ 125^{mm}.



Фиг. 7.

3° *Скала линейнаго преобразованія.*—Эта скала, весьма употребительная въ преобразованіи алгебраическихъ формъ и геометрическихъ фигуръ **), есть скала функціи:

$$f(\alpha) = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q},$$

при условіи $\delta = mq - np \neq 0$. Въ этомъ случаѣ градуированіе скалы

*) Діаграммы, представленныя фигурами 4 — 9, взяты изъ книги *M. d'Ocagne*: Traité de Nomographie.

**) См. мою книгу: „Приложеніе алгебры къ геометріи". Изданіе 2. Москва. 1897.—Линейное преобразованіе переходитъ въ „круговое преобразованіе", если α есть векторъ, геометрически представляющій на плоскости прямоугольныхъ координатъ ξ и η комплексное перемѣнное $\alpha = \xi + \eta\sqrt{-1}$. Круговое преобразованіе играетъ роль въ стереографической проекціи тѣлъ и точекъ пространства на плоскость или карту, а также въ сопоставленіи свойствъ Эвклидовскаго пространства съ воображаемымъ неевклидовскимъ пространствомъ.

Вообще всякая простая скала функціи $f(\alpha)$ несетъ за собою болѣе сложную скалу двухмѣрнаго пространства, получаемую замѣщеніемъ одномѣрной вещественной величины α двухмѣрною комплексною величиною вида: $\alpha = \xi + \eta\sqrt{\omega}$.

представляетъ задачу, рѣшаемую съ полною точностью при помощи линейки и циркуля.

4° *Скала отрѣзочная.*—Эта скала соотвѣтствуетъ функціи $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$ и представляетъ частный случай вышеуказанной скалы линейнаго преобразованія. Пусть A и B будутъ точки этой скалы, соотвѣтствующія $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$. Если M есть точка скалы, соотвѣтствующая какому-либо значенію α, то легко удостовѣриться, что

$$\frac{AM}{MB} = \alpha;$$

иначе говоря, численная помѣта α каждой точки M скалы равна отношенію отрѣзковъ, на которые дѣлится этою точкою интервалъ AB.

5° *Скала статистическая.*—Это есть скала функціи $f(\alpha) = 2e^{-\alpha^2} : \sqrt{\pi}$. Декартовская діаграмма этой функціи представлена на фиг. 3.

III. Въ проблемахъ математики и статистики играетъ роль сложная діаграмма функціи $\Phi(u)$, соотвѣтствующая двумъ перемѣннымъ α и u, связаннымъ при помощи уравненія:

$$\alpha = f(u). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

При этомъ одновременно разсматриваются три скалы:

$$x = L \cdot \alpha, \quad x = L \cdot f(u) \quad \text{и} \quad y = L_1 \cdot \Phi(u), \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ L и L_1 суть линейные отрѣзки (модули).

Отрѣзки L и L_1 выбираются такъ, чтобы діаграмма функціи $\Phi(u)$ и уравненія (1), изображаемая на плоскости прямоугольныхъ координатъ x и y, была мѣстомъ, точки котораго удовлетворяютъ уравненіямъ (2) и которое умѣщалось бы въ ограниченномъ листѣ бумаги, не имѣя исчезающихъ и удаленныхъ изслѣдуемыхъ формъ.

Первыя двѣ изъ трехъ скалъ (2) наносятся *на одну и ту же линейку Ox*; штрихи α и u наносятся вдоль скалы съ того и другого бока, какъ на фиг. 9.

Такая линейка называется *діаграммою соединенныхъ скалъ* α *и* $f(u)$,—соединенныхъ на общемъ основаніи Ox.

Діаграмма, соотвѣтствующая уравненіямъ (2), съ полною точностью анализируется при помощи теоріи ряда Лагранжа (см. ниже), приложенной къ уравненію (1).

Если первыя двѣ скалы, соотвѣтствующія уравненіямъ:

$$x = L\alpha \quad \text{и} \quad x = Lf(u),$$

изготовлены, то бываетъ легко, съ ограниченною, впрочемъ, точностью, прочитать на линейкѣ вещественные корни u уравненія (1) для всѣхъ

значеній перемѣннаго α, заключенныхъ въ предѣлахъ этихъ скалъ, изъ коихъ первая будетъ правильною. На практикѣ эта точность достаточна, а высшая степень точности можетъ быть получена при помощи анализа.

Забѣгая впередъ доказательствъ, ниже приводимыхъ, замѣтимъ, что съ помощью ряда Лагранжа соотношеніе между x и y, равносильное уравненіямъ (2), можно, для нѣкоторой области измѣненій перемѣннаго x, приближенно представить подъ упрощенной формой:

$$y = A \cdot e^{-B(x-c)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ A, B и c суть постоянныя количества. Дабы поддерживать близость между кривою (2) и кривою (3) въ разныхъ областяхъ первой изъ нихъ, приходится постоянныя A, B и c измѣнять скачками, при переходѣ отъ одного куска кривой (2) къ другому по правиламъ, кои будутъ развиты въ концѣ настоящей части.

Такъ какъ разъ навсегда уже дана діаграмма или же таблица, соотвѣтствующая уравненію:

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

то преобразованіемъ перемѣнныхъ x и y при помощи уравненій

$$y = \frac{A}{2}\eta\sqrt{\pi} \quad \text{и} \quad \sqrt{B} \cdot (x-c) = \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

бываетъ полезно форму (3) преобразовывать въ однообразную форму (4).

Переходъ отъ равенства (3) къ равенству (4) при *отрицательномъ* B, въ популярномъ смыслѣ, не возможенъ, ибо въ уравненіяхъ (5) въ этомъ случаѣ $\sqrt{B}$ есть мнимая величина. Кривая (3) въ этомъ случаѣ будетъ представлять при $x = c$ не минимумъ, а, наоборотъ, максимумъ ординаты y. Въ данномъ случаѣ обратная функція $Y = 1 : y$ будетъ приводиться къ виду (4).

Во II и III частяхъ представятся случаи, когда подъ $\Phi(u)$ мы будемъ разумѣть приблизительную вѣроятность сложнаго явленія, выраженную помощью *аналитической* функціи, заступающей мѣсто подлинной (истинной) вѣроятностной функціи числа α, обозначаемой тамъ символами $P_{m,\alpha}$ и ΔP_α и въ дѣйствительности *аритмологической* (напримѣръ, въ опытахъ теоремы Пуассона).

Весьма сложныя діаграммы, опредѣляемыя уравненіями вида (2) и соотвѣтствующія закону большихъ чиселъ въ формѣ Пауссона, Чебышева, H. Bruns и А. А. Маркова, по частямъ приводятся, какъ увидимъ, сначала къ весьма простой формѣ (3), а затѣмъ къ единообразной формѣ (4). Исключенія представляются въ особыхъ и парадоксальныхъ случаяхъ.

IV. Пусть связь между двумя перемѣнными числами α и u представляется уравненіемъ:

$$F(\alpha, u) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Декартовская діаграмма этой связи, умѣщающаяся въ ограниченномъ листѣ и не имѣющая исчезающихъ изслѣдуемыхъ частей, строится такъ.

Взявъ прямоугольныя оси координатъ, нанесемъ на осяхъ Ox и Oy правильныя скалы:

$$x = L \,.\, \alpha \quad \text{и} \quad y = L_1 \,.\, u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

выбирая модули L и L_1 такъ, чтобы получилась на листѣ желаемая картина. Эта картина изобразится геометрическимъ мѣстомъ точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію:

$$F\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L_1}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Построивъ эту кривую, можемъ съ ея помощію и съ помощію градуированныхъ скалъ Ox и Oy приблизительно прочитать значеніе какого нибудь одного изъ перемѣнныхъ α и u по другому.

Для облегченія этого дѣйствія употребляются *транспаранты*. Транспарантъ — это прямоугольникъ, вырѣзанный изъ тонкаго листа какого нибудь твердаго прозрачнаго матеріала. На немъ проводятъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, параллельныя бокамъ прямоугольника и называемыя *индексами*. Пользуются транспарантомъ такъ: устанавливаютъ его такимъ образомъ, чтобы одинъ индексъ I_1 прошелъ черезъ точку скалы Ox, обозначенную штрихомъ съ данною числовою помѣтою α, а другой индексъ I_2 совпалъ съ осью Ox. Затѣмъ, приставивъ линейку къ ребру транспаранта, параллельному оси Oy, и передвигая весь транспарантъ вдоль этой линейки, совмѣщаютъ точку пересѣченія индексовъ съ кривою діаграммы. Тогда индексъ I_2 пересѣчетъ скалу Oy въ точкѣ, котируемой искомымъ числомъ u.

Подъ общій случай уравненія (6) подходятъ вышеразсмотрѣнные примѣры. Такъ, фигура 3 представляетъ діаграмму уравненія:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2},$$

при чемъ въ этомъ примѣрѣ $L = L_1 = 5{,}4^{mm}$. Но если бы мы захотѣли разсмотрѣть ту же связь между α и u для области значеній u, взятыхъ въ интервалѣ 2 и 3, гдѣ кривая фигуры 3 почти сливается съ осью Ox, то пришлось бы измѣнить модуль L_1 скалы Oy и взять его во много разъ болѣе отрѣзка $5{,}4^{mm}$; тогда получилась бы отчетливая картина этой связи, исчезавшая на прежней діаграммѣ.

V. Связь (6) между числами α и u можно представить подъ формой

$$\alpha = f(u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

совпадающей съ ур. (1), и разсматривать градуированныя скалы

$$x = L \,.\, \alpha \quad \text{и} \quad y = L_1 \,.\, u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

нанесенныя на прямоугольныя оси Ox и Oy. При этомъ связь между α и u перейдетъ въ кривую, опредѣляемую уравненіями (9) и (10) послѣ исключенія перемѣнныхъ α и u.

Разсмотримъ по этой системѣ Декартовскую діаграмму, относящуюся къ извѣстному приближенному подсчету погрѣшностей большого ряда независимыхъ равноточныхъ измѣреній какой либо величины. На тысячу измѣреній встрѣтится N такихъ измѣреній, погрѣшность коихъ заключается между $-\rho$ и $+\rho$. Это число N, какъ извѣстно изъ теоріи вѣроятностей, учитывается такъ:

$$N = 1000\ \Theta(\rho, h), \quad \Theta(\rho, h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho h} e^{-\xi^2}\, d\xi, \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

гдѣ h есть «мѣра точности» измѣренія (см. ниже, часть II). Единицу величины при измѣреніяхъ ея бываетъ возможно подобрать такъ, чтобы имѣло силу равенство $\Theta(1) = \frac{1}{2}$. Это означаетъ, что «вѣроятная погрѣшность» ρ_0 (см. часть II) есть $\rho_0 = 1$, а соотвѣтствующее значеніе мѣры точности h будетъ $h_0 = 0{,}4769$. При этомъ значеніи h вообразимъ Декартовскую діаграмму *) вышеуказанной связи между перемѣнными N и ρ, полагая:

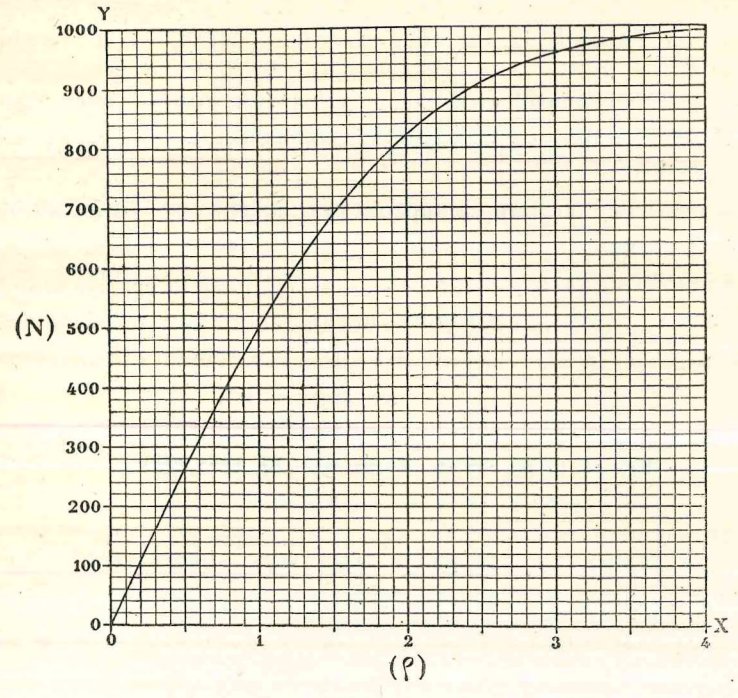
$$x = L \,.\, N \quad \text{и} \quad y = L_1 \,.\, \rho.$$

Діаграмма эта представлена на фигурѣ 8.

Кромѣ Декартовской діаграммы уравненія $N = 1000\ \Theta(\rho, h_0)$, можемъ построить для представленія той же зависимости между ρ и N діаграмму соединенныхъ скалъ $x = L \,.\, N$ и $x = L.\ 1000\ \Theta(\rho, h_0)$, штрихи которыхъ наносятся на одну и ту же ось Ox съ разныхъ боковъ. Эта діаграмма представлена на фигурѣ 9, полагая $L = 0{,}13^{mm}$.

*) Діаграмма эта взята изъ книги *M. d'Ocagne*: Traité de Nomographie. Въ объяснительномъ текстѣ этой книги (стр. 17) авторъ беретъ функцію $\Theta(\rho, 1)$, что соотвѣтствуетъ таблицѣ функціи $\Theta(\rho)$, помѣщенной въ книгѣ Бертрана: Calcul des probabilités; однакоже это объясненіе не согласуется съ чертежомъ, который относится къ другому случаю, когда $h = 0{,}4769 = h_0$. Эта редакціонная погрѣшность повторена и въ книгѣ Н. Герсеванова. Переходъ отъ одного случая къ другому не труденъ, ибо $\Theta(\rho, h) = \Theta(h\rho, 1) = \Theta(h\rho)$.

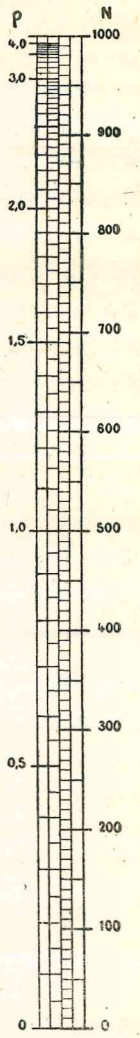
VI. Если функція $f(\alpha)$ при неограниченномъ возрастаніи перемѣннаго α приближается къ конечному предѣлу C, то ступени ея нормальной скалы, представляемыя на фигурѣ 4 разностями $O\alpha_{k+1} - O\alpha_k$, становятся все мельче и мельче при возрастаніи x. Между тѣмъ ступени



Фиг. 8.

эти не могутъ быть мельче *уловимой* длины m. Въ тѣхъ областяхъ скалы гдѣ ступени дѣлаются мельче этой минимальной уловимой длины, приходится скачкомъ увеличивать постоянную разность ариѳметической прогрессіи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$, представляющей рядъ значеній перемѣннаго α, наносимыхъ какъ численныя помѣтки штриховъ нормальной скалы.

Примѣръ этого рода представляетъ скала функціи $f(\rho) = N = 1000 \cdot \Theta(\rho, h_0)$, которая при неограниченномъ возрастаніи числа ρ стремится къ предѣлу 1000. Эта скала изображена на фиг. 9; она входитъ въ составъ діаграммы фиг. 9, какъ одна изъ двухъ соединенныхъ (на одномъ основаніи) скалъ.



Фиг. 9.

VII. Номографическое исчисленіе есть *комбинаторное*, соединяющее символически и графически множество классифицированныхъ по системѣ, единичныхъ записей (идіограммъ) ожиданія, воспріятія, издержки и считающееся съ кондомніумомъ или сосуществованіемъ множества перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$, независимыхъ и не вполнѣ независимыхъ, изображаемыхъ на *общемъ графическомъ основаніи*, разрастающемся въ цѣлый

альбомъ, въ атласъ или же книгу—вообще въ *сводъ графическихъ закономѣрностей*. Это общее основаніе записей назовемъ *графическимъ пространствомъ* или *схемой k измѣреній*, предполагая, что k есть число перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$, по условію *независимыхъ* и *нерѣшительно зависимыхъ* (см. § 4, пункты 3 и 5, и § 19).

Группу $(x, y, z, \ldots, t)$ *опредѣленныхъ* значеній перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$ назовемъ *точкой* графическаго пространства или схемы. Точка эта движется, если всѣ или нѣкоторыя изъ перемѣнныхъ измѣняются.

Схемы историко-географическія сопрягаются съ картограммою или же стереограммою *предметовъ* неба и земли, какъ общимъ графическимъ основаніемъ скалъ выхода *реальныхъ* величинъ и функцій;—скалъ *генетическихъ* потому, что изображаемыя на скалахъ земля и небо являютъ старую книгу бытія и отложенія и суть производители множества свѣжихъ текущихъ явленій; они излучаютъ и родятъ на нашихъ глазахъ многое безъ участія труда человѣка, даромъ получающаго изъ природы много такихъ цѣнностей, которыхъ онъ не сѣялъ.

Въ общіе своды закономѣрностей соединяютъ отдѣльныя таблицы, діаграммы и стереограммы, ситуирующія и интерпретирующія сложное движеніе человѣческой среды, связанной въ систему при существованіи границъ и раздѣленій и при осуществленіи многихъ степеней свободы.

Этого рода движенія среды изъ лицъ, какъ точекъ матеріальной системы, суть аналогическія движеніямъ механическихъ атомистическихъ системъ, имѣющихъ k степеней свободы. Но полное понятіе о свободахъ въ закономѣрно связанной средѣ опредѣляется пониманіемъ участія воли (психики) и, съ другой стороны, знаніемъ кредитныхъ и дебиторскихъ лицевыхъ зависимостей и записей (понимая довѣріе въ связи съ долгомъ) и, наоборотъ, списковъ кредитныхъ (вѣроятностныхъ) независимостей. Измѣрительныя концепціи, схемы и символы теоріи вѣроятностей тутъ играютъ существенную роль.

Иногда удачными штрихами, внесенными въ сводъ закона, какъ общее графическое основаніе, руководящее жизнью среды, хорошо рѣшаются вопросы, считавшіеся для данной среды не разрѣшимыми.

§ 15. Стилистика. Интерполяція по способу наименьшихъ квадратовъ и открытіе законовъ природы изъ опыта. Интерполяціонно-аналитическое продолженіе функціи по областямъ перемѣннаго.

Въ концепціяхъ точнаго графическаго метода играютъ роль *стиль, символика* и *символическія исчисленія*. Шероховатости *стилизуются* интерполированіемъ.

Проблема интерполяціи имѣетъ цѣлью, какъ извѣстно, найти *аналитическую* функцію, по возможности простую, зная *данныя* значенія дру-

гой, къ ней близкой функціи, соотвѣтственныя даннымъ значеніямъ независимаго перемѣннаго, число которыхъ ограничено. Эти данныя значенія могутъ принадлежать *конкретной* функціи $f(x)$, а искомая аналитическая функція $F(x)$ является отвлеченною *упрощенною* формулой, выровненною *абстракціей* отъ сырыхъ шероховатостей, приближаемой, прилагаемой къ *остову* даннаго помянутаго конкрета. Если стать на эту точку зрѣнія, то вотъ въ какихъ обстоятельствахъ приходится прибѣгать къ *механическому* интерполированію.

Записи приводятъ къ постройкѣ таблицъ. Эти таблицы суть, въ концѣ концовъ, таблицы эмпирическихъ аритмологическихъ функцій. Эти функціи выигрываютъ отъ интерполированія въ силу слѣдующихъ обстоятельствъ. Если интерполирующая функція — формула F алгебраически проста, изъ нея выводится простой *законъ*, особенно если эмпирическая функція и интерполирующая функція *придвигаются другъ къ другу очень близко*. Интерполирующія функціи аналитическаго характера упрощаютъ квадратуру и кубатуру, т. е. вычисленія, въ коихъ требуется примѣнять суммированія, интегрированія къ выраженіямъ, содержащимъ эти функціи.

Вообще, чтобы интерполировать эмпирическую функцію $y = f(x)$, начинаютъ строить, не расчитывая на большую точность, кривую, уравненіе которой есть: $y = f(x)$, по ея точкамъ, кои соотвѣтствуютъ даннымъ значеніямъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ перемѣннаго x и даннымъ значеніямъ $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ функціи y.

Безполезно приводить здѣсь главныя изъ интерполяціонныхъ формулъ, такъ какъ онѣ находятся въ извѣстныхъ классическихъ курсахъ теоріи конечныхъ разностей и анализа. Мы остановимъ здѣсь вниманіе лишь на томъ способѣ интерполированія, который Бертранъ, а за нимъ Лоранъ *), Пирсонъ **) и другіе стали примѣнять къ эмпирическимъ функціямъ статистики. Пусть $F(x, \lambda, \mu, \nu, \ldots)$ есть интерполяціонная формула данной аналитической конструкціи, которую нужно тѣснѣйше сблизить съ вышеуказанной эмпирической функціей $f(x)$ и въ которой $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ суть неопредѣленные параметры, коими будемъ располагать произвольно въ цѣляхъ указаннаго тѣснѣйшаго сближенія. Мѣрою хорошаго сближенія считается, по Бертрану, такой выборъ параметровъ, при которомъ выраженіе

$$\sum_{i=1}^{i=n} [F(a_i, \lambda, \mu, \nu, \ldots) - f(a_i)]^2 \quad \ldots\ldots\ldots (A)$$

*) *H. Laurent*, Statistique Mathém., 32.

**) *Л. К. Лахтинъ*. О методѣ Пирсона въ приложеніяхъ теоріи вѣроятностей къ задачамъ статистики и біологіи. Математ. Сборникъ, т. XXIV. Москва.

обращается въ minimum. При этомъ обстоятельствѣ будутъ имѣть силу уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \sum [F(a_i, \lambda, \mu, \ldots) - f(a_i)] \cdot \frac{dF}{d\lambda} = 0, \\ \sum [F(a_i, \lambda, \mu, \ldots) - f(a_i)] \cdot \frac{dF}{d\mu} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (B)$$

Отсюда найдутся желательныя значенія параметровъ, для которыхъ приближенно полагаютъ: $f(x) = F(x, \lambda, \mu, \ldots)$.

Этотъ методъ можетъ и даже долженъ быть модифицированъ въ теоріи и на практикѣ.

Въ случаѣ, если извѣстныя наблюденія были однѣ лучше другихъ, напримѣръ, $f(a_i)$ получено посредствомъ m_i наблюденій, ясно, что слѣдуетъ отыскивать минимумъ не выраженія (A), а выраженія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i [F(a_i, \lambda, \mu, \nu, \ldots) - f(a_i)]^2 \quad \ldots\ldots\ldots (C)$$

Можемъ, во вторыхъ, *предвидѣть*, что чаще будутъ употреблять значенія $F(x, \lambda, \mu, \ldots)$, близкія къ значенію $x = a_i$; тогда слѣдуетъ m_i брать тѣмъ болѣе, чѣмъ чаще будутъ употреблять a_i.

Число m_i можно назвать *вѣсомъ* обсуждаемаго значенія $f(a_i)$.

На дѣлѣ употребленіе этого модифицированнаго метода, аналогичнаго способу наименьшихъ квадратовъ, требуетъ такта и вдохновляется обстоятельствами.

Вообще нѣкоторое участіе вдохновленія необходимо при интерполированіи, такъ какъ болѣе точныхъ правилъ дать невозможно; опасный полетъ воображенія сдерживается сличеніемъ эмпирической функціи съ найденной аналитической въ картинѣ, въ графическомъ сопоставленіи. Между картинами сырою наблюденною и вычисленною допускаютъ разницу. Если разница не выходитъ изъ допущенныхъ границъ, то получимъ законъ природы. Если же разница будетъ слишкомъ значительна, то трудно распознать по интерполяціонной формулѣ характеръ закона природы; на практикѣ же при руководствѣ этою формулою приходилось бы ошибку ея искупать труднымъ взысканіемъ или же налогомъ на всю среду.

Что касается функціи $F(x, \lambda, \mu, \nu, \ldots)$, то она можетъ имѣть различный видъ, смотря по характеру вопроса, къ которому примѣняется интерполированіе.

Въ примѣненіи къ закону смертности Моавръ пользовался интерполяціонной формулой: $F(x, \lambda, \mu) = \lambda + \mu x$; Буняковскій употреблялъ формулу:

$$F(x, \lambda, \mu, \nu) = \lambda + \mu x + \nu x^2;$$

Макегамъ предложилъ интерполяціонную формулу:

$$F(x, \lambda, \mu, \nu) = e^{-\lambda \cdot \mu^x + \nu};$$

и т. д.

Въ примѣненіи къ вѣроятности Δv_x выхода *валового итога* x большого числа m независимыхъ (и почти независимыхъ) слагаемыхъ ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *) я предлагаю оправдываемую въ части III, нормальную интерполяціонную формулу вида:

$$F(x, \lambda, \mu, \nu, \ldots) = e^{\lambda + \mu (x-n) - \nu (x-n)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (D)$$

гдѣ n есть произвольно выбранное «начальное» значеніе перемѣннаго x, а $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ суть количества, зависящія, съ точки зрѣнія теоріи вѣроятностей, отъ вѣроятностей значеній перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. Но такъ какъ эти вѣроятности не всегда бываютъ извѣстны, то именно статистическія сырыя таблицы (§ 13) способны служить для независимаго вывода величинъ $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ и для открытія законовъ природы, не исключая законовъ общества, по скольку оно представляетъ собою стихійное физіологическое, экономическое или же психологическое собирательное явленіе.

Примѣчательно то, что рядъ

$$\lambda + \mu (x - n) - \nu (x - n)^2 + \ldots$$

бываетъ при весьма большомъ m быстро сходящимся, что облегчаетъ большія политико-экономическія исчисленія. Эту быстроту сходимости мы устанавливаемъ ниже при помощи ряда Лагранжа. Поэтому формула (D) часто бываетъ удачнымъ ключемъ при открытіи эмпирическихъ законовъ. Эта формула притомъ легко приводится къ виду:

$$F = A \cdot e^{-B (x-c)^2},$$

который выше мы обсуждали при помощи номографическаго исчисленія.

Такимъ образомъ, законы весьма сложныхъ явленій могутъ облекаться въ *простыя* по алгебраическому составу формулы. Однако же эта простая оболочка хорошо сходится съ закономъ природы лишь въ болѣе или менѣе ограниченномъ промежуткѣ (a, b) измѣненій перемѣннаго x, т. е. при условіяхъ: $a < x < b$. Теоретически и этотъ промежутокъ устанавливается съ помощію ряда Лагранжа; на практикѣ же онъ нащупывается вышепомянутымъ сопоставленіемъ графическихъ изображеній таблицъ: наблюденной и вычисленной съ помощію формулы F.

При выходѣ перемѣннаго x изъ этого промежутка (a, b) своей скалы можно брать тотъ же видъ (D) формулы $F(x, \lambda, \mu, \nu, \ldots)$, но выбравъ новое «начальное» значеніе n перемѣннаго x. Это дѣйствіе, сопровождаемое новыми вычисленіями (переучетами) коеффиціентовъ $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, зави-

*) Этого рода сложенія встрѣчаются въ числовыхъ законахъ природы, въ исчисленіяхъ политической экономіи и проч.

сящихъ отъ n, назовемъ *интерполяціонно-аналитическимъ продолженіемъ* функціи $f(x)$ изъ одной области перемѣннаго x, т. е. изъ области (a, b), въ другую, сосѣднюю область того же перемѣннаго.

Дѣйствіе это распространяется и на интерполированіе другихъ эмпирическихъ числовыхъ законовъ, напримѣръ, относящихся къ народонаселенію, къ распредѣленію доходовъ (законъ Парето), къ распредѣленію роста у солдатъ, къ географическому распредѣленію фактовъ метеорологіи, этнологіи, къ оборотамъ промышленностей, торговли и проч.

Интерполяціонно-аналитическое продолженіе функцій изъ одной области перемѣннаго x въ другую имѣетъ аналогію въ чисто-аналитическомъ продолженіи функцій изъ одной области въ другую *), примѣняемомъ къ вопросамъ эвклидовой геометріи, числовой (неэвклидовой) геометріи и механики (математической физики). Со временъ Коши, Римана, Гамильтона, Софуса Ли, Пуанкаре, Гурса и проч. это аналитическое продолженіе совершается не только по частямъ линейной (одномѣрной) скалы, но и по схемамъ (см. § 14_2, пунктъ VII) двухъ, трехъ и многихъ измѣреній.

Вообще руководящій абакъ (геометрическій образъ числовой функціи) можно подраздѣлять на части и переучитывать его по частямъ.

Въ практику, которая ищетъ наглядныхъ представленій (совпадающихъ также и съ интересами педагогики, преподаванія, популяризаціи), эта графическая математическая теорія проникаетъ подъ именемъ номографическаго исчисленія. Представителями практическаго номографическаго мышленія являются преимущественно инженеры и профессора математической стилистики, создавшіе приборы и новую отрасль математики, удовлетворяющей потребностямъ проективныхъ наукъ. Отвѣтомъ на эти запросы служитъ, какъ выше было сказано, богатый по содержанію трудъ по номографіи профессора (à l'Ecole des Ponts et Chaussées) *Мориса д'Окань* **) и множество другихъ трудовъ, цитированныхъ въ указанной выше книгѣ проф. Н. Герсеванова.

§ 16. Круглыя числа и полученіе ихъ посредствомъ элементарныхъ аритмологическихъ операцій; участіе ихъ въ организаціи закономѣрностей упрощенныхъ скорыхъ разсчетовъ. Произвольность округленія. Бугаевская функція E (entier). Машины дедукціи.

I. Понятіе о «круглыхъ числахъ», какъ и понятіе о четырехъ основныхъ дѣйствіяхъ ариѳметики, берется изъ практики и возводится въ достоинство

*) Эта послѣдняя теорія разработана въ трудахъ Лагранжа, Коши, Фукса, Вейерштрасса и моихъ совмѣстно съ проф. Анисимовымъ (см. *А. В. Анисимовъ*: 1) «Предѣльный кругъ Фукса и его приложенія». Варшава, 1892. 2) «Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій». Москва, 1889).

**) *Maurice d'Ocagne*: Traité de Nomographie. Paris, 1899.

научнаго понятія, которому соотвѣтствуютъ указанныя ниже элементарныя аритмологическія дѣйствія.

«Круглыя» числа суть *цѣлыя* числа, кои получаются какъ при абсолютномъ, такъ и при относительномъ измѣреніи вмѣсто дробныхъ и ирраціональныхъ чиселъ.

При числовомъ опредѣленіи, напримѣръ, возраста показывается круглое число лѣтъ, а для младенца круглое число мѣсяцевъ или дней.

Градуировка нормальной скалы аналитической функціи $f(\alpha)$ (см. выше § 14_2) сводится къ нарощеніямъ перемѣннаго α цѣлымъ круглымъ числомъ единичекъ, равныхъ постоянной разности $\Delta\alpha$ ариѳметической прогрессіи $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Выравниваніе истинныхъ, сырыхъ статистическихъ таблицъ (см. § 13) производится при помощи круглыхъ чиселъ, на почвѣ теоріи вѣроятностей. Погрѣшности безчисленныхъ округленій исправляются въ порядкѣ страховыхъ гарантій.

Поясняя распространеніе числовыхъ округленій, должно сказать, что эти операціи въ несчетномъ множествѣ проникаютъ не только въ формулы экономіи *), но и въ психофизіологическую теорію, въ скалы и формулу связи ощущенія съ внѣшними его причинами, его возбуждающими **).

Исчисленіе налоговъ, доходовъ и заработной платы по душамъ необходимо сопровождается болѣе или менѣе значительными округленіями ***).

За товаръ, точная стоимость котораго вмѣстѣ съ причитающеюся прибылью за трудъ торговли есть число x денежныхъ единицъ, могущее оказаться дробнымъ и даже ирраціональнымъ, купецъ беретъ съ публики, для скорости разсчета, не x, а *ближайшее* къ x *цѣлое* число единицъ, называемое «круглымъ» (см. *В Ф. Гартцъ*: Явленіе круглыхъ цѣнъ. Экономическій этюдъ. С.-Петербургъ, 1910).

*) *П. А. Некрасовъ*: «Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты». С.-Петерб. 1910.

**) *Н. В. Бугаевъ*: Математика и научно-философское міросозерцаніе. (Матем. Сборникъ, томъ XXV).

В. Г. Алексѣевъ: Гербартъ, Штрюмпель и ихъ педагогическія системы. (Журн. Мин. Нар. Просв. за 1906 г. и Сборникъ Учено-Лит. Общества при Юрьевск. Унив. за 1907 г).

А. П. Нечаевъ: Экспериментальная психологія въ ея отношеніи къ вопросамъ школьнаго обученія. С.-Петерб. 1901.

***) Вотъ евангельская притча, оправдывающая округленіе заработной платы. «Царство небесное подобно хозяину дома, который вышелъ рано поутру нанять работниковъ въ виноградникъ свой. И договорившись съ работниками по динарію на день, послалъ ихъ въ виноградникъ свой. Вышедъ около третьяго часа, онъ увидѣлъ другихъ, стоящихъ на торжищѣ праздно. И имъ сказалъ: идите и вы въ виноградникъ мой, и что слѣдовать будетъ, дамъ Вамъ. Они пошли. Опять вышедъ около шестого и девятаго часа, сдѣлалъ то же. Наконецъ, вышедъ около одиннадцатаго часа, онъ нашелъ другихъ стоящихъ праздно, и говоритъ имъ; что вы стоите здѣсь цѣлый день праздно? Они говорятъ ему: никто насъ не нанялъ. Онъ говоритъ имъ: идите вы въ виноградникъ мой, и что слѣдовать будетъ, получите. Когда же наступилъ вечеръ, говоритъ господинъ виноградника управителю своему: позови работниковъ и отдай имъ плату, начавъ съ послѣднихъ до первыхъ. И пришедшіе около одиннадцаго часа получили по динарію. Пришедшіе же первыми думали, что они получатъ больше; но получили и они по динарію. И получивши стали роптать на хозяина дома. И говорили: эти послѣдніе работали одинъ часъ, и ты сравнялъ ихъ съ нами, перенесшими тягость дня и зной. Онъ же въ отвѣтъ сказалъ одному изъ нихъ: другъ: я не обижаю тебя; не за динарій ли ты договорился со мною? Возьми свое и пойди; я же хочу дать этому послѣднему, то же, что и тебѣ. Развѣ я не властенъ въ своемъ дѣлать, что хочу? Или глазъ твой завистливъ отъ того, что я добръ? Такъ будутъ послѣдніе первыми, и первые послѣдними; ибо много званныхъ, а мало избранныхъ». Матв. XX. 1—16.

Методъ круглыхъ чиселъ и относительныхъ метрическихъ выравниваній приводитъ къ радикальнымъ упрощеніямъ разсчетовъ, хотя и сопровождается погрѣшностями, на которыя необходимо воздѣйствовать профилактическими мѣрами правооборота, какъ противоядіями погрѣшностей. Въ числѣ этихъ мѣръ играютъ роль соотвѣтствующіе законы и заклады (профилактическія гарантіи).

Задача *хорошей* гражданской теоріи и *хорошаго* правомѣрія состоитъ въ томъ, чтобы сдѣлать эти погрѣшности отъ упрощенія несмертельными и даже повернуть ихъ въ хорошую сторону съ точки зрѣнія общаго блага и хозяйствованія, общественнаго и частнаго. *Упрощеніе и выигрышъ скорости разсчета имѣютъ сами по себѣ цѣнность.*

Мономные тарифы, упоминаемые ниже (въ части III) и распространяемые на цѣлое государство (напр., тарифъ за почтовую простую корреспонденцію), являются результатомъ научно разсчитанныхъ округленій, основываемыхъ на статистикѣ и на ученіи о вѣроятностныхъ среднихъ величинахъ, какъ центрахъ, около которыхъ собирается наибольшая надежность предсказанія.

Понятіе «круглое цѣлое число» въ отношеніи даннаго дробнаго или ирраціональнаго числа x оказывается *не совсѣмъ опредѣленнымъ*. Операція округленія числа x должна давать въ результатѣ *ближайшее* къ x цѣлое число; но какое? меньшее x или же большее x—вотъ вопросъ. Это вопросъ неопредѣленный, рѣшаемый иногда по вдохновенію полномочной воли, иногда же по правилу или закону.

Обозначимъ символомъ $E_a(x)$ цѣлое число, удовлетворяющее неравенствамъ:

$$a < x - E_a(x) < a + 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Цѣлое число $E_a(x)$ будетъ ближайшимъ къ x, меньшимъ или большимъ, если величина a выбрана подъ условіями:

$$-1 \leqq a \leqq 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Неопредѣленность «круглаго числа» разрѣшается символомъ $E_a(x)$, если величина a дана разъ навсегда какою либо волею или законамъ.

Функція $E_a(x)$ при данномъ a вполнѣ опредѣлена соотвѣтственно всѣмъ значеніямъ непрерывнаго перемѣннаго x, кромѣ тѣхъ, для которыхъ разность $x - a$ окажется цѣлою. Для цѣлыхъ значеній $x - a$ одно изъ неравенствъ:

$$a < x - E_a(x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$x - E_a(x) < a + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

должно обращаться въ равенство, чтобы опредѣлять цѣлое число $E_a(x)$, ближайшее къ x. Но какое именно изъ неравенствъ (3) и (4) должно обращаться въ равенство—это опять неопредѣленный вопросъ. Эта неопредѣленность опять можетъ быть разрѣшена даннымъ опредѣленнымъ *правиломъ* или же точнымъ указаніемъ *той воли, той судьбы*, вдохновенію которой предоставлено подобное рѣшеніе.

Въ опредѣленіи круглой цѣны какого либо товара x купецъ клонитъ всѣ неопредѣленности операціи къ своей выгодѣ, но считается съ конкурренціей и съ успѣхомъ сбыта товара въ публикѣ; что побуждаетъ его иногда къ уступкѣ.

Если положимъ: $a = 0$, то получимъ функцію $E_0(x)$, удовлетворяющую условіямъ:

$$0 < x - E_0(x) < 1. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Эта функція даетъ круглое число, *всегда меньшее* округляемаго числа x.

Если положимъ: $a = -1$, то получимъ функцію $E_{(-1)}(x)$, удовлетворяющую условіямъ:

$$-1 < x - E_{(-1)}(x) < 0 \quad \ldots\ldots \quad (5')$$

и дающую круглое число, *всегда большее* округляемаго числа x.

Если x есть цѣна товара, то къ округленію $E_0(x)$ стремится *покупатель*, а къ округленію $E_{(-1)}$ стремится *продавецъ*.

Примѣчателенъ случай, когда $a = -\frac{1}{2}$.

Функція $E_{(-\frac{1}{2})}(x)$, которую для краткости обозначимъ чрезъ $E'(x)$ и которая обусловливается неравенствами:

$$-\frac{1}{2} < x - E'(x) < +\frac{1}{2}, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

уравновѣшиваетъ положительныя ошибки числоваго округленія съ отрицательными. Круглыя числа $E'(x)$, поэтому, весьма употребительны въ математикѣ, въ точныхъ прикладныхъ наукахъ, въ правомѣріи.

Числовыя округленія этого рода употребительны въ дорожныхъ разсчетахъ съ публикой, въ казенныхъ и общественныхъ платежахъ, взыскиваемыхъ по раскладкѣ и пр., въ построеніи таблицъ и тарифовъ разнаго рода.

Функція $E_a(x)$ является элементарной аритмологической функціей непрерывнаго перемѣннаго x; она *скачкомъ* измѣняется въ тѣ моменты когда $x - a$ проходитъ чрезъ цѣлыя значенія. Въ остальныхъ же случаяхъ она ведетъ себя какъ *постоянное* количество, а не какъ функція.

Функцію $E_a(x)$ назовемъ Бугаевскаго, такъ какъ Н. В. Бугаевъ множествомъ своихъ трудовъ выяснилъ большое значеніе операціи цѣленія (entier) или округленія дробныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, какъ обыкновенныхъ, такъ и (при аналогическомъ распространеніи) алгебраическихъ.

Всѣ функціи $E_a(x)$ сводятся къ *основной* Бугаевской функціи $E_0(\xi)$ при помощи легко доказываемаго соотношенія:

$$E_a(x) = E_0(x - a). \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Функція $E_a(x)$ столь же распространена въ чистой и прикладной математикѣ, какъ и основныя элементарныя дѣйствія ариѳметики: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе.

II. *Системы счисленія.* Вообразимъ неограниченный, напередъ данный безконечный рядъ алгоритмовъ:

$$E_{a_1}(x),\ E_{a_2}(x),\ E_{a_3}(x), \ldots, E_{a_k}(x), \ldots, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

гдѣ величины $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяютъ условіямъ (2).

Этотъ рядъ можетъ служить для разложенія x въ различные ряды.

Если дано:

$$-1 < \eta < +1,$$

то рядъ (7) аритмологическихъ операцій $E_a(x)$ даетъ возможность разложить всякое число x въ сходящійся рядъ вида:

$$x = n_1 + \eta \cdot n_2 + \eta^2 \cdot n_3 + \ldots + \eta^k \cdot n_{k-1} + \ldots, \quad \ldots \quad (8)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= E_{a_1}(x),\ n_2 = \eta \cdot E_{a_2}\left(\frac{x - n_1}{\eta}\right), \\ n_3 &= \eta \cdot E_{a_3}\left(\frac{x - n_1 - \eta n_2}{\eta}\right), \ldots, \\ n_{k+1} &= \eta \cdot E_{a_k}\left(\frac{x - n_1 - \eta \cdot n_2 - \ldots - \eta^{k-1} \cdot n_k}{\eta}\right), \ldots \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

Если положимъ: $\eta = \frac{1}{10}$, то рядъ (8) будетъ разложеніемъ числа x въ *обобщенную* десятичную дробь, пока числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ отличны отъ нуля; если же $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = 0$, то эта десятичная дробь бу-

детъ *обычною*, популярною. Обобщенная десятичная дробь имѣетъ ту особенность, что ея десятичные знаки могутъ быть какъ положительными, такъ и отрицательными.

Если будемъ полагать:

$$\eta = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{3}, \ldots,$$

то получимъ системы двоичнаго, троичнаго и т. д. счисленія дробей.

III. *Непрерывныя дроби.* Рядъ алгоритмовъ (7) можетъ служить для разложенія числа x въ *обобщенную* непрерывную дробь:

$$x = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

гдѣ

$$n_1 = E_{a_1}(x), \quad n_2 = E_{a_2}\left(\frac{1}{x - n_1}\right), \quad n_3 = E_{a_3}\left(\frac{x - n_1}{1 - (x - n_1)\,.\,n_2}\right), \ldots (9')$$

Дробь (8) дѣлается обыкновенною непрерывною дробью, если $a_1 = a_2 = \ldots = 0$.

Если же нѣкоторыя изъ величинъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ отличны отъ нуля, то нѣкоторыя звенья $n_1, n_2, n_3, \ldots$ могутъ оказаться отрицательными числами.

Можно также положить:

$$x = n_1 + \cfrac{\eta_1}{n_2 + \cfrac{\eta_2}{n_3 + \ldots}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

гдѣ $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ есть напередъ данный рядъ конечныхъ чиселъ и

$$n_1 = E_{a_1}(x), \quad n_2 = E_{a_2}\left(\frac{\eta_1}{x - n_1}\right), \quad n_3 = E_{a_3}\left(\frac{\eta_2 (x - n_1)}{\eta_1 - (x - n_1)\, n_2}\right), \ldots$$

Непрерывныя дроби вида (10) могутъ имѣть значеніе тогда, когда онѣ окажутся *сходящимися* *).

IV. *Обыкновенные интегралы.* Рядъ (7) алгоритмовъ $E_a(x)$ можетъ служить для опредѣленія величины интеграла $\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$, если функція $f(z)$ при непрерывномъ возрастаніи z отъ x_0 до x конечна.

Нужно исходить изъ основного опредѣленія, которое можетъ быть записано такъ:

$$\int_{x^0}^{x} f(z)\,dz = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\Delta x_k \,.\, E_{a_k}\left(\frac{x_{k+1}}{\Delta x_k}\right)\right) . \Delta x_k \right\}, \quad \ldots (11)$$

*) *И. В. Слешинскій.* Къ вопросу о сходимости непрерывныхъ дробей. Матем. Сборн., томъ XIV, стр. 337 и 436.

гдѣ $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и рядъ величинъ:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n, x_{n+1}$$

строится подъ условіями: 1) $x_{n+1} = x$ и 2) каждая изъ разностей:

$$\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_n$$

должна стремиться къ нулю при возрастаніи n до безконечности.

До перехода къ предѣлу, когда n еще конечное число, сумма

$$\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\Delta x_k \,.\, E_{a_k}\left(\frac{x_{k+1}}{\Delta x_k}\right)\right) . \Delta x_k \quad \ldots\ldots (11')$$

и интегралъ

$$\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$$

могутъ представлять другъ друга *приближенно* (подобно формулѣ Эйлера). Номографическое исчисленіе на практикѣ удовлетворяется подобными приближеніями. Но извѣстными способами анализа можно построить точное выраженіе дополнительнаго члена или поправки этого приближенія.

V. *Ариѳмометры.* Исчисленіе *конечныхъ* суммъ вида (11′) (интеграловъ по конечнымъ разностямъ) вдоль данной скалы перемѣннаго x совершается при помощи *ариѳмометровъ*,—машинъ, весьма быстро совершающихъ дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія. Нынѣ, благодаря ариѳмометрамъ и приближенному номографическому исчисленію, стали сводить вопросы анализа къ вопросамъ аритмологической дедукціи, вопросы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія въ анализѣ безконечно малыхъ къ вопросамъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія по *конечнымъ* разностямъ.

Дифференціальныя уравненія съ однимъ и многими независимыми перемѣнными и алгебраическія уравненія рѣшаются нынѣ машинообразно аритмологическою дедукціей, сличеніемъ градуированныхъ скалъ по транспаранту и приближеніями, схватывающими первые и самые значительные члены безконечныхъ рядовъ совершенно точнаго высшаго анализа.

Сдѣланныя поясненія показываютъ, что операція $E_a(x)$ входитъ во всѣ наиболѣе важные теоретическіе и практическіе вопросы анализа и аритмологической дедукціи и во всѣ вопросы индукціи, рѣшаемые въ упрощенной и приближенной формѣ записями, исчисленіями, измѣреніями и теоріями вѣроятностей и статистики.

VI. *Обратные вопросы аритмологіи.* Пусть ставится слѣдующій вопросъ.

Задача 1. *Дано цѣлое число* n, *равное* $E_a(x)$,

$$E_a(x) = n. \quad \ldots \quad (12)$$

Найти число x, *удовлетворяющее уравненію* (12).

Рѣшеніе. Отвѣтъ на этотъ вопросъ неопредѣленный; однако же неопредѣленную величину x возможно исчислить приближенно съ точностью до 1, т. е. съ погрѣшностью, меньшею 1 и даже меньшею $\frac{1}{2}$. Величины $a+n$ и $a+n+1$ суть приближенныя къ искомому числу x выраженія, одно меньшее x и другое больше x, т. е.

$$a+n < x < a+n+1.$$

Иначе говоря, «корень» x аритмологическаго уравненія (12) представится, во-первыхъ, такъ:

$$x = a+n+\theta, \quad \ldots \quad (12')$$

гдѣ дополнительный членъ θ есть Бугаевская произвольная единица (0,1), обусловленная неравенствами: $0 < \theta < 1$; во-вторыхъ, тотъ же «корень» представится такъ:

$$x = a+n+1-\theta', \quad \ldots \quad (12'')$$

гдѣ дополнительный членъ θ' есть опять произвольная единица (0,1), $0 < \theta' < 1$. Неопредѣленность задачи выражается въ томъ, что всякая произвольная величина x вида (12′) или вида (12″) удовлетворитъ уравненію (12). Сложивъ уравненія (12′) и (12″) и дѣля результатъ на 2, найдемъ:

$$x = a+n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\theta'', \quad -1 < \theta'' < +1 \quad \ldots \quad (12''')$$

Слѣдующая задача является обобщеніемъ предшествующей задачи.

Задача 2. *Дано цѣлое число* n. *Найти* x *такъ, чтобы имѣло силу уравненіе*:

$$E_a\left(\frac{x}{\eta}\right) = n \quad \ldots \quad (13)$$

Отвѣтъ на вопросъ неопредѣленный; однако же неопредѣленную величину x возможно исчислить приближенно съ погрѣшностью, меньшею η и даже меньшею $\frac{1}{2}\eta$. Именно, за приближенное значеніе величины x нужно принять ту или другую изъ величинъ:

$$(a+n)\,\eta \quad \text{и} \quad (a+n+1)\,\eta.$$

Будемъ имѣть:

$$x = (a+n)\,\eta + \theta\eta = (a+n+1)\,\eta - \theta' \cdot \eta, \quad \ldots \quad (13')$$

гдѣ θ и θ' суть Бугаевскія произвольныя единицы (0,1),

$$0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta' < 1 \quad \ldots \quad (13'')$$

Изъ равенствъ (13′) слѣдуетъ:

$$x = \left(a+n+\frac{1}{2}\right)\eta + \frac{\eta}{2}\cdot\theta'', \quad \ldots \quad (13''')$$

$$-1 < \theta'' < +1.$$

Числовая алгебра (см. § 1) рѣшаетъ *неопредѣленнымъ анализомъ* и болѣе общіе *обратные* вопросы аритмологіи.

§ 17_1. Аритмологическое выраженіе длины отрѣзковъ градуированной правильной скалы непрерывнаго перемѣннаго числа. Невязки вообще. Соціальныя невязки. Метрическое округленіе.

I. Вернемся къ разсмотрѣнной выше (§ 14_2) правильной скалѣ, т. е. къ скалѣ функціи $f(\alpha) = \alpha$, содержащей штрихи съ числовыми помѣтками, нанесенные на прямолинейное основаніе Ox, полагая

$$x = L \cdot \alpha,$$

гдѣ L есть линейный модуль скалы.

Числовыя помѣтки

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots$$

этой скалы представляютъ ариѳметическую прогрессію, постоянную разность которой обозначимъ чрезъ $\Delta\alpha$.

Если x_k есть длина скалярнаго отрѣзка $O\alpha_k$ между началомъ O и штрихомъ съ помѣткою α_k, то будемъ имѣть:

$$x_k = L \cdot \alpha_k = O\alpha_0 + k \cdot L \cdot \Delta\alpha.$$

Отсюда слѣдуетъ лемма.

Лемма.

$$x_k = x_0 + H \cdot E_{(-1)}\left(\frac{x-x_0}{H}\right),$$

гдѣ

$$H = L \cdot \Delta\alpha, \quad x = L \cdot \alpha, \quad \alpha_k < \alpha < \alpha_{k+1}.$$

Эта непосредственно очевидная лемма показываетъ, что при непрерывномъ измѣненіи числа α въ предѣлахъ (α_k, α_{k+1}) выраженіе

$$\xi = x_0 + H \,.\, E_{(-1)}\left(\frac{x - x_0}{H}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

остается постоянною величиною, равною длинѣ x_k. При переходѣ же перемѣннаго α чрезъ значеніе α_{k+1} постоянная величина ξ скачкомъ измѣняется, переходя изъ значенія x_k въ значеніе x_{k+1}. Если функцію $\frac{\xi}{L}$ перемѣннаго α изобразить на той же скалѣ Ox, то при непрерывномъ измѣненіи α образъ этой функціи будетъ стоять и прыгать скачками.

Уравненіе (I) опредѣляетъ общее аритмологическое выраженіе отрѣзковъ градуированной правильной скалы перемѣннаго числа α по данной длинѣ ея ступени H и по данному одному отрѣзку x_0. Это выраженіе устанавливаетъ тѣсную связь между номографическимъ исчисленіемъ и аритмологіей. Задачи и діаграммы числовой алгебры и числовой геометріи Н. В. Бугаева и, съ другой стороны, задачи и діаграммы номографическаго исчисленія различаются лишь терминологіей.

II. Важнѣйшія интерпретаціи относятся къ лакунамъ таблицъ или градуированной скалы, несущей на себѣ колонну цифръ таблицы. Лакуны эти тѣмъ шире, чѣмъ болѣе $\Delta\alpha$ или $H = L \,.\, \Delta\alpha$. Слѣдуетъ отмѣтить, что таблица превратится въ сплошную лакуну, а скала превратится въ сплошное *пустое* мѣсто (кромѣ пункта α_0, гдѣ $\xi = x_0$), если

$$\Delta\alpha = \infty.$$

Если діаграмма соединяетъ нѣсколько правильныхъ скалъ, относящихся къ перемѣннымъ, связаннымъ между собою уравненіями, то штрихи одной скалы могутъ по транспаранту соотвѣтствовать не штрихамъ другихъ скалъ, а мѣстамъ, кои не имѣютъ штриховки, т. е. лакунамъ. Эти дефекты назовемъ *невязками*. Поправки этихъ невязокъ нормальнымъ интерполированіемъ на глазомѣръ допустимы, если лакуны не велики и не принадлежатъ къ областямъ особыхъ точекъ разсматриваемыхъ функцій, связанныхъ уравненіями; въ противномъ случаѣ требуются изслѣдованія съ помощью числовой алгебры и точнаго анализа.

Невязки встрѣчаются въ самыхъ точныхъ планахъ и діаграммахъ (у геодезистовъ, астрономовъ, механиковъ и проч.). Тамъ они поправимы механическимъ интерполированіемъ. Но невязки въ измѣреніяхъ работы человѣка, его нуждъ и его силъ, физическихъ и психологическихъ, бываютъ огромны; ибо общеупотребительныя таблицы часто бываютъ столь лакунарны, что тамъ механическое интерполированіе недостаточно; тамъ необходимы соціальные тарифы налога и кредита и учеты вѣроятностей, раціональная филантропія и правомѣріе (гуманитарное интерполированіе).

Огромная лакунарность нѣкоторыхъ соціальныхъ тарифовъ бываетъ благотворна, если она искупается взаимностью жертвъ и оказывается, поэтому, достовѣрностью, совмѣстною съ общимъ благомъ. Такъ почтовый тарифъ сводитъ къ семикопеечной маркѣ стоимость доставленія простого письма на любое разстояніе x между пунктами отправленія и полученія корреспонденціи. Это упрощеніе почтового тарифа есть въ сущности сведеніе градуировки скалы къ помѣткѣ только *одной* центральной точки; а внѣ этой точки не дѣлается помѣтокъ, и соотвѣтственно сему имѣетъ мѣсто допущеніе огромной лакуны въ таблицѣ; и никто въ здравомъ умѣ не станетъ протестовать противъ лакуны и безчисленныхъ и грубыхъ невязокъ, связанныхъ съ этимъ прекраснымъ почтовымъ изобрѣтеніемъ.

III. Въ формулы (8′) и (11) § 16 и въ приведенную сей часъ формулу (I) вошли операціи вида:

$$H \,.\, E_a\left(\frac{B}{H}\right).$$

Этотъ символъ выражаетъ весьма распространенное дѣйствіе; оно можетъ быть истолковано въ связи съ измѣреніемъ величины и съ *двойнымъ* преобразованіемъ *единицы* для измѣреній, переходя сначала отъ старой единицы къ новой, а потомъ, наоборотъ, отъ новой единицы къ старой и дѣлая вставку операціи $E_a(x)$ между двумя упомянутыми противоположными дѣйствіями. При этомъ измѣренію подлежитъ величина B, а число H играетъ роль отношенія *двухъ* абсолютныхъ мѣръ (единицъ): *новой* l' и *старой* l, которою величина B была измѣрена первоначально (до перемѣны мѣры), послѣ чего количественно выразилась числомъ B. Въ символѣ $H \,.\, E_a\left(\frac{B}{H}\right)$ можемъ, слѣдовательно, положить:

$$H = l' : l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

считая количество $\frac{B}{H}$ числовымъ значеніемъ величины B, измѣренной *новою* единицей l'; тогда какъ B есть числовой результатъ, полученный при помощи старой единицы l.

Операція $E_a\left(\frac{B}{H}\right)$ отбрасываетъ дробную часть числа $\frac{B}{H}$. Но затѣмъ умноженіе результата $E_a\left(\frac{B}{H}\right)$ на число H соотвѣтствуетъ *обратной* метрической операціи, а именно—противоположному переходу отъ измѣренія величины $E_a\left(\frac{B}{H}\right)$ новою единицей l' къ измѣренію старою единицей l.

Противоположныя метрическія дѣйствія погасятъ другъ друга, если операція $E_a\left(\frac{B}{H}\right)$ не измѣнитъ величины $\frac{B}{H}$; что бываетъ при цѣломъ

$\frac{B}{H}$. Но вообще $\frac{B}{H}$ не есть цѣлое число, а потому противоположныя метрическія операціи, разъединенныя операціей $E_a\left(\frac{B}{H}\right)$, не всегда погашаютъ другъ друга.

О вліяніи перемѣны абсолютныхъ мѣръ конкретныхъ величинъ на числовыя значенія однородныхъ и разнородныхъ величинъ дается строгое понятіе въ Приложеніи Алгебры къ наукамъ, пользующимся абсолютными мѣрами, напримѣръ, къ геометріи *), къ механикѣ и математической физикѣ, къ геодезіи, къ финансово-экономическимъ составнымъ количествамъ **).

Операцію $H\,.\,E_a\left(\frac{B}{H}\right)$ назовемъ *метрическимъ округленіемъ* величины B. Отношеніе (II), т. е. число H, назовемъ *масштабомъ* этого округленія.

§ 17_2. Правильное или равномѣрное аритмологическое преобразованіе непрерывныхъ перемѣнныхъ.

Изъ вышеизложеннаго видно, что въ безчисленномъ множествѣ случаевъ приходится замѣнять непрерывныя перемѣнныя x, y, z, ... правильно прерывными, соединяя эту замѣну съ округленіями и выравниваніями и пользуясь Бугаевской операціей E.

Поясняя идею этого преобразованія, ограничимся разсмотрѣніемъ одного перемѣннаго x. Равенство (I) предыдущаго § даетъ примѣръ правильнаго аритмологическаго преобразованія непрерывнаго перемѣннаго x. Обобщенная форма этого равенства, относящаяся къ независимому перемѣнному x, измѣняющемуся посредствомъ приращеній Δx отъ своего начальнаго значенія x_0, такова:

$$\xi = x_0 + H\,.\,E_a\left(\frac{x-x_0}{H}\right), \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

$$H = \mu\,.\,\Delta x,$$

гдѣ ξ есть *новое* перемѣнное. Число μ будемъ считать цѣлымъ. Значенія новаго перемѣннаго ξ и стараго перемѣннаго x *совпадаютъ*, когда $\frac{x-x_0}{H}$ оказывается цѣлымъ числомъ, и *не совпадаютъ*, когда $\frac{x-x_0}{H}$ не есть цѣлое число. Разность $x-\xi$ по абсолютной величинѣ не можетъ отклониться отъ нуля болѣе, чѣмъ на H; ибо

$$a < \frac{x-\xi}{H} < a+1, \quad -1 < a < 0 \quad \ldots\ldots (14')$$

*) *П. А. Некрасовъ:* «Приложеніе алгебры къ геометріи», §§ 8, 12 и 41. Москва. 1897.

**) *П. А. Некрасовъ*: «Математическая статистика». С.-Петербургъ. 1910.

При возрастаніи x перемѣнное ξ то стоитъ, то возрастаетъ скачками на величину H лишь въ тѣ моменты, когда разность

$$\frac{x-x_0}{H} - a$$

дѣлается цѣлымъ числомъ; въ остальные же моменты ξ остается постояннымъ.

Такъ какъ метрическія округленія постоянныхъ величинъ и аритмологическія преобразованія (14) перемѣнныхъ величинъ слишкомъ сильно распространены въ публичномъ правѣ и распространены также въ научныхъ опытахъ и естественныхъ процессахъ, то въ *массовыхъ* соотношеніяхъ и явленіяхъ накопляются значительные, весьма чувствительные *валовые итоги невязокъ и погрѣшностей*, отдѣльно неощутительныхъ, незначительныхъ. Эти валовые итоги могутъ играть важную отрицательную роль въ общей экономіи, если ихъ не наблюдать и не взвѣшивать съ помощью слѣдующихъ формулъ.

Остаточные члены и оцѣнка невязокъ.

Если b есть приближенное къ B количество, то остаточный членъ R есть: $R = B - b$.

Это есть *полная* величина отдѣльной калькуляторской погрѣшности.

Относительную же погрѣшность будемъ опредѣлять величиною ω, выводимою изъ уравненія: $B = b\,(1 + \omega)$.

Если эту величину ω умножить на 100, то полученный результатъ $r = 100\omega$ покажетъ погрѣшность въ $^0/_0$ отношеніи къ «капиталу» b, при чемъ дополнительный членъ R представитъ какъ бы $^0/_0{}^0/_0$ съ «капитала» b,

$$R = \frac{b\,.\,r}{100} = b\,.\,\omega.$$

Высшій предѣлъ M, котораго, при данномъ способѣ приближеннаго вычисленія, можетъ достигнуть абсолютное значеніе $|\omega|$ или модуль алгебраическаго количества ω назовемъ *ошибкою*, отнесенною къ единицѣ приближенной величины b. Очевидно,

$$R = b\,.\,M\,.\,\lambda, \text{ гдѣ } |\lambda| = (0{,}1) < 1 \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Пусть N есть число отдѣльныхъ погрѣшностей R_1, R_2, ..., R_N въ данномъ весьма длинномъ рядѣ приближенно вычисленыхъ величинъ B_1, B_2, ..., B_N. Представляя эти погрѣшности по формулѣ вида (15), $R_k = b_k\,.\,M_k\,.\,\lambda_k$, $|\lambda_k| < 1$, будемъ имѣть: $0 < |R_1 + R_2 + \ldots + R_N| < \beta$, $\beta = |b_1|\,.\,M_1 + |b_2|\,.\,M_2 + \ldots + |b_N|\,.\,M_N$.

Величину β для статистическихъ вычисленій и для конторскихъ фи-

нансовыхъ вычисленій назовемъ *валовою ошибкою*, соотвѣтствующею какъ бы обороту общаго «капитала» m, $m = |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_N|$.

Величину же

$$\Omega = \frac{\beta}{m} = \frac{|b_1| \cdot M_1 + |b_2| \cdot M_2 + \ldots + |b_N| \cdot M_N}{|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_N|} \cdot$$

назовемъ *среднею калькуляторскою ошибкою*, падающею на единицу «капитала» m.

Необходимо стремиться къ тому, чтобы эта средняя ошибка конторскихъ вычисленій была ничтожною. Легко видѣть, что $M' < \Omega < M''$, гдѣ M' и M'' суть наименьшая и наибольшая изъ величинъ M_1, $M_2, \ldots, M_N$.

Если эти вычисленія совершаются въ зависимости отъ помѣтокъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ скалы функціи $M_k = f(\alpha_k)$, то величины M' и M'' можно сообразить по Декартовской діаграммѣ этой функціи. При томъ въ области особыхъ или *критическихъ точекъ* этой функціи, гдѣ она и ея приросты весьма велики, величины M'' и $M''-M'$ могутъ быть весьма значительны, и калькуляція становится сомнительною; средняя ошибка Ω можетъ оказаться огромною. Такъ, для функціи $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$, скала которой выше разсматривалась подъ названіемъ «отрѣзочной», находимъ критическую точку съ помѣткой $\alpha = -1$.

§ 18$_1$. Теорія и опытъ изслѣдованія числовыхъ массивовъ и причинъ явленій. Дѣятельность и плоды. Индуктивныя системы уравненій и методъ исторіи. Двоякій реализмъ философіи исторіи. Сродство фактовъ чрезъ посредство понятій.

Обсудимъ здѣсь элементы философіи исторіи, въ которой играютъ роль проницательный кредитъ, теоретическая схема изслѣдованія массивовъ причинъ и явленій, нижеприведенная сличительная таблица и опытъ.

Сличительная таблица.

№ строки.	Несовм. виды дѣйствія E.	Плодъ x.	Теорет.	Опытн.
			p.	$\frac{m}{s} = \Delta v_x$.
1	E_1	x_1	p_1	Δv_{x_1}
2	E_2	x_2	p_2	Δv_{x_2}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	E_n	x_n	p_n	Δv_{x_n}

Въ этой таблицѣ, подсказывающей теоретически (à priori) обоснованную форму опытныхъ изслѣдованій, подъ буквой E разумѣется предстоящая дѣятельность въ операціи O, домогающейся плода x, который можетъ осуществиться въ различномъ количествѣ и качествѣ. Литера p означаетъ вѣроятность, à priori, выхода плода x, а символъ Δv_x, равный $\frac{m}{s}$, есть статистическая частость фактическаго выхода даннаго значенія x плода въ ряду s уже состоявшихся наблюденій (ср. часть II, § 18).

Понятіе статистической частости по существу апостеріорное; оно понятіе задняго числа. Тутъ наблюдатель имѣетъ дѣло съ двумя массивами: массивъ ΣE причинной дѣятельности въ операціяхъ типа O и массивъ Σx плодовъ, какъ результатовъ дѣятельности.

Вѣроятность и частость—это суть два лица Януса, бога философіи исторіи; одно лицо смотритъ назадъ, другое впередъ. Удивительно же то, что простѣйшій законъ большихъ чиселъ (теорема Я. Бернулли) устанавливаетъ при значительности числа s достовѣрность приблизительнаго равенства между p и Δv_x.

Отсюда слѣдуютъ безчисленныя приблизительныя системы уравненій между выводами теоріи и сказаніями опыта.

При этомъ методѣ найденныя частости и ариѳметическія середины перемѣнныхъ—правда, *приблизительно*—представятъ вѣроятности и математическія ожиданія, являющіяся независимо отъ фактовъ математическими конценціями родовыхъ понятій и общихъ именъ.

Приблизительныя уравненія

$$p_k = \frac{m_k}{s} \quad \text{и} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \frac{\Sigma x}{s} \cdot \quad \ldots \quad (A)$$

назовемъ *индуктивными*. Эти уравненія трактуются во II части (§ 18) и обобщаются въ III части (§§ 1—2).

Лѣвыя части этихъ уравненій получаются *дедуктивнымъ* апріорнымъ разсужденіемъ, исходя изъ данныхъ *несовмѣстимыхъ* видовъ или формъ дѣятельности E въ операціи O; правыя части уравненій исчисляются ревизіонно и индуктивно послѣ s-кратнаго повторенія операціи O.

Частости и, съ другой стороны, вѣроятности въ ихъ сближеніи съ помощію теоремы Я. Бернулли сличаютъ теорію съ опытною дѣйствительностію и *образуютъ ассоціацію двухъ міровъ*: міра фактовъ E и x и міра мысли p съ ея загаданными идеями, повторными вопросами и вѣчными проблемами возрождающейся жизни.

Собиранію же фактовъ (quaestio facti) соотвѣтствуетъ міръ ощущеній факта (третій міръ, эмпирическій), образующій отчетливыя непосредственныя представленія о фактахъ, регистрируемыя въ памяти и въ журналѣ.

Экспериментаторъ можетъ при желаніи присоединить къ дѣлу опе-

раціи *О вспомогательную* причину C, которая въ соединеніи съ альтернативной причиной E измѣнитъ вышеприведенную сличительную таблицу и въ ней всѣ вѣроятности p_k значеній x_k плода x. Ибо, вообще говоря, между возможнымъ фактомъ x_k и вспомогательною причиною C существуетъ *сродство*, иногда положительное, иногда отрицательное, всегда напередъ взвѣшиваемое посредствомъ вѣроятностей, т. е. посредствомъ міра мысленныхъ понятій. *Мѣриломъ силы сродства* (связи) можетъ служить указанная въ § 4, п. 3, варіація δp; а сближая этотъ теоретическій критерій сродства съ опытными данными посредствомъ индуктивныхъ уравненій типа (A), можемъ за мѣрило сродства брать приростъ $\delta \frac{m}{s}$ частости $\frac{m}{s}$ явленія x подъ впечатлѣніемъ массива явленій C. Можно брать и другія точно опредѣленныя мѣрила сродства фактовъ, какъ это будетъ указано въ части III. Англійская школа статистиковъ (F. Galton, K. Pearson, Udny Yule) широко пользуется этими мѣрилами.

Математическое ожиданіе какой либо возможной *реальности* есть *концепція*, или *умозрительное значеніе* реальности. Реализмъ утилитарный есть матеріализмъ; реализмъ творческій во имя общественной идеи есть спиритуализмъ, насыщающій умъ и сердце (органъ вѣры) культурными понятіями права и нравственнаго міропорядка, составляющаго предметъ необходимости, ибо «не однимъ только хлѣбомъ живъ человѣкъ».

Реализмъ, слѣдовательно, бываетъ по качеству въ однихъ случаяхъ матеріалистическимъ, въ другихъ спиритуалистическимъ. Міръ сложенъ.

Графическій сличительный методъ, открывающій законы природы и общественности.

Индуктивная система уравненій (A) есть основной *эвристическій* элементъ познанія естественныхъ и общественныхъ закономѣрностей, критически согласующаго теоретическія понятія съ конкретною дѣйствительностью. Разъединяя правыя и лѣвыя части индуктивныхъ уравненій (A), имѣющія различное происхожденіе (теоретическое и опытное), вообразимъ двѣ декартовскія діаграммы:

$$1)\ y = p_k \qquad \text{и} \qquad 2)\ y = \Delta v_{x_k} = \frac{m_k}{s}\cdot \quad . \ . \ . \ . \ . \ (Б)$$

Первый изъ этихъ графиковъ чисто теоретическій; второй чисто опытный, вычерпанный изъ непосредственнаго планомѣрнаго разсмотрѣнія фактовъ. Это — два какъ бы графическихъ зеркала, отражающихъ два міра; оба они имѣютъ подъ собою общую истинную опору, оформленную какъ приблизительная достовѣрность въ теоремѣ Я. Бернулли; ихъ однакоже нужно согласовать вторично и болѣе точно въ виду извѣстныхъ изъяновъ теоремъ Я. Бернулли и Пуассона.

Въ этомъ эвристическомъ методѣ играетъ роль сличеніе графиковъ, т. е. наложеніе одного графика на другой, причемъ стараются замѣтить, имѣетъ ли мѣсто «сходимость» (т. е. приблизительное совпаденіе) или же, наоборотъ, «расходимость» (т. е. значительное расхожденіе) частей той и другой фигуры.

Въ пунктахъ сходимости діаграммъ искомая объективная закономѣрность считается существующей въ самомъ бытьи, и соотвѣтствующіе графики *достойны санкціи* ореоломъ науки и проницательной вѣры.

Въ пунктахъ расходимости діаграммъ закономѣрность считается ненайденной; тутъ либо первый графикъ, либо второй, либо оба вмѣстѣ признаются *сомнительными* по недостатку наблюденій.

Какъ сходимость, такъ и расходимость можетъ быть результатомъ какой-либо субъективной поддѣлки (лжи); но тутъ необходима предварительная особая критика и выводовъ, и цыфровыхъ фактическихъ матеріаловъ.

Изложенный эвристическій методъ приложимъ къ познанію какъ природы, такъ и общественной психологіи, спрашивая планомѣрно отдѣльныя индивидуальныя души, способныя къ вѣроподобному показанію.

Очевидно, индуктивныя уравненія (A) и сличеніе между собою двухъ графиковъ $(Б)$ способны: 1) укрѣплять въ знаніи хорошій реализмъ и хорошую культурно-общественную идеологію, 2) гнать прочь гнилой товаръ реализма и идеологіи, 3) подсказывать мѣры C помощи.

Хронологизація событій. Выпускъ дѣйствующей наличности, окупаемый за счетъ будущихъ плодовъ. Обороты исторіи, машинообразный и немашинообразный.

Въ эвристическомъ методѣ играетъ роль, кромѣ графика вѣроятности, хронологія, историческая скала и преемственность. При послѣдовательномъ исчисленіи выпуска дѣятельностей типа E, домогающихся выхода плодовъ типа x, долгосрочные процессы исторіи анализомъ разсѣкаются на кратчайшіе элементарные интервалы $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ времени τ, считая отъ начальнаго момента τ до момента $\tau + \Delta\tau$ выхода плодовъ ближайшаго срока. Плоды реализуются въ концахъ послѣдовательнаго ряда интерваловъ:

$$(\tau, \tau + \Delta\tau),\ (\tau + \Delta\tau, \tau + 2\Delta\tau),\ (\tau + 2\Delta\tau, \tau + 3\Delta\tau), \ldots \ . \ . \ (1)$$

Если хронологія разсматриваетъ послѣдовательность подготовительныхъ дѣйствій къ выходу плода x, то очередной интервалъ $(t,\ t + \Delta\tau)$ разбиваютъ на мельчайшіе послѣдовательные интервалы:

$$(t,\ t + \delta\tau),\ (t + \delta\tau,\ t + 2\delta\tau), \ldots,\ (t + \gamma\,.\,\delta\tau - \delta\tau,\ \gamma\,.\,\delta\tau), \ . \ . \ (1')$$

гдѣ $\gamma\,.\,\delta\tau = \Delta\tau$.

Историческая развертка событій, ихъ расклубленіе по этой скалѣ,

есть вопросъ исторической динамики и кинематики, разрѣшаемый мелкопомѣстными опытами съ помощію двухъ готовыхъ схемъ: по схемѣ раціональной механики (при чемъ и общество трактуется какъ механическая система одушевленныхъ точекъ) и по схемѣ изъяновъ механики, исправляемыхъ разумомъ и искусствомъ самаго отвѣтственнаго механика (тутъ властвуютъ уже законы духа и его интеллекта).

Надлежитъ замѣтить, что источникъ дѣятельности типа E обычно истощался бы, если бы ряды ея выпусковъ не возстановлялись за счетъ плодовъ. Это возстановленіе устанавливаетъ понятіе объ историческомъ *оборотѣ* или *выкупѣ* выпусковъ.

Дѣятельность типа E раздѣлимъ въ умѣ на двѣ части: одна часть E_0 представляетъ *достовѣрный* выпускъ наличной силы, другая же часть ΔE_0 представляетъ альтернативный выпускъ наличной силы, соотвѣтствующій частью игрѣ природы, частью хитрости и выдержкѣ людей и раскрывающійся окончательно уже въ процессѣ, въ концѣ соотвѣтствующаго изъ интерваловъ строки (1), когда ожидаемый загаданный плодъ x является (матеріализуется) въ наличности. Слѣдовательно, будемъ имѣть символическое тождество:

$$E = E_0 + \Delta E_0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Альтернативная сила ΔE_0 имѣетъ столько же возможныхъ несовмѣстимыхъ видовъ, сколько соотвѣтствующихъ видовъ имѣетъ дѣятельность E, каковые виды $E_1, \ldots, E_n$ вмѣстѣ съ вѣроятностями ихъ внесены въ вышеприведенную сличительную таблицу. Эти виды силы ΔE_0 обозначимъ соотвѣтственно символами: $\Delta E'_0$, $\Delta E''_0, \ldots$, $\Delta E_0^{(n)}$, полагая тождественно:

$$E_k = E_0 + \Delta E_0^{(k)},\ k = 1, 2, \ldots, n, \quad \ldots\ldots (3)$$

при чемъ p_k есть вѣроятность вида $\Delta E_0^{(k)}$ силы ΔE_0.

Міръ наблюдаемыхъ операцій $O_1, O_2, \ldots, O_s$, вырабатывающихъ плоды типа x повторяемою дѣятельностью типа E, выпускаетъ итожную дѣятельность ΣE; каждая изъ операцій O приноситъ въ концѣ срока свой плодъ x, а въ итогѣ получится количество обозначаемое формулой Σx. Между ΣE и Σx должно быть историческое соотвѣтствіе, распорядокъ или гармонія. Итогъ ΣE дѣятельностей типа E посредствомъ складыванія символическихъ уравненій вида (2) представится такъ:

$$\Sigma E = \Sigma E_0 + \Sigma \Delta E_0. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Члену ΣE_0 второй части равенства (4) соотвѣтствуетъ достовѣрность выпуска наличной силы ΣE_0. Если притомъ и возстановленіе выпущенной силы ΣE_0 за счетъ части Σa плодовъ Σx достовѣрно, то этому *правилу* будетъ соотвѣтствовать *машинообразный* оборотъ исторіи; а въ логикѣ ему будетъ соотвѣтствовать логическая машина Джевонса (см. ниже) или логика «трехъ законовъ» Аристотеля, воспроизведенныхъ въ философіяхъ

Канта, Милля и другихъ. (Эти законы суть: законъ противорѣчія, законъ исключеннаго третьяго и законъ тождества).

Закону машинообразнаго оборота не всегда подчиняется членъ $\Sigma \Delta E_0$ второй части символическаго равенства (4). Этому члену соотвѣтствуетъ возможная затрата силы $\Sigma \Delta E_0$, колеблющаяся (варіирующаяся) не только въ апріорномъ сужденіи, но и въ самомъ дѣлѣ. Покрытіе этой затраты требуетъ серьезнаго обсужденія. Въ противномъ случаѣ источникъ или сокровищница дѣйствующихъ силъ изсякнетъ, историческая гармонія жизни нарушится и машина жизни остановится, замретъ. Покроетъ ли часть $\Sigma(x—a)$ плодовъ Σx не искупленную силу $\Sigma \Delta E_0$,—вотъ вопросъ живознанія и историческаго соотвѣтствія или гармоніи (Лейбницъ). Онъ рѣшается графиками вѣроятности и послѣдовательною работою исторіи, враждебною Хаосу и Ночи. Въ сложномъ мірѣ нужно много осмотрительности.

Замѣтимъ еще слѣдующее осложненіе. Въ операціи O обычно мыслится не только хозяйствующій субъектъ, но и соучастники. Субъектъ, какъ сторона, долженъ опредѣлять свои права и обязанности относительно другихъ соучаствующихъ сторонъ. Соотвѣтственно этому раздѣленію и обособленію функцій, выпускаемая наличная сила дѣятельности E, искупаемая плодами, представляется такъ:

$$E = E^i + E^e, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ E^i есть доля силъ дѣятельности хозяйствующаго **Я**, а E^e есть доля силъ соучастниковъ, т. е. не—**Я**. Въ вопросахъ правомѣрія и управленія символическое уравненіе (5) должно играть роль для того, чтобы взыскивать обезпеченія поправки, направляемыя противъ накопленія угрожающей погрѣшности однихъ субъектовъ противъ другихъ, однихъ экономическихъ классовъ противъ другихъ.

Типы индукціи.

Индуктивная работа, обслуживающая добываніе графическихъ закономѣрностей по всѣмъ антропологическимъ жизнедѣятельнымъ функціямъ, огромная по числу задачъ и по спросу на цыфровой статистическій матеріалъ; назовемъ ее *великой*. Эта работа важна даже для простѣйшихъ, но безчисленныхъ случаевъ, когда въ сличительной таблицѣ бываетъ лишь двѣ строки, т. е. $n = 2$; соотвѣтствующая операція разсматривается въ теоремѣ Я. Бернулли (безъ указанія на плодъ x), при чемъ дѣятельности E_1 и E_2 совпадаютъ съ противоположными событіями E и F, или не $— E$. Подъ работу великой индукціи, для ея облегченія, нужно подвести научно-философскій планъ; онъ уже существуетъ.

Малою индукціей назовемъ такую, въ которой искомый неизвѣстный графикъ вполнѣ открывается уму ограниченнымъ числомъ наблюденій.

Такъ, изъ трехъ только наблюденій уже можно вывести достаточно точный графикъ движенія вновь замѣченной кометы.

Эвристическій методъ игралъ и вѣчно будетъ играть огромную роль въ областяхъ, изслѣдуемыхъ основными номографическими методами теоріи вѣроятностей. Законъ большихъ чиселъ, соединяющій графиками множество обособленныхъ «я» въ собирательное «мы», и симолическая передача субстанціональныхъ понятій языкомъ, чертежомъ и живыми личными символами, отправляющими дѣло общественнаго значенія, представляютъ одно изъ необходимыхъ основаній общественности. При этомъ эвристическій методъ исчисленія вѣроятностей, спрашивающій не только природу, но и души людскія, есть по истинѣ crux physicorum et metaphysicorum, соединяющій видимое и невидимое, постижимое и то непостижимое, что существуетъ въ неприступности чужого «я», способнаго однакоже къ соучастію, къ соболѣзнованію, къ исповѣди и къ объединенію въ семью и другіе коренные союзы.

Если накопленіемъ графиковъ предшествующихъ опытовъ и свойствами природы вещей почва открытія хорошо подготовлена, то рѣшающая индукція иногда можетъ быть быстрою, почти *миновенною*, т. е. мысль, открывающая законъ, сразу озаряется наводящимъ фактомъ («эврика» Архимеда, «яблоко» Ньютона и пр.).

Въ отношеніи времени и пространства всѣ типы закономѣрностей, индуктивно повѣряемыхъ, подраздѣляются на двѣ категоріи: 1) *закономѣрности сосуществованія* и 2) *закономѣрности послѣдовательности*. Эти типы закономѣрностей, поскольку онѣ подчиняются формуламъ логики A тождества или «трехъ законовъ», называются (у Канта, Милля, Минто и др.) аналогіями опыта и единообразіями природы.

Въ *динамикѣ* общественнаго процесса логической машинѣ A соотвѣтствуетъ *общественная механика*, а здравому смыслу Б соотвѣтствуютъ творцы механизма, методъ *серединъ* и *посредствующихъ* судебъ (арбитровъ) и *средотдчія* (какъ бы *солнца*) резервовъ, дающія движенію механизма *направленіе* отъ худого конца ожиданій къ хорошему.

Учрежденія вспомогательныхъ средоточій.

Во всѣхъ случаяхъ вспомогательныхъ органическихъ гарантій типа C (см. § 18_1) нужно опредѣлять ихъ количество съ достаточнымъ *сосредоточеннымъ запасомъ*. Эти средоточія назовемъ *учрежденіями;* они запасаются *подвижными* силами дѣйствія, или *кассами гарантій*, придавая слову касса не узкій финансовый смыслъ, а болѣе широкій, матеріальный и личный, считая, напримѣръ, какъ бы за кассу *живую корпорацію*, земскую какъ бы церковь, одухотворенную одинаковыми идеями. Финансовыя кассы тутъ будемъ брать лишь въ качествѣ легчайшаго пояснительнаго аллегорическаго и аналогическаго примѣра.

Теорію оборотовъ «капитала» въ кассахъ гарантій будемъ разсматривать по правиламъ математическаго ожиданія, но предполагая, что покровительственная кривизна, соотвѣтствующая нравственному ожиданію (§ 22), вводится потомъ въ качествѣ важнѣйшей поправки, когда слѣдуетъ.

Верховнымъ покрывающимъ страховымъ Обществомъ будемъ считать государство съ его достояніемъ, гарантированномъ жизнью и имуществомъ подданныхъ.

Матеріальная наличность закладовъ и постоянныхъ источниковъ возрожденія и дохода есть существенное условіе связи міра мысли и міра матеріи.

§ 18_2. Конструктивные типы машинообразныхъ и немашинообразныхъ оборотовъ въ исторіи. Комбинаторныя тріангуляціи.

Будемъ опять обсуждать объективные критеріи въ сложномъ мірѣ и конструктивныя историческія задачи, теченія, графики и загадки.

Возвратимся къ указанной въ § 18_1 схемѣ, намѣчающей законами большихъ чиселъ суммарную предустановляемую гармонію (распорядокъ) оборотовъ въ историческомъ процессѣ, гдѣ при разумности хозяйства расходуемая дѣятельность ΣE послѣдовательно, хотя и съ колебаніями, возстановляется за счетъ плодовъ. Работа этихъ предустановляемыхъ оборотовъ (возстановленій) разлита широко въ интервалахъ $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ исторіи. Неумирающіе собирательные организмы земного шара, государства, націи, коренныя культурныя общества, кои назовемъ отечествами, могутъ вѣчно ткать канву наблюденія этихъ оборотовъ по извѣстнымъ научнымъ схемамъ и точно устанавливать научнымъ опытомъ соразмѣренные запасы противъ обрывовъ равновѣсія между расходомъ и приходомъ, съ достаточнымъ превышеніемъ прихода надъ расходомъ.

Назовемъ важнѣйшіе типы издержекъ и числовыхъ оборотовъ и генетическую связь между ними,—связь чрезъ вѣроятность, или «включенное третье» между да и нѣтъ, вызванное множествомъ *независимыхъ* случайностей и играющее роль не только въ формулахъ законовъ мышленія и сомнѣнія (поправляющихъ логику «трехъ законовъ» при рѣшеніи «открытыхъ вопросовъ» и міровыхъ задачъ), но и *въ формулахъ связи причинъ и слѣдствій*.

1°. Естественно-историческій оборотъ въ царствѣ растеній и животныхъ, совершающійся по слѣдующей кратко выраженной формулѣ связи: «издерживаемая культура (посѣвъ) предшествующаго періода — возстановленіе и приростъ — издерживаемая культура послѣдующаго періода».

2°. Человѣческій историческій біометрическій оборотъ, совершающійся по формулѣ связи: «изживающее поколѣніе отцовъ — дѣти — поколѣніе послѣдующаго періода».

3°. Ежегодные обороты неорганическихъ стихій, повторяющіеся на земномъ шарѣ, именно: обороты тепловой, свѣтовой и электро-магнитный; оборотъ прѣсной воды на сушѣ и въ организмахъ; оборотъ кислорода, углерода, азота и другихъ элементовъ атмосферы въ организмахъ.

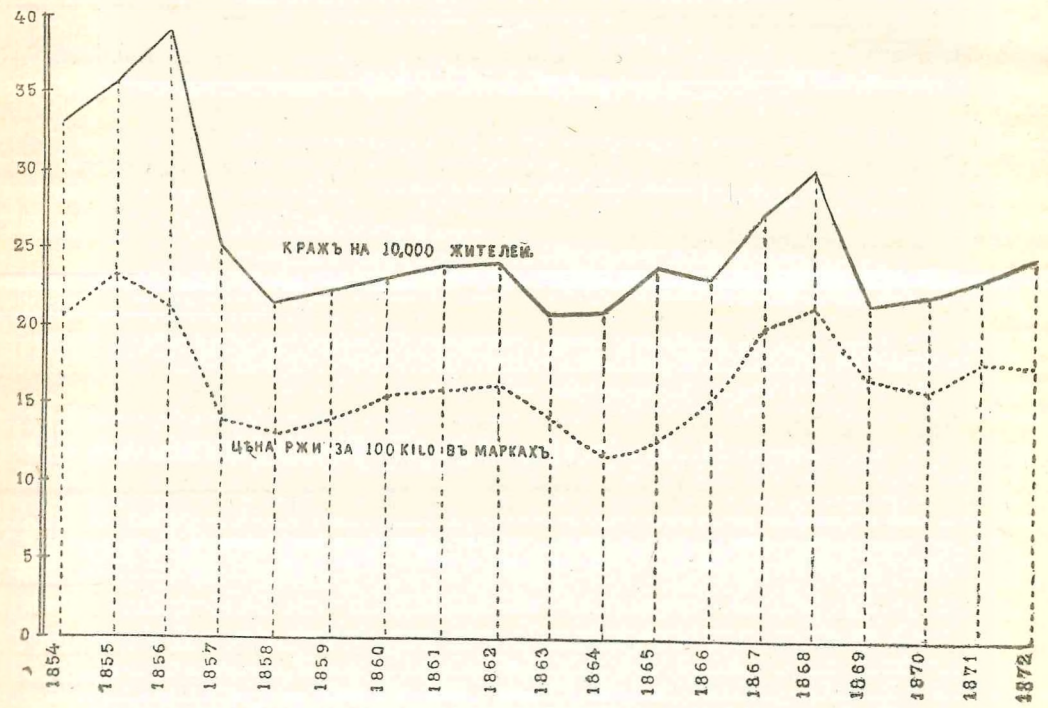
4°. Финансовый торговый и динамическій оборотъ. Его служебная историческая формула размѣна экономическихъ цѣнностей такова: «издержанныя за товаръ деньги (себѣстоимость)—товаръ—вырученныя съ покупателей деньги». Тутъ иногда мѣсто товара заступаетъ наемный трудъ, трактуемый какъ «товаръ» своего рода.—Въ указанной финансово-экономической формулѣ бываетъ необходима, при обсужденіи всеобщей связи явленій, логическая *перестановка*, разсматривающая тотъ же историческій оборотъ въ другомъ чередованіи причинъ и слѣдствій — именно, въ томъ чередованіи, которому соотвѣтствуетъ формула связи: «товаръ — деньги—товаръ слѣдующаго періода». Первая по очереди причина (деньги) прежней формулы становится въ новой формулѣ слѣдствіемъ, а прежнее слѣдствіе (товаръ) становится по очереди на первое мѣсто, т. е. становится причиною. Если «товаръ» второй формулы связи представляется трудомъ мысли или рукъ человѣка, то онъ бываетъ не только по формулѣ чередованія, но и существу долею первопричины въ новообразованіи богатства, параллельною творческимъ силамъ природы и денежнаго капитала. Деньги являются въ экономическомъ процессѣ какъ обычнымъ товаромъ, такъ и мѣрящею *символическою* движимою и *движущею* цѣнностью, служебно необходимою въ качествѣ знаменателя рыночной оцѣнки и для образованія односторонних формулъ пени, налога и правооборота при установленіи судьбами государства, посредствомъ сѣти банковъ и обложеній, общей правомѣрной прогматической связи явленій, протекающихъ въ экономическомъ историческомъ процессѣ.

5°. Историческій оборотъ личнаго состава смертныхъ носителей традиціоннаго знанія, традицій вѣры, оборотъ личной работоспособности и технической традиціи для общественнаго служенія и для различныхъ видовъ цѣнной, важной практики. Его формула связи такова: «мастера работы (духовной, внушающей творчество, и мускульно-нервной) — ученики—мастера послѣдующаго періода».

Благодаря оборотамъ, издерживаемое, перемѣнное, смертное, изживающее возстановляется, если резервными факторами, гражданскими символами и институтами права укрѣплена достовѣрность возстановленія.

Безграничная повторяемость наблюдаемыхъ и испытываемыхъ цѣнныхъ издержекъ и оборотовъ въ неограниченномъ рядѣ послѣдовательныхъ періодовъ времени t дозволяетъ примѣнять къ этимъ повторнымъ испытаніямъ законы массовыхъ явленій, трактуемыхъ теоріей вѣроятностей и теоріей статистики, и массами исключать смертельныя и грубыя ошибки.

Ибо на почвѣ повторнаго опыта и незыблемой теоріи можно устанавливать какъ среднія величины R_0 колеблющейся погрѣшности R, такъ вѣроятности ея шатаній и нетяжелые резервы противъ худшей шаткости, т. е. устанавливать *всю стоимость укрѣпленія* положенія, обезпечивающую достовѣрность амортизаціи среды цѣнныхъ элементовъ. Эта стоимость дѣлаетъ обоснованною достовѣрность оборота цѣнности въ пространствѣ законовъ случайностей и погрѣшностей.



Фиг. 10.

Историческая генетическая скала соединяется со скалою географическою и съ скалами положительнаго закона, вводящими въ процессъ исторіи вещный оборотъ, наукооборотъ, разныя меліораціи и гражданскій правооборотъ противъ погрѣшностей. Географическая скала на единицахъ своей площади отмѣчаетъ послѣдовательно землевладѣніе и природу, развитіе, распространеніе явленій и отложеніе отжившихъ явленій, приложеніе ихъ къ «праотцамъ» и къ прежнимъ отложеніямъ.

Значеніе историко-статистическихъ изслѣдованій видно изъ діаграмъ связи между массивами различныхъ явленій, хронологически сопоставленныхъ. Приводимъ для наглядности (см. фиг. 10) рисунокъ хронологической параллели цѣнъ и кражъ, заимствованный изъ «Теоріи статистики» Янсона.

Символизмъ. Юридически активныя вѣроятности и реальныя теченія.

Во всѣхъ родахъ формулъ историческаго оборота мы встрѣчаемъ *включенный промежуточный членъ*, промежуточное комбинаторное третье. Оно дѣлаетъ разрывъ ясности во взглядѣ на будущее и разрывъ опредѣленности сужденія. Лишь организованное собирательное (соборное) неумирающее сознаніе можетъ преодолѣть эти разрывы очевидности символическими комбинаторными тріангуляціями.

Эти включенія, комбинаторныя *тріангуляціи* и разрывы опредѣленности сужденія вызываютъ къ жизни необходимость индуктивнаго метода и символическаго связыванія явленій; вызываютъ необходимость *символическаго мышленія* и параллельныхъ этому мышленію *матеріальныхъ символическихъ мнемоническихъ (напоминающихъ) средствъ* завязыванія и развязыванія узловъ исторіи и установленія *исторической юридической ассоціаціи между мысленнымъ владѣніемъ и матеріальнымъ, — ассоціаціи посредствомъ символизованныхъ* (условныхъ) *достовѣрностей*, т. е. юридически активныхъ *вѣроятностей* *). Историческая генетическая и символическая тріангуляція стоитъ хлопотъ, какъ и геодезическая.

При этомъ играетъ роль діалектологическій (символическій) *синтезъ*, какъ посредствующее (несамостоятельное, зависимое) «включенное соборное четвертое» онтологіи А. С. Хомякова и М. Ф. Таубе **).

Матеріальные символы, какъ публичное вспомогательное и истолковывающее средство, параллельное идеямъ символическаго мышленія, бываютъ мертвые и живые, личные.

Символическими мнемоническими мертвыми матеріальными средствами являются языкъ, арсеналъ силы закона и гражданскіе знаки различія и тождества, мемуары, памятники, вѣхи, вещественныя полноцѣнныя мѣры (въ томъ числѣ металлическія деньги — фетиши), бумажные гражданскіе акты, завѣщанія, идеи — діаграммы или просвѣтительные графическіе образы ожиданія и дѣйствительности, созидаемые по даннымъ статистики.

Символическими живыми личными средствами являются корона съ народомъ, посвященные, уполномоченные и аккредитованные люди, представляющіе ту или другую идею — силу, исполняющіе ту или другую должность или публичную функцію, по формуламъ закона. Изъ этихъ уполномоченныхъ лицъ образуются *коренные* личные составы (корпора-

*) См. *В. А. Юшкевичъ*: «Изслѣдованіе въ области ученія о владѣніи. Пріобрѣтеніе владѣнія по римскому праву» (Ученыя Записки Лицея въ память Цесаревича Николая. Вып. 4. Москва, 1910 г.).

**) *М. Ф. Таубе*: Сводъ основныхъ законовъ мышленія. С.-Петербургъ. 1909.

ціи) связыванія, развязыванія узловъ и общественныхъ тканей по скаламъ закона.

Сродство (свободная причинная связь, притяженіе) между *массивами фактовъ* и *массивами символовъ*, обозначающихъ идеи въ публичномъ обращеніи, *взвѣшиваемое* прагматически и діалектологически въ *порядкѣ исчисленія* (а *не измѣренія*) формулой (коеффиціентомъ) Q (см. часть III, гл. II), имѣетъ причину въ юридическихъ, политическихъ и другихъ культурныхъ условіяхъ и жизненныхъ испытаніяхъ.

Во всѣхъ этихъ испытаніяхъ и оцѣнкахъ достоинства и символической стоимости оборота играютъ роль: 1) психологическія теченія вѣрныхъ понятій (традиціи), 2) теченія матеріальныя и имущественныя и 3) графическія *сличенія* ожиданій съ дѣйствительностію по рецептамъ и формуламъ историко-статистическаго метода, дающаго номографическіе образы связи явленій въ формѣ діаграммъ со скалою времени t (см., напримѣръ, діаграмму цѣнъ ржи и числа кражъ на фиг. 10).

Мнемоническими установленными (каноническими) символами, посвященіями, помазаніями передаются отъ интервала къ интервалу, отъ предыдущаго къ послѣдующему, отъ поколѣнія къ поколѣнію какъ идеи, такъ и матеріальныя права и обязательства.

Напримѣръ, финансовая валюта, власть экономическая, магически течетъ, какъ метафизическая «жидкость», по мнемоническимъ символамъ финансоваго правомѣрія отъ предыдущаго къ послѣдующему.

Подвижную наличность силы учрежденія, дисциплинированную до машинообразнаго повиновенія символическому дирижированію, мы называемъ кассой въ широкомъ смыслѣ, считая, напримѣръ, хорошо рекрутируемую армію кассой, монета которой, солдатъ, дисциплинируется, сберегается и умно расходуется какъ достовѣрная защитная цѣнность отечества.

Обороты по формуламъ 2°, 4° и 5° лучше всего даютъ понять значеніе и цѣлесообразность идеи отечества, его общихъ защитныхъ и вспомогательныхъ учрежденій и его ариѳметической и символичеческой формулы.

Символическія историческія лица, вбирающія въ себя отечественную мощность путями историческаго объединенія силъ людей, связывая этническія массы въ неумирающую собирательную единицу (множественную монаду),—эти лица въ качествѣ представителей и знаменателей отечественной идеи не умираютъ, хотя физическіе личные представители неумирающей идеи могутъ умирать одинъ за другимъ. Таково безсмертіе главы государства: le roi est mort—vive le roi! Эта жизненная формула примѣнима не только къ верховнымъ символическимъ лицамъ, но и къ низшимъ, поставленнымъ на должности, привязанныя мнемонически къ опредѣленной идеѣ службы отечеству.

Виды взаимныхъ притяженій и отталкиваній въ исторической динамикѣ и системы распорядка (гармоніи). Нравственный міропорядокъ. Соотношеніе сознаній.

Порядокъ, гармонія, тройное соотвѣтствіе: въ познаваемомъ, въ познающемъ и въ словѣ, представляетъ для сознанія величайшую цѣнность, противополагаемую Хаосу и Ночи. Гдѣ вовсе не отстоялось этой субъективно-объективной соборной цѣнности, тамъ немыслимо говорить о ясномъ предвидѣніи, о духовной свободѣ, о подвигѣ, о равномъ правѣ, о любви и другихъ цѣнностяхъ.

Перечислимъ важнѣйшія системы гармоніи и соотвѣтствующія силы притяженій и отталкиваній въ исторической динамикѣ.

а) Всемірное тяготѣніе; этой силѣ соотвѣтствуетъ ньютоніанская механика, какъ остоявшійся космическій порядокъ.

б) Электро-магнитныя притяженія и отталкиванія, развивающіяся въ невѣсомой и вѣсомой средѣ; этой противоположности силъ соотвѣтствуетъ электромагнитная механика съ теоріей лучеобразнаго распространенія свѣта, тепла, химическаго агента, электрическаго телеграфированія и пр.

в) Сродство и нейтральность частичныхъ химическихъ элементовъ; этой противоположности частичныхъ силъ соотвѣтствуетъ механика частичныхъ силъ, включающая законы химіи и молекулярной физики.

г) Экономическое тяготѣніе субъекта къ предметамъ имущественнаго недостатка и нейтральность къ предметамъ избытка; этимъ противоположнымъ силамъ соотвѣтствуетъ таксологически направляемый размѣнъ благъ, простой и усложненный при помощи денегъ, какъ общаго символическаго мѣрила, съ участіемъ учрежденій финансоваго правомѣрія.

д) Тяготѣніе къ истинѣ и добру и отталкиваніе лжи, тяготѣніе къ правильному порядку или гармоніи (она же красота формы) и отталкиваніе безпорядочности или хаоса; этимъ духовнымъ силамъ соотвѣтствуютъ вѣроятностное сродство событій и нравственный міропорядокъ, расчленяющійся, въ виду порочности человѣческой воли, на два порядка: 1) «божественный порядокъ», возникающій частію естественно (по требованію жизненной необходимости), частію добровольно, при знаніи предписаній закона и подъ впечатлѣніемъ идеаловъ правдолюбія или божеской объективности, и 2) порядокъ гражданскаго принужденія, если не хватаетъ тутъ или тамъ въ наличности доброй воли слѣдовать предписаніямъ закона.

Притягательныя силы нравственнаго міропорядка, дѣйствующія въ сторону Солнца этого небосвода (Солнца правды), образуютъ между притягиваемыми элементами метахимическія нормальныя органическія структуры. Притягиваемые въ эту сторону (+) элементы, ихъ центры,

мыслятся распредѣленными въ звѣздной массѣ людскихъ одушевленныхъ сознаній ☼. Ложь же образуетъ антиномическое, противоположное притяженіе въ сторону (—) «внутренняго софиста», «отца лжи», «злого рока».

Въ душахъ людей поселяется извѣстная борьба двухъ началъ; но цѣнность нравственнаго міропорядка, которую лишь нужно умѣть выставить людямъ на показъ, щедро сѣять въ людскія души, заставляетъ вѣрить въ его побѣду.

Est Deus in nobis, agitante calescimus Illo:
Impetus hic sacrae semina mentis habet. (Ovidius, Fasti, VI, 5).

Человѣческія общества представляютъ сочетанія или созвѣздія сознаній:

☼☼☼ . . .

Собирательное совѣстливое сознаніе, имѣя знаніе *золотыхъ* серединъ (идеаловъ и «среднихъ принциповъ») и запасы силъ, способно выкупать ошибки незнанія; «свѣтъ во тьмѣ свѣтитъ», тутъ получаетъ значеніе философія соборнаго или общественнаго мнѣнія (А. С. Хомяковъ).

«Вѣрующее воспріятіе» и «вѣроятностное озареніе» нужно отличать отъ «мистическаго воспріятія» и «магіи». Это различіе отдѣляетъ *научную* философію свободы и необходимости отъ философіи мистическаго воспріятія (Н. Лосскій, Н. Бердяевъ). Органъ мистики, бумага и языкъ, есть орудіе возбужденія, усыпленія, діалектической игры и колоссальныхъ подмѣнъ понятій. Научная философія беретъ подъ судъ мистику свободы, игру, вбирая въ себя очищенное питаніе и отъ вѣры, и отъ науки, кои обѣ внушаются человѣчеству универсальнымъ разумомъ и входятъ своими функціями въ учрежденія.

Отвѣтственныя и безотвѣтственныя свободы. Вихреатомная теорія собирательныхъ единицъ. Отечественное верховенство и земщина; семья, родъ, кровъ.

Мистика свободы воли на выборъ дѣйствій нарушаетъ машинообразный порядокъ историческаго крученія и расклубленія событій.

«Наука» безотвѣтственной свободы, портящей машину міропорядка, есть наука «отца лжи», или «внутренняго софиста»; она постепеннымъ накопленіемъ (исподтишка) или разительно, но, какъ увидимъ изъ неустойчивости ассоціацій, съ достовѣрностью подгототовляетъ парадоксальное и затѣмъ катастрофальное положеніе для данной человѣческой среды.

Напротивъ, наука отвѣтственной свободы, хорошо культивированной, есть человѣкоискупительная, спасительная наука Отца истиннаго Свѣта.

Свобода Верховной власти неограничиваема de jure по причинѣ предѣльности верха и ограничиваетъ отвѣтственностью подданныя сво-

боды. По природѣ своей Верховная власть отвѣтственна лишь передъ Богомъ.

Верхнему основанію соотвѣтствуетъ общее благо и возможность подъема, прогресса для низовъ, возможность апелляціи въ случаѣ столкновеній частныхъ интересовъ. Частныя индивидуальныя права, огражденныя закономъ въ нижней инстанціи, подчиняются еще разъ верховному праву государства, въ сужденіи болѣе объективному, или болѣе безпристрастному *). Верхъ есть объективный кровъ для субъективныхъ низовъ. Выразитель идеи верха, носитель короны, Глава государства, завершаетъ общественность, какъ политическій организмъ.

Устой верха есть устой общаго крова.

Насколько правовой индивидуализмъ (право въ субъективномъ смыслѣ) находитъ себѣ частное мѣсто и идіографическую историческую развертку въ государственно-общественномъ номографическомъ созвѣздіи, настолько же самостоятельный, самодержавный государственно-національный индивидуализмъ находитъ себѣ мѣсто и историческую идіографическую развертку въ ряду государствъ земного шара.

Силою вещей и договорами государственно-національныя единицы размежевываются въ сферахъ своего авторитета, сосуществуя подобно системамъ *вихрей — атомовъ* Декарта **), принятыхъ въ теоріи Томсона (лорда Кельвина) и Гельмгольтца. Единицы эти являются «изолированными государствами» фонъ-Тюнена (см. мою книгу «Математическая статистика»), или сложными монадами (многоединствами) Н. В. Бугаева. Однакоже между изолированными государствами странствуютъ гости—«кометы», просачиваются различныя теченія и обороты, какъ этническія (въ формѣ переселеній), такъ и экономическія, а равно и познавательныя, идейныя.

Простѣйшимъ вихремъ—атомомъ среды изолированнаго государства является въ ученіи о національномъ государствѣ родъ съ его идеей продолженія въ исторіи и идеей національнаго отечества. Сохраненіе рода и народа есть одна изъ важнѣйшихъ задачъ государственнаго домостроя.

*) Какъ извѣстно, терминъ «право» употребляется въ двоякомъ смыслѣ: въ объективномъ и субъективномъ. Право въ объективномъ смыслѣ есть совокупность основныхъ правовыхъ положеній, которыми оперируетъ государство, иначе говоря—узаконенный порядокъ общежитія; правомъ въ субъективномъ смыслѣ будетъ конкретное правомочіе извѣстной личности, получившееся изъ примѣненія отвлеченнаго правила къ данному конкретному случаю. И въ томъ, и въ другомъ направленіи право встрѣчаетъ препятствія, которыя ему приходится преодолѣвать и, такимъ образомъ, борьбою утверждать свое бытіе (*Рудольфъ Іерингъ:* Борьба за право).

**) Ньютонъ отступилъ отъ теоріи Декарта; однако, нынѣ физики вернулись къ этой схемѣ (см. *Н. А. Любимовъ*: «Философія Декарта». С.-Петерб., 1886.—*Н. Н. Маракуевъ*: Ньютонъ, его жизнь и труды. Изд. 2-е); тѣмъ болѣе она полезна въ историко-гео-графическихъ конструкціяхъ политической космологіи.

Населеніе отечества трудится въ потѣ лица и ведетъ торгъ плодами труда. Все, что вырабатываетъ пахарь, могутъ отнять чрезъ торговые фокусы и присоски и чрезъ широко открытые двери свободъ міровые короли зототого тельца, засѣвшіе въ извѣстныхъ недосягаемыхъ міровыхъ центрахъ (Лондонъ, Нью-Іоркъ, Парижъ, Берлинъ, Вѣна и пр.). Въ торговую же жизнь отечества, обороняемаго снизу и сверху государственно-національными учрежденіями (какъ банки, кооперативы и пр.), не могутъ проникнуть присоски мірового спрута.

Ячейка отечества — это *семья*. Эта единица членовная, антиномическая, соединяющая членовъ семьи утонченною жизненною нитью вѣры другъ другу и любви. Таблицы браковъ, рожденій, смертей, переселеній опредѣляютъ типы бюджета человѣческихъ жизней и прочіе бюджеты.

Земское *раціональное* широкое обобщеніе идеи семьи—это національное отечество. Съ этой идеей связана идея государства, какъ общаго для всѣхъ подданныхъ крова, общей верхней кровельной защиты для земскихъ низовъ, взаимность между *верхомъ* и земскимъ *низомъ;* иначе говоря, въ законы мышленія символически включается законъ *верхняго* достаточнаго основанія, присоединяемый къ закону *нижняго* необходимаго основанія. Какъ въ пирамидѣ различаютъ два основанія, верхнее и нижнее, такъ и въ онтологической *статикѣ* (см. часть III, гл. I), или законѣ достаточнаго основанія нужно различать двѣ крайнихъ инстанціи или два устойчивыхъ положенія: земщину и отечественное верховенство.

Работа и надежда земскихъ народныхъ низовъ требуютъ отечественной кровли, покровительства низамъ на всѣхъ практическихъ путяхъ исторической загадки. Иначе говоря, въ полной вышепартійной конституціи (въ полныхъ законахъ достаточнаго основанія) нужно соединять нѣсколько практическихъ пирамидъ, вершины которыхъ сходятся у Монарха—Главы государства, у кормчаго государственнаго корабля. Верхнее основаніе, такимъ образомъ, превращается въ жизненный узелъ земскаго политическаго организма, цѣльнаго и мудро развѣтвленнаго, въ центрѣ котораго сосредоточивается разгадка предустановленной въ общихъ чертахъ гармоніи, при возможности управлять рулемъ корабля цѣлесообразно.

Повторяемъ, культурная свобода постулируетъ не только разумъ индивидуальной самодѣятельности и отвѣтственности («habeas corpus» act), но и необходимую общую многоединую кровлю, сверху обосновывающую надежды и достовѣрности посредствомъ государственныхъ учрежденій. Символически этому верху соотвѣтствуетъ куполъ св. Софіи.

Защитники же свободы безъ кровельныхъ могучихъ учрежденій хлопочутъ не о благѣ народа, а о томъ, чтобы достовѣрно верхъ упалъ на низы и лишилъ ихъ отечественнаго крова. Такая свобода пропагандируется ложною наукой. Еще Тургеневъ въ «Отцахъ и Дѣтяхъ» заклеймилъ эту лженауку, назвавъ нигилистами ея служителей.

Всѣ учрежденія съ ихъ личными силами должны быть построены изъ устойчивыхъ испытанныхъ элементовъ и сообразно съ *выявленными* и *испытаными критеріями* истинной науки и религіозной природы отечества. Тогда сами учрежденія сдѣлаются драгоцѣнными школами, все государство сдѣлается жизненною школою, вѣра и наука сдѣлаются не роскошью, а свѣточами и совѣтниками по всѣмъ жизненнымъ задачамъ.

Независимо отъ культа символизующихъ людей («божественныхъ людей», по терминологіи Платона), необходимы еще школа и культъ людей простого нравственнаго склада, имѣющій цѣлію достигнуть того, чтобы по всѣмъ жизненнымъ предпосылкамъ чаще и чаще попадался въ демосѣ типъ просто честнаго, порядочнаго, трудолюбиваго человѣка, сознательнаго въ своемъ долгѣ, совѣстливаго въ своихъ обязательствахъ и ихъ выполненіи. Названные два культа обезпечатъ оправданіе изрѣченія Паскаля: «рядовой народъ и выдающіеся люди вертятъ колесо исторіи».

Безконечное (трансцедентное) обобщеніе идеи семьи, роднящее всѣ націи, какъ братьевъ, есть личное божеское Тріединство, спасающее міръ отъ рабства земнымъ богамъ; Оно, какъ предвѣчная Соборность, понимается *ирраціонально*, религіозною вѣрою.

§ 19. Этическій и культурный корень государственности.

I. Государственность, кромѣ стихійныхъ (космологическихъ) причинъ, имѣетъ въ сознаніи этическій идеологическій корень, религіозный и научно философскій; государственность развивается (какъ *несумирающая* общественность) изъ этическихъ синтезовъ раціональнаго знанія, слова и *ирраціональнаго знанія,* т. е. вѣры, какъ религіозной, такъ и мірской.

Государство, какъ совѣстливое правовое многоединство, есть не простое, а органически сложное событіе; оно слагается изъ многихъ элементарныхъ собирательностей, массивовъ. Притяженіе ихъ другъ къ другу, хорошее сложеніе ихъ, есть результатъ сродства и всеобщаго тяготѣнія къ истинѣ (солнцу) нравственнаго міропорядка. Разложеніе ихъ есть результатъ *специфически* выявливающейся работы «внутренняго софиста», «отца лжи», «злого рока».

Въ результатѣ сродства и положительнаго тяготѣнія сознаній ☼ получается нажитой нравственный капиталъ людской среды, «живая вода» неумирающаго нормативнаго государства, помнящаго Все цѣнное.

Въ нормативномъ государствѣ борьба за право (см. у Іеринга) есть борьба противъ притяженій въ сторону (—) «злого рока».

II. Физически *представительному* включенному «соборному четвертому» (стр. 108) соотвѣтствуетъ въ *пневма-психологической параллели* движеніе идей и представленій на сценѣ Гербартіанскаго и Лапласовскаго сознанія и подсознанія (см. Предисловіе).

Поэтому рядомъ съ физическимъ неумирающимъ въ учрежденіяхъ

номографическимъ мышленіемъ, какъ включеннымъ четвертымъ, *философія вѣры* и *религія* трактуютъ по отношенію къ земскому правомѣрію *исключенное четвертое* (сверхчувственное, потустороннее, трансцедентное), воспринимаемое уже не съ помощію обыкновенныхъ методовъ научнаго познанія, а съ помощію чистаго увѣрованія и Откровенія, хранимаго въ писаніи и въ безсмертной корпоративной церковной соборности съ законами ея благодати, посвященія, рожденія водою и духомъ и исторической символической традиціи.

Вѣра и религіозно-философская дедукція и индукція уходятъ центральною мыслію, сердцемъ и соборнымъ религіознымъ «среднимъ Принципомъ» («гдѣ двое или трое собраны во имя Мое, тамъ Я *посреди* ихъ») въ міръ, отличный «отъ міра сего», за горизонтъ чувственнаго міра.

Тамъ, гдѣ должны быть общеніе и любовь (какъ въ семьѣ, въ школѣ, въ государствѣ и пр.) съ раздѣленіемъ функцій,—тамъ вѣра, какъ элементъ жизни съ посредствующимъ Идеаломъ, есть совершенно необходимый духовный *цементъ*. Иначе кумиръ корысти сдѣлается «среднимъ принципомъ».

Приведемъ слѣдующія слова представителя цѣльной просвѣтительной философіи, Кирѣевскаго. «Развитіе философіи условливается соединеніемъ двухъ противоположныхъ концовъ человѣческой мысли: того, гдѣ она сопрягается съ высшими вопросами вѣры, и того, гдѣ она прикасается развитія наукъ и внѣшней образованности. Философія не есть одна изъ наукъ и не есть вѣра. Она общій итогъ и общее основаніе всѣхъ наукъ и проводникъ мысли между ними и вѣрою. Гдѣ есть вѣра и нѣтъ развитія разумной образованности, тамъ и философіи быть не можетъ. Гдѣ есть развитіе наукъ и образованности, но нѣтъ вѣры, или вѣра исчезла,—тамъ убѣжденія философскія замѣняютъ убѣжденія вѣры и являются въ видѣ предразсудка».

Въ цѣломъ своемъ просвѣтительная философія вѣры, наукооборота, трудооборота и правооборота даетъ людямъ и конституцію. Цѣль этой философіи—освободиться и освободить людей отъ путъ корыстной *мистики* царства 1°, сохраняя живую *вѣру* въ приближеніе царства 2° (см. выше, пунктъ I),—вѣру, въ которой таинства безкорыстны и узы священны*). При этомъ математическая теорія вѣроятностей есть Паскалевскій и Бугаев-

*) Свободныя отъ мистики попытки сего освобожденія въ духѣ *восточно-европейскаго просвѣщенія* мы находимъ въ трудахъ русскихъ философовъ А. С. Хомякова, Кирѣевскаго, Гиляровa-Платонова, Н. В. Бугаева, еп. Ѳеофана (доктора богословія, затворника Вышенскаго), С. Н. Трубецкаго и другихъ.—Что касается мистическихъ зигзаговъ мысли В. С. Соловьева, то ихъ было нѣсколько въ исторіи его мысли. Сначала онъ былъ ученикомъ и послѣдователемъ восточно-европейскаго просвѣщенія и блестяще опрокинулъ теневыя (отрицательныя) стороны протестантскаго раціонализма; потомъ онъ перекинулся въ лагерь западниковъ на католической и даже оккультической мистической закваскѣ. Эта неуравновѣшенность отражала мятежность его времени и его личный впечатлительный темпераментъ. Оступы и за-

скій мостъ, соединяющій вѣру, какъ фактъ народной психологіи и религіи, и науку другъ съ другомъ, съ подвигомъ, отвѣтомъ на спросъ и озареніемъ, съ вопросами политики и права, общественнаго и частнаго.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, вопреки Юму, Кетле и Миллю, вопреки политическимъ и юридическимъ теоріямъ Адольфа Вагнера и другихъ, методъ статистики, соціальныхъ наукъ и экономической политики есть методъ не физическій только, а химико-фармакологическій и, по логическимъ индукціямъ въ области интересныхъ и страховыхъ теченій, термо-электро-динамическій. Все это—на физической подставкѣ и на почвѣ нравственнаго метафизическаго мышленія.

Инженеръ-философъ *Ле-Пле*, разсматривая важнѣйшія, общепризнанныя въ культурномъ мірѣ, нравственныя заповѣди (религіозную мораль—minimum), какъ *основную конституцію человѣческаго рода*, сдѣлалъ болѣе счастливую (сравнительно съ Д. С. Миллемъ), примѣчательную попытку въ широкомъ масштабѣ привить, пришлифовать (допуская простительныя и искупаемыя невязки) основную религіозную мораль къ здравому смыслу естественныхъ и общественныхъ наукъ и наоборотъ *). Этотъ этюдъ, а равно и опыты *просвѣщающей* политики государства, какъ педагога **), на мой взглядъ, убѣждаютъ въ возможности дальнѣйшаго

блужденія В. С. Соловьева достаточно освѣщены въ книгѣ философа-инженера бар. *М. Ф. Таубе* „Познаніевѣдѣніе (гносеологія)“ (С.-Петербургъ, 1912). Вышеуказанная концепція свободы, усвоенная въ Миллевской логикѣ нравственныхъ наукъ, въ сущности была присуща также смутной части мышленія нашего крупнаго философа В. С. Соловьева; почему и онъ, одержимый духомъ своей пещеры, Idola specus (см. ниже), впадалъ въ противорѣчія съ самимъ собою. Психургія и „свободная“ теософія В. С. Соловьева не достаточно надежно отдѣляютъ *положительную духовность*, отличаемую по ея откровенному источнику и по точной исторической передачѣ истины писаніями и живымъ преданіемъ, отъ микстуръ *мистики* съ ея обманками, призраками и замѣщеніемъ историческаго авторитета различными «посвященными» *магами* мистическихъ союзовъ. Если провести пропущенныя отграничительныя линіи между положительною духовностью и мистическою трущобою и вычистить мистику, то творенія В. С. Соловьева, какъ и Д. С. Мережковскаго, могутъ служить для цѣлей постройки этическаго minimum требованій отъ „немощныхъ по вѣрѣ“, не повреждая этическаго maximum повелѣній христіанской религіи въ восточно-европейскомъ (православномъ) духѣ.

*) См. мою книгу: „Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности“.—Что касается попытки Милля и другихъ создать логику нравственныхъ наукъ (мораль) внѣ связи съ религіей, то этого рода попытки нужно признать скандально неудовлетворительными, дающими основаніе къ отпариванію подобнаго ученія, играющаго въ руку царства 1⁰ внутр. софиста.

**) *В. Г. Алексѣевъ:* „Гербартъ, Штрюмпель и ихъ педагогическія системы“.—*П. А. Некрасовъ:* „Основы общественныхъ и естественныхъ наукъ въ средней школѣ“ (С.-Петербургъ, 1906).—Что касается прививки другъ къ другу принциповъ естественной науки и религіи, какъ вѣры въ Творца, то это сдѣлали съ полнымъ успѣхомъ еще Лейбницъ, Ньютонъ, Ломоносовъ, митрополитъ Филаретъ (давшій истолкованіе книги Бытія въ ея частяхъ, относящихся къ космогоніи) и другіе. Ломо-

культивированія этой прививки дисциплинъ науки и религіи другъ къ другу и къ дѣламъ народовъ земного шара.

Если *скрытая* въ себѣ «вещь» (ноуменъ), вопреки «Критикѣ» Канта, *обличается* вѣроятностнымъ (ирраціональнымъ) познаніемъ (чему легчайшій примѣръ данъ въ части II, § 32, стр. 354), то и догматически сложнѣйшая, религіозная Истина *обличаема*, *познаваема* по ея слѣдамъ, какъ въ зеркалѣ, по связи частей Всего, или Цѣлаго, и по откровенію.

Продолженіе попытки философовъ религіознаго просвѣщенія и подвижниковъ защитить отъ профановъ основоположную нравственную и общественную науку несомнѣнно увѣнчаются успѣхомъ, если продолжатели, сторонясь отъ ослѣпляющей мистики, играющей въ руку софиста, будутъ оставаться на почвѣ научнаго изслѣдованія и *историческаго* евангельскаго Идеала, какъ центральнаго «сердцевиннаго источника» міровой жизни и какъ органически связывающаго «средняго Принципа» между всѣми нами. Къ этому «сердцевинному стволу», который самъ по себѣ представляется какъ бы «округленіемъ» многовѣтвистаго дерева жизни, прирастаютъ вѣтви съ развѣтвленіями, въ которыхъ обитаютъ «поднебесныя птицы».

Органическое культивированіе Всего подтверждаютъ евангельскія слова: «Я есмь истинная виноградная Лоза, а Отецъ Мой—Виноградарь; всякую у меня вѣтвь, не приносящую плода, Онъ отсѣкаетъ; и всякую, приносящую плодъ, очищаетъ, чтобы болѣе принесла плода» (Іоаннъ, XV, 1—2). И еще: «Царство небесное подобно зерну горчичному, которое человѣкъ взялъ и посѣялъ на полѣ своемъ, которое хотя меньше всѣхъ сѣмянъ, но, когда выростетъ, бываетъ больше всѣхъ злаковъ и становится деревомъ, такъ что прилетаютъ птицы небесныя и укрываются въ вѣтвяхъ его. — Царство небесное подобно закваскѣ, которую женщина взявши положила въ три мѣры муки, доколѣ не вскисло все» (Матѳ., XIII, 31—33).

Помянутая евангельская виноградная Лоза есть также явленное міру евангельское Слово (Логосъ), которому предшествуютъ и послѣдуютъ въ исторіи многіе малые логосы (см. кн. *С. Н. Трубецкой*: «Ученіе о Логосѣ въ его исторіи. Философско-историческое изслѣдованіе». Москва, 1900). По сравненію съ Логосомъ разные къ Нему устремленные «средніе принципы» въ жизни соціальныхъ тѣлъ повторяютъ *полный* Идеалъ *по частямъ*, собирательно, въ духовно-цѣломъ раздѣленіи полноты Его ученія между *спеціальными* органами, вѣтвями, сучьями. Связующій «средній Принципъ», Онъ же альфа и омега, начало и конецъ, имѣетъ силу солнца

носовъ говорилъ: «Создатель далъ роду человѣческому двѣ книги: въ одной онъ показалъ свое величество, а въ другой, — свою волю; первая — видимый сей міръ, вторая—св. Писаніе». Въ лучшихъ образцахъ своей духовной лирики, какъ «Вечернее и утреннее размышленіе о Божьемъ величіи», Ломоносовъ яркими поэтическими образами формулировалъ свое міровоззрѣніе (см. *В. В. Сиповскій:* Исторія русской словесности. Часть II, изд. 2. С.-Петерб., 1908).

правды и развитія полноты силъ въ человѣческой собирательности, основаннаго не только на *законѣ вѣры*, но и на *законѣ дѣлъ*, подвиговъ жизни.

Затериваемая среди прерывистыхъ волнообразныхъ оборотовъ исторіи и среди противорѣчія тѣлесныхъ формъ существованія, животворящая истина, конечно, должна бываетъ истолковывать себя міру и должна среди массы новыхъ поколѣній символизоваться посредствомъ не только графическаго метода, но и съ помощію преемственныхъ сучьевъ — корпорацій (учрежденій соборной церкви, государства, академіи).

Конечно, даже и выявленная откровенная, основоположная истина, какъ явленіе незаурядное, возбуждаетъ, въ «немощномъ по вѣрѣ», сомнѣніе; а потому сказано: «немощного по вѣрѣ принимайте безъ споровъ о мнѣніяхъ» (Римл., XIV, 1).

Однако же распадъ народной вѣры, есть грозный для Родины симптомъ. Съ распадомъ вѣры распадается *семейный союзъ*, распадается историческая ткань родины, падаетъ любовь къ ней и самая потенція жить. Такъ, на нашихъ глазахъ виновникомъ французскаго національнаго самоубійства, обнаруживаемаго статистикой народонаселенія, является, очевидно, Парижъ, этотъ развращенный Вавилонъ съ культомъ корысти и комфорта и съ рынкомъ «прекрасныхъ грѣшницъ», исповѣдующихъ въ теоріи и практикѣ освобожденіе отъ долга хорошо родить и хорошо воспитывать дѣтей.

III. Нормативное государство въ стилѣ восточно-европейскаго просвѣщенія, подраздѣляя свои функціи на спеціальности, должно различить и вмѣстить свои собирательные матеріалы въ три *древнихъ* мѣры или формы: А) государство, какъ церковь; Б) государство, какъ школа научнаго изслѣдованія и преподаванія дисциплинъ; В) государство, какъ военный и гражданскій щитъ и мечъ правосудія отъ засилья неправды. Если хотя одна изъ трехъ формъ: А, Б и В выпадаетъ изъ сочетанія АБВ, то получается недодѣлокъ, нравственный и умственный уродъ того или другого рода. Государство БВ дѣлается военно-промышленнымъ безъ совѣсти, такъ какъ въ немъ обезцѣнена религіозная стихія А. Государство АВ дѣлается демагогически-клерикальнымъ, такъ какъ въ немъ обезцѣнена изслѣдовательная стихія Б. Государство АБ разгромляется анархіей какъ карточный домъ, ибо въ немъ обезцѣнена державная ограждающая стихія В.

Если стихіи А, Б и В взять отдѣльно другъ отъ друга безъ ихъ духовной цѣльности, то въ оболочку каждой изъ нихъ можетъ вырядиться самая жестокая анархическая мистификація. Анархію въ оболочкѣ А пыталась осуществить римская средневѣковая теократія. Анархію въ оболочкѣ Б пыталась осуществить первая французская революція съ ея «богиней разума». Анархію въ оболочкѣ В пытался осуществить геній Наполеона I, дѣлавшаго стихію АБ не *душою* націи, а своимъ орудіемъ.

Соединенія (діады) АБ, БВ и ВА, по силѣ органическаго «химическаго» сродства къ *недостающему* третьему элементу, способны *притягиваться* другъ къ другу, чтобы образовать познавательную тріаду

которую можно принять за «химическую» формулу нормативнаго государства, соединяющаго вышеуказанныя государственныя стихіи А, Б и В Схема △ АБВ — это не *мистическая слѣпая смѣсь* силъ А, Б и В, а именно разумное соединеніе по методу «химическаго» взаимопритяженія, нарушаемаго развѣ лишь примѣсями царства 1° (см. выше пунктъ I).

Конституціонная формула △ АБВ предполагаетъ сосредоточія (представительства) въ *головѣ* политическаго тѣла разумныхъ силъ А, Б и В.

Средоточіе стихіи В есть государь съ чинами,
» » А » патріархъ (синодъ) съ соборомъ,
» » Б » государственная дума съ науками и прессой.

Эти живые центральные символы для вѣрящаго мышленія суть суверенные *священные залоги*, драгоцѣнные *палладіумы* соотвѣтствующаго устремленія приблизить къ земскому Отечеству предѣльное состояніе 2° (см. выше, пунктъ I), царство божіе. Увѣрованіе воспламеняется, поддерживается въ мысли вѣрящихъ этими палладіумами.

Мыслительная способность государственной думы, какъ выборнаго народнаго посадника, втянутаго въ средоточіе государства, рѣшительно зависитъ отъ того, какова государственная стихія АБ, распространяющая религіозность и научную образованность въ народѣ.

Сдвигъ престижа вышеупомянутыхъ палладіумовъ въ мысли сомнѣвающихся поддерживается, подогрѣвается средоточіями устрашающихъ и прельщающихъ средствъ царства 1° внутренняго софиста, стремящагося поднять свой кредитъ своими графическими символическими методами, увеличивая число своихъ адептовъ подкупомъ утѣсненныхъ по дешевой оцѣнкѣ, зная, что въ психологіи бѣдствующаго копѣйка кажется рублемъ; тогда какъ откупъ плутократіи не долженъ быть слишкомъ дешевымъ, ибо по страховой теоріи въ царствѣ божьемъ при сборѣ общественныхъ жертвъ «лепта вдовы» переучитывается дороже большой жертвы купца.

Государственное мышленіе всѣхъ трехъ типовъ А, Б и В должно придерживаться чистаго химическо-фармакологическаго метода, отдѣляющаго примѣсь элементовъ царства 1°, представляющую то духовное зло, которое сдвигаетъ мысль къ кореннымъ спекулятивнымъ источникамъ заблужденія и корысти, стремящимся затемнить солнце свободы, мило-

сти и правды. Нормат. государство располагаетъ средоточіемъ активныхъ принциповъ сложенія народныхъ силъ въ *массивные* ряды для жизненной работы.

При историческихъ тріангуляціяхъ оказывается, что, для продолженія пожизненнаго народнаго опыта послѣ какой либо хронологической даты τ, нужна традиціонная предразсудочная (апріорная) догма; она нужна какъ публичное прикладное ученіе или какъ публично, театрально «включенное четвертое» (см. § 18_2), символически скрѣпляющее тріангуляціонную генетическую ткань (кровнобіологическую, соціологическую, экономическую и политическую) отечества; она усваивается массами публики какъ *положительный* методъ, направляющій массивныя теченія цѣнныхъ логическихъ «жидкостей» (идей-силъ, правовыхъ валютъ и пр.) по символамъ, какъ по русламъ и каналамъ.

Вообще логическая «вода» *) можетъ въ качествѣ обозначенной валюты (энергіи) работать по цѣли своимъ теченіемъ, если направляется разумною непрерывною массивною струею въ дѣла народной мысли. Этотъ потокъ цѣнной «воды», аналогическій *гипотетическимъ* жидкостямъ теоріи свѣта, тепла, электричества, нужно испытывать какъ всякое прикладное народное знаніе; испытывать (см. § 20_1) въ мѣру наростанія историческаго опыта, послѣдовательно по дѣйствію, по плодамъ, по качеству и по служебной установкѣ «гидравлическихъ» машинъ (учрежденій).

IV. Мысля о большой продолжительности времени развитія природы на земной скалѣ, мы научно координируемъ свое знаніе относительно неизсякаемаго міра смѣнныхъ жизненныхъ явленій; но мы не можемъ удостовѣрить научными методами будущаго безсмертія человѣческаго рода на всѣ времена. Ибо жизневозбудительные элементы солнечнаго потенціала изсякаютъ, потухаютъ. Чѣмъ будутъ матеріально жить будущія поколѣнія, когда потенціалы солнца и земной скалы, способствующіе выработкѣ хлѣба и пр., истощатся?

Но погрѣшности ученій о потенціалахъ не даютъ возможности забѣгать мыслью въ такую даль времени. Въ вопросахъ отдаленныхъ перспективъ будетъ надежнѣе руководиться понятіями живой вѣры съ ея жизнью мысли, не столь крѣпко зависящею отъ современныхъ формъ воплощенія; морфологически совершенствуясь, мысль можетъ воплотиться въ такія астральныя, относительно твердыя тѣла, о которыхъ мы и теперь уже имѣемъ понятіе, научно оформленное довольно точно.

Нужно замѣтить, что современное хищное отношеніе европейской цивилизаціи къ залежамъ и производительнымъ силамъ земли и ея

*) Религіозную «воду» разумѣетъ въ своихъ метафорахъ евангельскій Логосъ (Іоаннъ, IV, 14. VII, 38).

царствъ природы будетъ наказано истощеніемъ, катаклизмомъ, исторической Немезидой.

Ненадежны также раціоналистическія истолкованія природы, углубляющіяся въ ошеломляющую даль прошлаго.

§ 20_1. Испытаніе прикладныхъ спорныхъ ученій и реальныхъ мѣръ (силъ) соціальныхъ законовъ по ихъ плодамъ въ рядѣ дифференціальныхъ интерваловъ $\delta\tau$ времени. Методы сходства, различія, остатковъ.

Примемъ въ разсужденіе то обстоятельсто, что исторія есть неограниченно длящійся, пожизненный опытъ живого народа, критически подраздѣляемый съ помощью схемъ (плановъ) дифференціальнаго исчисленія на безграничный рядъ послѣдовательныхъ интерваловъ:

$$(\tau_0, \tau_0 + \delta\tau), (\tau_0 + \delta\tau, \tau_0 + 2\delta\tau), \ldots, (\tau_0 + k\,.\,\delta\tau, \tau_0 + k\,.\,\delta\tau + \delta\tau), \ldots \quad (I)$$

текущаго рабочаго времени τ *), начинающихся хронологической датой τ_0 и связанныхъ историческими генетическими тріангуляціями и плодами.

Терминъ «плодъ» разумѣемъ въ широкомъ смыслѣ, считая плодомъ всякую формированную способность природы вещей, считая и человѣка за вещь, поддающуюся образованію изъ сырья и издержкѣ въ дѣлахъ Отечества.

Плодъ можетъ быть здоровымъ и гнилымъ, сладкимъ и горькимъ, печальнымъ и пр.; пусть онъ имѣетъ опредѣленные признаки для счисленія его явленія въ предѣлахъ страны.

Бюджетъ страны по явленію плодовъ того или другого рода предразсуждается и предрѣшается на критическій интервалъ ($\tau_0 + k\,.\,\delta\tau$, $\tau_0 + k\,.\,\delta\tau + \delta\tau$), взятый изъ ряда (I), *переднимъ числомъ* (забѣгая мыслью впередъ фактовъ); въ самомъ этомъ интервалѣ развертывается дѣйствіе $E_{\tau,\,k}$ факторовъ, совокупно вырабатывающее загаданный плодъ Φ_k; въ концѣ того же интервала сличается вѣроятностное ожиданіе плода Φ съ фактическимъ его полученіемъ, выкупающимъ натуральныя и символическія издержки.

Прикладныя практическія знанія и мѣры, входящія въ составъ $E_{\tau,\,k}$ и испытываемыя въ критически назначенномъ рядѣ интерваловъ, поднимаютъ свой кредитъ или роняютъ его и отбрасываются, *судя по плодамъ*. Этому испытанію и усвоенію или, наоборотъ, отсѣченію подлежатъ какъ ходовыя испытываемыя прикладныя знанія въ видѣ ремеслъ и профессій, такъ и уставныя мѣры (силы) соціальныхъ законовъ, примѣненіе которыхъ

*) Эта послѣдовательность критическихъ интерваловъ времени, намѣченная еще въ моей книгѣ «Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности», вошла, какъ элементъ *философіи исторіи*, также въ мою книгу «Математ. статистика».

обязательное и принудительное *). Въ этомъ графическомъ изслѣдованіи, строкѣ (I) соотвѣтствуетъ: 1° строка (табель) дѣйствій $E_{\tau,\,k}$ *работающихъ факторовъ* (упомянутыхъ въ §§ 18_2 и 19_1), именно:

$$E_{\tau,\,0}\ E_{\tau,\,1}, \ldots, E_{\tau,\,k}, \ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

считая испытываемое прикладное ученіе или реальную мѣру F закона въ числѣ духовныхъ факторовъ; 2° строка или таблица плодовъ:

$$\Phi_0,\ \Phi_1, \ldots \Phi_k, \ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

возстановляющихъ издержки, *натуральныя* и *символическія*, и *предразсудочно* опредѣляемыхъ (въ бюджетномъ порядкѣ) примѣнительно къ средней нормѣ Φ^0 (включая въ нее резервъ достовѣрности на худой конецъ). Исчисленія срочныхъ плодовъ (III) и ихъ среднюю норму перелагаютъ примѣнительно къ опредѣленному числу душъ (скажемъ, на тысячу душъ) народонаселенія данной территоріи.

Въ дѣйствительности количество Φ колеблется, обнаруживая съ помощію статистической діаграммы заднимъ чиломъ *сдвиги* явленія, какъ на фигурахъ 1, 2, 10; а также оно колеблется въ точномъ *мысленномъ* росписаніи его загадываемыхъ значеній по всѣмъ возможнымъ несовмѣстимымъ статочностямъ процесса, число которыхъ иногда считается множествомъ милліардовъ. Въ гипотическомъ обсужденіи играетъ роль другая, именно предразсудительная вѣроятностная діаграмма перемѣннаго количества $Y = \Phi - \Phi^0$, являющаяся приблизительнымъ повтореніемъ статистической діарраммы частости (если была фактическая регистрація).

Испытываемый факторъ F отражается въ діаграммахъ того и другого рода какъ въ двухъ *графическихъ зеркалахъ*. Эти графики можно *наложить* другъ на друга, причемъ получается *инволюція*, хотя только приблизительная, но поучительная. Діаграммы сличаются въ обстоятельствахъ, когда испытуемый факторъ F не былъ вводимъ, и въ обстоятельствахъ, когда испытуемый факторъ F былъ вводимъ. При сличеніи примѣняются методы: *сходства*, *различія*, *остатковъ* и проч. (см. «Систему логики» Д. С. Милля). Эти сличенія даютъ *кредитные коэффиціенты* и ведутъ ко многимъ *озареніямъ* вѣрящаго мышленія, формируютъ многія убѣжденія, возводимыя въ достоинство руководящихъ принциповъ, поднимаютъ курсы однихъ испытуемыхъ факторовъ и роняютъ курсы другихъ, смотря по плодамъ. Такимъ образомъ совершается планомѣрный культурный отборъ спорныхъ ученій, силъ, — вообще причинныхъ факторовъ, оцѣниваемыхъ по количеству и качеству плодовъ. Цѣлесообразный отборъ можетъ усилить доброкачественные сдвиги событія, ослабить злокачественные.

*) Этотъ вопросъ я трактовалъ въ статьѣ: «Государство и Академія». Москва, 1905.

О сравнительномъ методѣ мы еще будемъ говорить въ части III, въ связи съ мѣрилами сродства и варіаціями вѣроятностей и частостей.

Массивъ S сберегаемыхъ вспомогательныхъ средствъ F дѣятельности вызываетъ, по мѣрѣ выпуска, массивную варіацію δp вѣроятности p и варіацію частости выхода плодовъ Φ въ совокупности соотвѣтствующихъ операцій O. Силы S, какъ капиталы, сосредоточиваются подъ рукою въ хранилищахъ и въ центрахъ страны. Онѣ, подобно запасу горючаго матеріала паровыхъ котловъ, даютъ возможность управлять дѣлами людей и механизированными космическими силами природы, учитываемыми посредствомъ потенціаловъ V, какъ *функціональныхъ среднихъ величинъ*, зависящихъ отъ варьирующихся факторовъ X_1, X_2,... и фиксирующихъ наиболѣе достовѣрные законы среды (множества).

О типахъ потенціаловъ V рѣчь будетъ ниже (§ 21_2); одни V скрываютъ время τ въ прочихъ факторахъ, другія V явно зависятъ отъ времени τ.

Сочетаніе космическихъ потенціаловъ V съ различными капиталами S дѣлаетъ потенціалы V очеловѣченными, осмысленными сообразно цѣлямъ жизни, антропологическо-космическими. Это сочетаніе дѣлаетъ механику этническихъ тѣлъ процессомъ, въ которомъ движеніе сопровождается вспомогательными и спасительными импульсами разнороднаго капитала S, какъ сподручнаго средства застрахованія и меліораціи.

Укрѣпленные за лицами гражданскіе акты землевладѣнія, орудія, трудъ, деньги, блага считаются за виды сберегаемаго капитала S, послушнаго волѣ человѣка и воздѣйствующаго на его дѣла и потенціи жизни.

§ 20_2. Синдикализмъ или свободная конкурренція?

Этотъ вопросъ есть перестановка и перефразировка кантіанской антиноміи: свободная причинность или только необходимость?

Всемірная крупная промышленная борьба нынѣ ставитъ своимъ девизомъ свободную конкурренцію лишь на словахъ, ради торговой провокаціи; на дѣлѣ же происходитъ тайное и явное объединеніе вспомогательныхъ промышленныхъ средствъ въ рукахъ міровой олигархіи денежнаго капитала. За кулисами видна диктаторская власть этой олигархіи.

Торговый синдикализмъ сначала вытѣсняетъ мелкую свободную внутреннюю конкуренцію; потомъ онъ можетъ вступить въ борьбу съ самимъ государствомъ, являясь политическимъ революціоннымъ абсурдомъ, называемымъ «государствомъ въ государствѣ».

Синдикатъ, покорный законамъ отечества, полезный ему, подконтрольный его властямъ, обузданный изслѣдованіемъ,—это богатырь, способный быть элементомъ щита отечества въ міровомъ состязаніи, не противорѣчащимъ также и достаточному «мѣщанскому счастью» обывателей.

Синдикатъ вампировъ промышленности—это плохая вещь, способная воскресить крѣпостное право. Caveant consules!..

Въ защиту слабыхъ противъ притязаній капиталистическаго феодализма Германія, въ особенности Пруссія добросовѣстно выдвинула: 1) прямой налогъ (см. мою книгу: «Математическая статистика») и 2) страхованіе и мелкій государственный кредитъ промысламъ и крестьянскимъ хозяйствамъ, понижающій процентъ по силѣ закона большихъ чиселъ (см. часть II, § 16).

§ 21_1. Формальное обоснованіе наблюденія. Символическое мышленіе и исчисленіе. Асимптотическое исчисленіе.

I. Назовемъ вообще *экстраполированіемъ* исчисленія, связанныя съ дедукціей и мысленнымъ забѣганіемъ впередъ фактовъ и дальше непосредственнаго наблюдаемаго горизонта, даже внутрь «вещей въ себѣ», ноуменовъ, закрытыхъ урнъ (сосудовъ). Этимъ забѣганіемъ экстраполированіе отличается отъ опытнаго интерполированія; оно ставитъ вопросъ о неизвѣстномъ и обосновываетъ символическія мѣры риска и гарантіи.

Взвѣшиванія условій вопроса на дифференціальныхъ вѣсахъ какой либо валюты (тепловой въ вопросахъ термодинамики, Омической въ вопросахъ электродинамики, финансовой въ вопросахъ экономики и пр.) даютъ диференціальныя уравненія вопроса. А *символическое исчисленіе* даетъ дедуктивно, послѣ ряда сужденій, заключеніе или, лучше сказать, формальное рѣшеніе вопроса, ничего по существу не говорящее, но обосновывающее своими предѣльными условіями и выраженіями эмпирическую формулу *средняго* рѣшенія и отклоненія.

Самая удивительная важная форма символическаго мышленія есть порядковое мышленіе *безконечными рядами*, записываемыми сокращенно.

Логическое мышленіе есть символическое мышленіе, дѣйствующее посредствомъ терминовъ рѣчи, понятій и предложеній. Оно переходитъ въ *символическое порядковое и функціональное исчисленіе*, какъ только логическое упражненіе перестаетъ быть риторическою игрою словъ.

Эти безконечные ряды сужденій и уравненій (сориты) нагромождаются ради возможности числоваго изслѣдованія различныхъ потенціаловъ, какъ наиболѣе достовѣрныхъ среднихъ функціональныхъ зависимостей.

Въ символическомъ исчисленіи основою служатъ: 1) *аналогіи*, въ коихъ извѣстныя понятія обозначаются буквами и буквы формально трактуются въ соотношеніяхъ какъ алгебраическія величины, не будучи величинами, и 2) *условныя правила сложенія и умноженія*, имѣющія различную природу. Разъ принятыхъ правилъ нужно, при теоретическомъ обоснованіи опыта, держаться неизмѣнно, машинообразно. Вѣрность результата испытывается потомъ критикою и извѣстными мѣрами точности.

Опредѣленныхъ числовыхъ мѣръ точности и устойчивости символическое

(не количественное) взвѣшиваніе достигаетъ въ математической логикѣ, которая слагается: 1) изъ аритмологической дифференціальной дедукціи, съ ея операціей Δ, которая въ приложеніи къ функціи $f(x)$ и въ простѣйшемъ аритмологическомъ дифференцированіи означаетъ слѣдующее:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x);$$

2) изъ предѣльной (аналитической) дифференціальной дедукціи, съ ея операціей $\frac{d}{dx}$, которая въ приложеніи къ аналитической непрерывной функціи $f(x)$ означаетъ слѣдующій *предѣльный* результатъ

$$\frac{df(x)}{dx} = Lim\left\{\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}\right\}_{\delta=0};$$

3) изъ символической теоріи инваріантовъ, которая нынѣ разрасласъ въ огромную вѣтвь математики, 4) изъ вѣроятностной индукціи (умозрѣнія, забѣгающаго впередъ факта и за видимый горизонтъ), съ ея кредитными объемными обязывающими символами (контрактами), демонстрирующими *до факта* мысленное возможное обладаніе реальностью лишь условно, но подпадающее подъ отчетъ (подъ рѣшеніе) *послѣ факта*.

Неколичественное (символическое и объемное) исчисленіе, аналогическое количественному, разсматриваемому въ алгебрѣ и геометріи, играетъ большую роль въ образованіи научнаго понятія права и правильнаго модулированія и воспріятія взглядовъ и рѣшеній.

Первыми по важности научными элементами оперативно-символическаго (неколичественнаго) исчисленія, аналогическаго количественному исчисленію, являются логическія предложенія въ формѣ уравненій между многократно повторяемыми операціями

$$\frac{d}{dx} \quad \text{и} \quad \Delta,$$

причемъ повторныя операціи $\frac{d^n}{dx^n}$ и Δ^n трактуются *аналогически*, какъ алгебраическія степени *) количествъ $\rho = \frac{d}{dx}$ и Δ.

Основныя уравненія этого символическаго исчисленія имѣютъ видъ:

$$e^{h\frac{d}{dx}} \equiv 1 + \Delta \quad \text{и} \quad lg(1+\Delta) \equiv h\frac{d}{dx}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ $\equiv$ есть знакъ тождественнаго символическаго равенства; при чемъ

*) Слѣдуя Ліувиллю и А. В. Лѣтникову, я распространилъ символъ $\frac{d^n}{dx^n}$ на дробныя и отрицательныя показатели n (см. мою статью: «Общее дифференцированіе» въ XIV томѣ Математ. Сборника).

второе изъ тождественныхъ равенствъ (1) получается логарифмированіемъ перваго *). Интерпретація (истолкованіе смысла) равенствъ (1) дѣлается съ помощію приложенія разсматриваемыхъ операцій къ какой либо данной функціи $f(x)$, способной испытывать на себѣ дѣйствіе этихъ операцій. При этомъ сжатые символы

$$e^{h\frac{d}{dx}} \quad \text{и} \quad lg\,(1+\Delta)$$

развертываютъ въ равносильные имъ безконечные ряды, именно:

$$e^{h\frac{d}{dx}} f(x) = \left(1 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{h^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n}{dx^n}\right) f(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$lg\,(1+\Delta)\,f(x) = \left(\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n\right) f(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Вторая часть равенства (3) равносильна ряду Тейлора, дающаго ключъ для перехода отъ символическаго исчисленія къ количественному въ приложеніи къ $f(x)$. *При условіи сходимости ряда* (3), вторая часть равенства (3) даетъ въ итогѣ величину $f(x+h)$, и слѣдовательно

$$e^{h\frac{d}{dx}} f(x) = f(x+h) = (1+\Delta)\,f(x);$$

каковой результатъ подтверждаетъ первое изъ символическихъ равенствъ (3), приложенное къ функціи $f(x)$. Итакъ, истины, представляемыя уравненіями (1), суть *условныя*, смотря по виду функціи $f(x)$ и по сходимости рядовъ (3) и (3′).

Иначе говоря, приложенныя къ данной функціи $f(x)$ символическія равенства (1) *даютъ въ результатѣ количественныя тождественныя равенства*:

$$e^{h\frac{d}{dx}} f(x) = (1+\Delta)\,f(x) \quad \text{и} \quad lg\,(1+\Delta)\,f(x) = h\,\frac{df(x)}{dx}, \quad . \quad (4)$$

не всегда въ дѣйствительности вѣрныя (неиллюзорныя).

Эти равенства будутъ абсолютно вѣрными (неиллюзорными), если $f(x)$ есть раціональная цѣлая алгебраическая функція (цѣлый полиномъ).

---

*) См. *Ващенко-Захарченко*: Теорія конечныхъ разностей. Кіевъ, 1868.—Эта книга содержитъ краткое изложеніе символическаго исчисленія Буля, съ приложеніями этого исчисленія къ дифференціальнымъ уравненіямъ. Развитіе символическихъ исчисленій дается въ трудахъ *В. Г. Алексѣева*, изъ которыхъ отмѣтимъ здѣсь: 1) «Теорія раціональныхъ инваріантовъ въ направленіи Ли, Кели и Аргольда» (Юрьевъ, 1899) и 2) «Основы символической теоріи инваріантовъ» (для химиковъ) (Юрьевъ, 1901).

Если же $f(x)$ есть функція или дробная, или ирраціональная, или трансцедентная, то равенства (4) *оказываются иногда иллюзорными, иногда вѣрными, смотря по тому, будутъ ли безконечные ряды* (3) *и* (3′) *сходящимися или же расходящимися. Въ этихъ случаяхъ играютъ существенную роль, кромѣ возможности совершенія операцій, еще условія сходимости рядовъ, причемъ сходимость эта перемѣнчива въ зависимости отъ области измѣненій перемѣннаго x.*

При расходимости же этихъ рядовъ равенства (4) опрокидываются какъ *иллюзія* или *ложь*.

Множество *парадоксовъ* и множество *смежныхъ полосъ* (интерференцій) то *иллюзорности* (лжи), то *неиллюзорности* (правды) заключеній, получаемыхъ въ результатѣ логическихъ построеній, приложенныхъ къ реальнымъ функціямъ, *продырявливаютъ* достовѣрность вывода такъ, что приходится логику детерминизма признать орудіемъ мысли, необходимымъ, но недостаточнымъ. Нужна логика неопредѣленнаго анализа (см. ч. III, § 3).

Черезполосица иллюзорности и неиллюзорности (свѣтотѣнь) бываетъ иногда подобна интерференціямъ звуковыхъ, свѣтовыхъ, электромагнитныхъ и другихъ эффектовъ.

Логическая дедукція какъ по азбучнымъ методамъ Д. С. Милля, Минто и пр., такъ и по болѣе острымъ методамъ Буля, Джевонса, Порѣцкаго и пр., игнорирующая, въ примѣненіи къ вопросамъ естествознанія и къ жизни соціальныхъ множествъ (тѣлъ), идею сходимости и расходимости весьма длинныхъ и безконечныхъ рядовъ, бываетъ довольно подозрительною. Однако-же она *заготовляетъ* рабочую схему (планъ) изслѣдованія; а потому она имѣетъ цѣну, но должна въ примѣненіи къ конкретнымъ функціямъ $f(x, y, z, \ldots)$ присоединять къ себѣ еще *независимую повѣрку*, *предохранительную критику* результата, 1° иногда *чисто математическую*, связанную съ разсмотрѣніемъ *дополнительныхъ членовъ* длинныхъ и безконечныхъ рядовъ, 2° иногда же *опытную*, экспериментальную.

Ниже мы разсмотримъ формулу Эйлера именно съ дополнительнымъ членомъ; каковая формула является простымъ слѣдствіемъ перваго изъ тождественныхъ равенствъ (4). Но въ символическихъ процессахъ вообще оцѣнка дополнительныхъ членовъ, независимая отъ экспериментальнаго метода, бываетъ даже совсѣмъ невозможною. По этой причинѣ умъ бываетъ вынужденъ, оставляя на время почву раціонализма, независимо отъ нея дѣлать разныя гипотезы о достоинствахъ и недостаткахъ критикуемаго символическаго вывода и работать экспериментомъ и методами вѣроятностнаго изслѣдованія, составляя обстоятельный *протоколъ* происходящаго въ данномъ активномъ экспериментѣ или въ рамкахъ даннаго пассивнаго наблюденія.

Вотъ почему Буль, а за нимъ Джевонсъ, Порѣцкій и другіе сочетаютъ математическую логику и научную соціологію и экономику съ исчисленіемъ вѣроятностей и съ опытной повѣркой.

Соотвѣтственно игрѣ силъ природы совершаются кризисы въ мірѣ рѣчи, въ распредѣленіи «средняго термина» силлогизма по «крайнимъ» для рядовъ силлогизмовъ. Эти діалектологическія игры эмпирически легализуются лишь приблизительно, повѣряя нѣчто въ *долгъ* съ надлежащей запасной *оцѣнкой* выкуповъ отклоненія отъ нормы (см. часть III, гл. I).

Тамъ, гдѣ критика связи именъ и фактовъ не исключила неопредѣленностей слова,—тамъ является *дисперсія* мысли, и уравненія замѣняются логическими неравенствами (по объему понятій или по содержанію сужденій). Акты, соприкосновенные съ этими дисперсіями, надлежитъ связывать въ умѣ и на бумагѣ съ исчисленіемъ по графической координатѣ вѣроятности p, прилагая это исчисленіе къ соотвѣтствующимъ функціямъ. Такъ въ планъ задачъ, положимъ, съ однимъ независимымъ варьирующимся факторомъ x можно вводить математическія ожиданія видовъ:

$$U = \sum_{k=1}^{k=n} p_k \cdot F_k\left(\frac{d}{dx}\right) f_k(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$V = \sum_{k=1}^{k=n} p_k \cdot F_k(\Delta)\, f_k(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

и пр., гдѣ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть вѣроятности того, что въ предстоящемъ процессѣ функціональныя явленія $F\left(\frac{d}{dx}\right) f(x)$ и $F(\Delta) f(x)$ выступятъ съ *соотвѣтствующимъ* (по индексу k) изъ *несовмѣстимыхъ* значеній:

$$F_1\left(\frac{d}{dx}\right) f_1(x), \ldots, F_k\left(\frac{d}{dx}\right) f_k(x), \ldots, F_n\left(\frac{d}{dx}\right) f_n(x),$$

$$F_1(\Delta)\, f_1(x), \ldots, F_k(\Delta)\, f_k(x), \ldots, F_n(\Delta)\, f_n(x).$$

Математическое ожиданіе (статистическій «моментъ») сложнаго явленія *общей пользы* V, зависящее отъ множества операцій и перемѣнныхъ величинъ, и частныя видоизмѣненія этой формулы V, опредѣляющей уравненія *цѣнъ матеріальныхъ благъ* *), могутъ, благодаря неопредѣленности слова, имѣть видъ (5), распространенный на многія рискуемыя экономическія цѣнности, приведенныя къ одному финансовому знаменателю.

Вообще среди лукавой неопредѣленности слова лишь экспериментальный методъ своею работою даетъ возможность выяснить интересующія достовѣрности, которыя формальная схоластическая логика, помогая открыть правду, можетъ честно намѣтить лишь *вопросительно*, какъ

*) См. часть II, § 27, а также *H. Laurent*: Statistique Mathématique. — *П. А. Некрасовъ*: Математическая статистика, хозяйств. право и финансовые обороты.

задачу для экспериментальнаго анализа какъ бы «гностической» *смѣси довѣрія съ подозрѣніями*.

Хорошо поставленный опыту вопросъ есть уже *почти* рѣшеніе; совершенное же рѣшеніе молчаливо *досказываетъ* опытъ.

II. Экспериментированіе, пользующееся оборотомъ весьма большого и безконечнаго числа сужденій, тѣсно связано съ асимптотическимъ вычисленіемъ, основы котораго для аналитическихъ функцій съ однимъ *непрерывно* измѣняющимся перемѣннымъ и съ однимъ безконечно возрастающимъ *прерывнымъ* числовымъ перемѣннымъ m изложены, между прочимъ, въ моемъ трудѣ: «Исчисленіе приближенныхъ выраженій функцій весьма большихъ чиселъ» (Матем. Сборн., т. XXI, 1899).

Теорія эта распространяется, конечно, на нѣсколько непрерывныхъ и прерывныхъ перемѣнныхъ. Она даетъ возможность моментально схватить то, что невооруженное этимъ методомъ мышленіе добывало бы въ теченіе столѣтій и тысячелѣтій. При этомъ практика въ ассимптотическихъ выраженіяхъ подмѣняетъ безконечное число $m = \infty$ большимъ конечнымъ числомъ, заботясь о томъ, чтобы погрѣшность была ничтожна или же побѣждаема выкупомъ.

Популярная логика, изслѣдующая вопросы съ медленностію черепахи, не могла бы исполнить подобную работу. Поэтому вопросы застаиваются у популярныхъ логиковъ (ихъ можно назвать также реакціонерами въ хорошемъ смыслѣ слова: реакція).

Все это ясно показываетъ, что математизація (математическая переработка и математическая формулировка) дедуктивной и индуктивной логики не только не безполезна, какъ пренебрежительно утверждаютъ логики-реакціонеры *), но напротивъ безконечно полезна въ вопросахъ дальнозоркаго мышленія и установки общественнаго опыта въ большомъ объемѣ. Реакціонная логика права лишь *настолько*, насколько она, занятая дѣломъ популяризаціи истинъ среди отсталыхъ, ради ихъ спасенія, остерегаетъ отъ опасной быстроты прогресса, отъ пренебрежительнаго къ «малымъ симъ» нетерпѣнія **).

Реакціонная логика соотвѣтствуетъ задерживающимъ центрамъ психологіи и уздѣ слишкомъ борзаго коня, везущаго историческую колесницу. Напротивъ, логика прогрессивная соотвѣтствуетъ ускоряющимъ центрамъ психологіи и бичу Немезиды, подгоняющей тѣхъ, кто на извѣстное ей разстояніе отсталъ отъ нормальнаго хода исторической колесницы. Умная прогрессивность не отрицаетъ умной реакціи; ибо то и другое есть нецѣльная истина, полуистина (свѣтотѣнь). Въ соціальной химической ретортѣ

*) *Минто*: «Дедукт. и индукт. логика», стр. 168.
**) Тамъ же, стр. 26—27.

нужны и акціи, и реакціи. Счастливо совмѣщать прогрессъ и реакцію—это есть уже даръ Неба и плодъ цѣломудренной самодѣятельности. Во всякомъ случаѣ народы реакціонные приспособляются къ роли арьергарда, народы же быстрые разумомъ и активные—къ роли авангарда.

III. Экстраполирующее мышленіе вынуждено считаться съ весьма большими рядами предложеній и силлогизмовъ. Если оно прикрѣплено къ формуламъ математическаго анализа функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ, охватывающихъ время t и другіе пространственные и графическіе континуумы $x, y, z, \ldots$, вещественные и мнимые вида: $a + b\sqrt{-1}$, то задача сводится къ представленію голоморфныхъ функцій безконечными рядами *), къ обсужденію этихъ безконечныхъ рядовъ, каждый членъ которыхъ есть силлогизмъ, иногда количественный и порядковый, иногда неколичественный, а символическо-оперативный, условно раціонализирующій механику, химію, экономію, соціальную химію, психологію и метафизическую идеологію **). Дедукціи, основанныя на этомъ анализѣ, имѣютъ безконечную мощность, проникая въ безконечно малое, въ безконечно великое и въ конечное и художественно отображая все что нужно на условномъ графическомъ планѣ пангеометріи (терминъ «пангеометрія» я обобщаю).

Изслѣдованіе же связи явленій для двухъ отдаленныхъ пунктовъ $(t, x, y, z, \ldots)$ и $(t', x', y', z', \ldots)$ сводится теоріей ряда Лагранжа и ряда Тейлора къ аналитическому продолженію той или другой функціи отъ точекъ $(t, x, y, z, \ldots)$ одного горизонта (одной области) до точекъ другого горизонта (см. выше, § 15).

При аналитическомъ продолженіи, являющемся основою экстраполированія, приходится имѣть дѣло не только съ безконечными рядами, но и съ безконечнымъ числомъ линейныхъ алгебраическихъ уравненій (простыхъ предложеній силлогистической логики). И тогда только, т. е. послѣ безконечнаго ряда сужденій, можетъ получиться удивительный выводъ, который невозможно вывести черепашьимъ шагомъ популярной логики, какъ почтенная логика Минто и другихъ. Эта медленность не оправдываема и съ педагогической стороны, ибо безконечные ряды понятны уже дѣтямъ, изучающимъ, напримѣръ, безконечныя десятичныя дроби довольно легко.

---

*) Терминъ «голоморфная функція» разъясненъ для одного перемѣннаго въ моемъ «Рядѣ Лагранжа», а для многихъ перемѣнныхъ въ 1-й главѣ книги *E. Goursat*: «Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du premier ordre». Paris. 1891.

**) *В. Г. Алексѣевъ*: 1° «Основы символической теоріи инваріантовъ (для химиковъ)». Юрьевъ. 1901. 2° «Н. В. Бугаевъ и проблемы идеализма» (Сборн. Ученo-Лит. Общества при Юрьевск. Унив. Томъ IX. 1905).

§ 21_2. Типы потенціаловъ, научно фиксирующихъ законы среды.

Наиболѣе вѣроятныя фиксаціи законовъ среды (множества) выражаются гармоническими потенціалами и потенціальными средними взаимоотношеніями. Потенціалъ V своими частными дифференціалами

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}\,dx_1,\quad \frac{\partial V}{\partial x_2}\,dx_2,\ \ldots$$

по варьирующимся факторамъ $x_1, x_2, \ldots$ характеризуетъ знакъ и величину силы или эффекта, производимаго этими варьированіями. Въ глазахъ экспериментатора потенціалъ V является наиболѣе удачною интерполяціонною формулою, удовлетворяющею условіямъ соотвѣтствующей проблемы. Обыкновенные потенціалы не зависятъ явно отъ времени t *).

Электрическіе процессы выявливаются гармоническими потенціалами W другого типа, зависящими не только отъ положенія точки $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, но и отъ времени t **).

Электричества (+) и (—) не только при встрѣчѣ погашаются взаимно, какъ тепло и холодъ, но и развиваютъ въ проводникахъ индукцію, притяженія и отталкиванія. Подобныя магнетическія свойства принадлежатъ также и массивамъ явленій, связанныхъ свободною причинностью; между ними развивается различное сродство, то положительное (+), то отрицательное (—), при чемъ мѣрило степени и знакъ сродства опредѣляются вѣроятностными формулами (см. часть III, гл. I и II).

Когда прикладное ученіе не доросло по какому либо вопросу до формулированія совершенной теоріи гармоническаго потенціала, тогда довольствуются негармоническими потенціалами разныхъ родовъ. Каждая

---

*) Раскрытіе многихъ законовъ раціональной механики и опытной физики удается сдѣлать съ помощію гармоническаго потенціала V (Лапласовскаго и с" соновскаго), для котораго выраженіе

$$\nabla_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_m^2}$$

обращается въ нуль, иногда въ данную функцію f точки $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Этотъ потенціалъ V принадлежитъ къ типу потенціаловъ, независящихъ явно отъ времени t.—Въ потенціалы входятъ *произвольные элементы* интеграціи.

**) Такъ, для простѣйшаго (одномѣрнаго) пространства (т. е. для случая $m = 1$) изъ теоріи электричества слѣдуетъ, что выраженіе

$$\nabla_2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - a\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + [f(x) + b]\,\frac{\partial W}{\partial t} - cf(x)\,W$$

должно обращаться въ нуль, $\nabla_2 W = 0$. Этому уравненію, коимъ занимались лордъ Кельвинъ, профессора Осадчій, К. А. Поссе и В. И. Коваленковъ, посвящена моя работа: «Аналитическое продолженіе потенціала изъ одной граничной области въ другую въ электрическихъ цѣпяхъ». (Извѣстія Электротехническаго Института за 1912 г. С.-Петербургъ).

вѣроятность явленія, согласованная съ частостью его выхода при повтореніи аналогическаго опыта, есть негармоническій потенціалъ *).

Если философская наука когда либо изобрѣтетъ для раскрытія законовъ труда, размноженія и пропитанія человѣческаго рода гармоническій потенціалъ, исчерпывающій вопросъ, то этотъ регуляторъ живознанія долженъ зависѣть, кромѣ многихъ другихъ независимыхъ факторовъ $x_1, x_2, \ldots, x_m$, еще отъ времени t. Законы Мальтуса (см. ч. I, § 11) и Рикардо (см. стр. 337) въ исправленномъ видѣ сдѣлаются слѣдствіемъ этого антропологическаго потенціала W. Потенціалъ этотъ долженъ быть сообразованъ съ «средними принципами» (идеалами). Къ потенціалу W, допускающему, кромѣ необходимости, свободную причинность, присоединятся еще дополнительные или остаточные члены R, коимъ будутъ соотвѣтствовать вспомогательные капиталы S, *резервное общее благо*.

§ 22. Покровительственная и защитная общая система государства въ отношеніи къ переплетающимся частнымъ правамъ подданныхъ. Стилизація соотношенія частныхъ правъ и долженствованій. Лакунарность формальнаго гражданскаго права.

I. Приложеніе къ мелкимъ хозяйствамъ простѣйшаго закона большихъ чиселъ (см. часть II, §§ 15 — 16, и ч. III, § 6) дѣлаетъ достовѣрный шагъ къ развитію индивидуальности и частнаго права собственности при условіи заботы о развитіи мелкихъ и среднихъ крестьянскихъ хозяйствъ по уѣздамъ и областямъ имперіи. Крупныя частныя хозяйства (городскія и сельскія) служатъ частію обложеннымъ резервомъ общаго блага, частію образцомъ (идеаломъ) хозяйственнаго распорядка и познанія.

Эти истины можно примѣнить къ образованію систематическихъ возможностей, фаворизирующихъ выгодѣ частной мелкой народной экономіи, не истощая резервной мощности великаго нераздѣльнаго государственнаго антропологическаго вихря.

Правильно сгущенная экономическая сила, политически собранная къ одному *центру*, образуетъ такую свободу S (сподручную запасную энергію) человѣческой воли, *хозяинъ* которой можетъ ею осмотрительно располагать, цѣлесообразно посылать ея импульсы по телеграфнымъ проводамъ, дорогамъ, шлюзамъ и каналамъ въ работу текущихъ дѣлъ, въ историческій оборотъ, дабы съ достовѣрностью наклонить чашку вѣсовъ

*) Негармоническіе потенціалы встрѣтятся ниже въ разныхъ формахъ, объективныхъ (см. стр. 133, подстр. примѣч.) и субъективныхъ (стр. 333).

Интерполяціонная теорія взаимоотношеній (корреляцій), изложенная въ части III, гл. I, устанавливаетъ антропологическіе негармоническіе потенціалы, относительная достовѣрность коихъ обосновывается общимъ ученіемъ о вѣроятностяхъ суммъ и среднихъ величинъ. Это суть упрощенные *объективные критеріи* познанія и фиксированія эмпирическихъ законовъ человѣческой среды.

исторіи въ желательную для отечества сторону. Въ этой хозяйственной центральной работѣ играетъ роль не стихійное чувство, а ежеминутно разсчитываемый политическій центральный умыселъ. Свобода S есть хозяйственная свобода государства, *центральнаго* «слуги» Отечества.

Съ другой стороны болѣе стихійное понятіе «свобода народнаго хозяйства», соотвѣтствующее *децентрализованному* проявленію массовой хозяйственной дѣятельности въ странѣ (см. мою книгу: «Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности»), можно реализовать какъ космически распыленную запасную творческую потенціальную энергію V населенной земли *), обслуживаемой щитами государства. Этотъ потенціалъ V имѣетъ, какъ аналитическая интерполяціонная координатная формула, извѣстное среднее распредѣленіе по точкамъ земли и по именованнымъ нумерованнымъ лицамъ и опредѣляетъ, своими деривациями **) или частными производными по перемѣннымъ координатамъ, группу силовыхъ скалярныхъ функцій. Свобода V есть провинціальный земскій «слуга» Отечества, условіе народнаго труда и народнаго богатства, «мѣщанскаго счастья», распредѣленнаго по душамъ подданныхъ, несущихъ на себѣ тягость налоговъ и другихъ повинностей.

Потенціалы S и V обусловливаютъ въ порядкѣ взаимострахованія возможность непрерывнаго питанія какъ государственнаго бюджета, такъ и бюджетовъ народнаго хозяйства.

Заступническій государственно-національный синдикализмъ, вышеклассовый, вышепартійный и вышеплеменный (имперскій, съ пропорціональнымъ представительствомъ *вѣрныхъ* племенъ въ *головѣ* полит. тѣла),

*) Если, напримѣръ, взять проблему цѣнъ предметовъ, то подъ V можно разумѣть такой утилитаріанистическій потенціалъ, изъ котораго дифференцированіемъ по разнымъ независимымъ перемѣннымъ выводятся цѣны товаровъ, какъ скалярныя функціи количествъ, представляющихъ запасы товарныхъ массъ, распредѣляемыхъ по рынкамъ (см. мою книгу :«Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты». Также см. *H. Laurent*: Statist. Mathém). Если обратиться къ физическимъ аналогіямъ разсматриваемаго финансово-экономическаго потенціала V и его скалярныхъ координатныхъ деривацій **), то наиболѣе полныя опредѣленія даются, конечно, современными ученіями объ электродинамическомъ потенціалѣ для даннаго «поля», зависящемъ отъ произвольныхъ функцій, отъ граничныхъ значеній потенціала V съ его первыми деривациями, отъ импульсовъ и послѣдовательныхъ аритмологическихъ альтернативъ электровозбудительной силы, отъ поляризацій + и —, отъ индукцій, самоиндукцій и пр. (см. *Galileo Ferraris*: Научныя основанія электротехники. Переводъ Ѳ. Шкляревскаго, подъ редакціей проф. Н. А. Артемьева. Кіевъ. 1904).

Это ученіе нужно, конечно, распространить по способамъ Коши, Софуса Ли, Гурса и другихъ на системы и проективныя графическія пространства со многими степенями свободы или со многими координатными измѣреніями. Силовыхъ и геометрически распредѣлительныхъ проблемъ существуетъ много; а потому и потенціалъ V можетъ имѣть различный смыслъ, координирующій стихійныя явленія.

**) Терминъ «деривація» происходитъ отъ слова «dériver»—производить.

поднятый на высоту въ мѣру необходимаго всѣмъ торжества правосудія, долженъ стремиться регулировать теченія и одерживать побѣды надъ всѣми явными и тайными синдикалистами (см. § 20_2), не подавляя частной собственности и полезной общественной самодѣятельности.

При этомъ условіи централизованная свобода S, съ ея децентрализующими радіусами, наукообротами и правообротами, 1° свяжется съ свободою V и 2° обслужитъ сверху всѣхъ; подобно тому какъ потенціальная энергія солнца сообщается всѣмъ живущимъ, добрымъ и даже злымъ въ своей озабоченности о пропитаніи съ потомствомъ.

Вышеуказанный, умышленно централизованный запасъ матеріальныхъ источниковъ свободы, какъ потенціальной энергіи S, всегда долженъ съ избыткомъ заготовляться (налогомъ и натуральными повинностями) у политически хозяйствующей верховной власти, имѣющей въ силу своего верховнаго единодержавнаго права, еще и нравственный долгъ центрально и сверху уравновѣшивать спеціальныя, шлюзированныя въ своихъ берегахъ теченія и обороты и вести весь государственный корабль среди бурь и рифовъ съ *абсолютною достовѣрностью* счастливыхъ переходовъ.

II. Этотъ *абсолютизмъ* необходимъ государству и всѣмъ его подданнымъ. Можно спорить лишь по вопросу, какой видъ абсолютизма болѣе надежный и доброкачественный. Но и тутъ для изучившаго структуру законовъ массовыхъ проявленій человѣческой дѣятельности не остается сомнѣнія въ томъ, что доброкачественный надежный абсолютизмъ есть *цѣломудренно-просвѣтительный абсолютизмъ* *), неуклонно пробивающій себѣ дорогу въ исторіи; онъ, *оцѣнивая власть идей и ученій*, выдвигаетъ

*) Терминъ «просвѣтительный абсолютизмъ» соотвѣтствуетъ слѣдующей исторической справкѣ.

Въ новые вѣка исторіи Петръ Великій первый открылъ и закономъ укрѣпилъ истинное значеніе государства какъ *школы* жизни для *народа*, теоретической и практической, въ которой всѣ учатся гражданскимъ обязанностямъ и гражданской дѣятельности (см. *С. Соловьевъ*: Исторія Россіи. Томъ XVIII, стр. 251) и въ которой самодержавный монархъ съ своими сотрудниками первый „слуга“ Отечества **) и учитель своего народа (по Пушкину, «на тронѣ вѣчный работникъ»), поставленный судьбами исторіи превыше всякаго раздѣленія производныхъ властей и всякаго раздѣленія сословій и экономическихъ корпорацій, дабы сверху соединять и справедливо уравновѣшивать всѣхъ и свѣтить имъ. Побѣды Петра Великаго оправдали его идею на дѣлѣ.

Позднѣе эта идея была крѣпко воспринята Пруссіей и ея Фридрихомъ Великимъ и тамъ окрещена названіемъ просвѣтительнаго абсолютизма. Система германскаго просвѣщенія и объединенія доведена до современнаго положенія именно съ помощію послѣдовательнаго примѣненія идеи просвѣтительнаго абсолютизма, германскій основатель котораго оказался предусмотрительнѣе своихъ сосѣдей.

**) Относительно реформъ Петра Великаго нужна извѣстная оговорка: реформы эти шагнули дальше цѣли нормативнаго государства АБВ въ отношеніи церковнаго управленія и сверхъ того не были хорошо довершены его преемниками, поставившими центръ Россіи въ зависимость отъ иноземныхъ вожделѣній.

принципъ Б (см. § 19_2 пунктъ III), утверждающій, что *государство есть школа для народа*; онъ есть другъ изслѣдованія и правильнаго вывода народа на путь спасенія и развитія. Этотъ принципъ долженъ присоединяться къ принципамъ А и В (по формулѣ нормативнаго государства). Однако-же тормазомъ этому соединенію явились «физическія» формулы конституціи и столкнувшіеся другъ съ другомъ: идея бюрократическаго государства и идея революціоннаго радикализма.

Монтескьё, извѣстный основатель французскаго либерализма, въ своемъ нецѣломудренномъ «Духѣ Законовъ», первый повелъ французское мышленіе по пути бюрократическаго государства B (см. § 19_2, пунктъ III), дѣлающаго стихіи А и Б лишь слѣпымъ орудіемъ, а не душою для львиной стихіи В. Онъ, вслѣдъ за Локкомъ, проповѣдывалъ либеральную идею изощренія стихіи В; для чего выдвинутъ былъ принципъ раздѣленія этой стихіи въ ея средоточіи (т. е. въ политическомъ центрѣ государства) на три власти: законодательную, исполнительную и международную (по Локку) или судебную (по современному);—раздѣленія фатальнаго, съигравшаго не въ руку либерализма, а въ руку протестующаго радикализма *), пропагандированнаго въ «Общественномъ Договорѣ» Руссо, выдвинувшаго въ сущности звѣроподобный абсолютизмъ толпы. Дѣйствіе оказалось равно противодѣйствію, какъ въ физикѣ или въ законѣ: «*око за око*». И либеральный бюрократизмъ, и революціонный радикализмъ, смѣнявшіе другъ друга въ управленіи Франціей, какъ два враждебныхъ лагеря, имѣли роковое послѣдствіе для значенія этой страны на вѣсахъ исторіи.

Раздѣленіе центральныхъ властей, какъ спеціализація функцій по извѣстнымъ радіусамъ и въ извѣстныхъ берегахъ, конечно является необходимымъ способомъ изощренія властительнаго ремесла; но это, приспособляемое къ работѣ, раздѣленіе не должно вынимать *душу* АБ изъ львиной стихіи В, превращая ее въ звѣроподобное созвѣздіе. Анархическое въ стилѣ Наполеона I раздѣленіе властей всегда либо оказывается фиктивнымъ, какъ въ договорѣ Льва съ звѣрями, либо вызываетъ возстаніе звѣрей и дажеословъ противъ Льва. Мудрое раздѣленіе властей должно беречь въ центрѣ организма узелъ цѣломудрія и гармоничности. Этому узлу и соотвѣтствуетъ центральная идея нормативнаго государства $\triangle ABB$, долженствующаго по внутреннему смыслу цѣломудренно-просвѣтительнаго абсолютизма, возбуждать къ себѣ полную вѣру порядочнаго народа извѣстными всесторонними священными залогами, палладіумами побѣдъ.

III. Обращаемся къ § 20_1 и къ разсмотрѣнному тамъ ряду (I) интерваловъ $(\tau,\ \tau + \delta\tau)$ времени, съ текущимъ дѣйствіемъ E_τ, развивающимъ плодъ Φ. Кромѣ смѣтнаго графическаго исчисленія (для предстоящаго не-

*) *В. И. Герье*: Идея народовластія и французская революція 1789 года. Москва. 1904. стр. 375.

ограниченнаго ряда испытаній въ исторіи), необходимы еще *управленіе* рядами текущаго дѣйствія *и эмпирическая варіація* (переучетъ) *вѣроятности во время самаго хода дѣйствія* («caveant consules!»), производя *синтезъ* апріорнаго (смѣтнаго) воззрѣнія съ развертывающимися фактами и показаніями;—синтезъ, не лишенный *свободы*, какъ правомочія на *выборъ* дѣйствія или противодѣйствія *по внезапнымъ обстоятельствамъ момента*. Эта свобода импульса составляетъ необходимое *право правительственной власти* *), *какъ кормчаго «слуги»*, ведущаго государственный корабль среди бурь и рифовъ къ плодамъ, къ цѣлямъ общаго блага.

Соотвѣтствующее варіаціонное исчисленіе (переучетъ) вѣроятностей и матеріальныхъ ожиданій устанавливается по формуляру записи фактовъ и на теоремѣ Байе.

Соотвѣтствующая же статистическая работа при этомъ получаетъ наибольшее напряженіе и развитіе, собирая точными записями жатву фактическихъ достовѣрностей (очевидностей на дѣлѣ, на опытѣ), укрѣпляя коеффиціентами и показателями какъ слѣдуетъ довѣріе, сомнѣніе и отрицаніе и котируя вѣроятности, съ своей точки зрѣнія, на будущее время. Научная статистика есть тотъ историческій цензоръ генезиса и оборота и тотъ подлинно честный маклеръ, который на міровой сценѣ оцѣниваетъ когда слѣдуетъ не только біологическій и экономическій тиражъ, но и людскую коллективную психологію, обнаруживающую себя, свой внутренній міръ, выступами (проявленіями) въ историческихъ оборотахъ.

IV. Гражданскій правооборотъ дѣйствуетъ въ *частныхъ* вещныхъ имущественныхъ оборотахъ, разглядывая явленія уже не съ высоты поднебеснаго полета общеполитической точки зрѣнія (см. § 6_3), а въ *ближнемъ* разстояніи, видя документы и лица, отличая эллина отъ іудея, Ивана отъ Петра, мужескій полъ отъ женскаго, классъ отъ класса и пр., и наблюдая у каждаго его жилище, имя и отмежеванную идіограмму, неприкосновенное собственное *личное* право («habeas corpus» act). *Право* лица A есть *долгъ* совокупности лицъ B, C, D,..., а *долгъ* лица A есть *право* совокупности лицъ B, C, D,...

Тутъ играетъ роль именное обывательское *идіографическое* символическое мышленіе **), укрѣпляющее право на основаніи закона *по лицевымъ счетамъ каждой души*, по отдѣльнымъ «точкамъ» и повторяемымъ «разамъ» явленія. Съ глазъ близкаго суда тутъ спадаетъ туманъ общеполитической картины; вещи берутся въ натуральную величину.

Эта именная дифференціація есть основное понятіе въ частномъ гражданскомъ правѣ, представляющемъ: 1) антитезисъ государственному соціализму, анархически опрокидывающему частное право, и 2) антитезисъ частной анархіи, когда личность не признаетъ надъ собой власти и закона, связывающаго ея субъективное усмотрѣніе и произволъ.

*) Положеніе Верховной власти, стоящей надъ кормчимъ и оцѣнивающей его работу, опредѣлено для нормативнаго государства выше (§ 19_2, пунктъ III).

**) Терминъ „идіографическое мышленіе“ истолкованъ и широко примѣненъ къ статистикѣ въ книгѣ *А. А. Чупрова*: „Очеркъ по теоріи статистики“. С.-Петерб. 1910.

Къ антиномiямъ (противоположеніямъ) теоретическихъ (спорныхъ и вѣроятностныхъ) концепцій («да»—«нѣтъ» и пр.), присоединяются *лицевыя* антиноміи, противоположенія въ интересѣ субъектовъ. Это—гегельянская антиномія между «я» и «не—я», между корпоративными «мы» и «не—мы». Развитіе корысти субъектовъ развиваетъ въ ихъ средѣ словесную и физическую драку и историческую трагедію. Скалы закона и наблюденіе вносятъ въ общежитіе и въ коллизію эгоизмовъ здравое соревнованіе и духовную и матеріальную меліорацію.

Закономъ, управленіемъ и примирительными судебными учрежденіями совершается стилизація заостренныхъ шероховатостей соотношенія между спорящими людьми, диктующая нежестокое рѣшеніе спорныхъ вопросовъ.

Въ институтахъ римскаго и древняго русскаго права достовѣрность, напримѣръ, экономическаго оборота укрѣплялась угрозою тюрьмы и рабства неисправнымъ должникамъ. Нынѣ нравы не тѣ: законъ, при всей суровости его противъ неисправныхъ дебиторовъ, не прибѣгаетъ къ жестокостямъ.

Нынѣ на мѣсто помянутаго института выдвинуты болѣе гуманныя мѣры, дѣлающія оборотъ гадательнымъ, имѣющимъ извѣстныя вѣроятности. Вмѣсто жестокихъ мѣръ предоставляется выбирать по тарифамъ пени въ видѣ легкаго процента, учитываемаго съ достовѣрностью по законамъ среднихъ величинъ и взимаемаго притомъ со всей среды, куда распыляется кредитъ. Прямые же виновники неисправности, изъ-за которыхъ возникаетъ въ экономическомъ оборотѣ эта процентная пеня, не всегда фактически несутъ тягость этого штрафа. Репрессія противъ нихъ, когда слѣдуетъ, или наоборотъ прощеніе долга должны падать со всѣми послѣдствіями отчасти на саму общественную среду, ими эксплоатируемую,—на общественныя сбереженія. Мѣру пени можно варьировать; но плодотворность варіаціи нужно испытывать по методу § 20_1.

Въ инстанціяхъ вещнаго правооборота мѣстное провинціальное общественное право является необходимою параллелью съ правомъ государственнымъ. Этому порядку соотвѣтствуютъ двѣ части гражданскаго кодекса: общая и собственно гражданская.

Инстанціи строятся по каждой отрасли насущныхъ интересовъ.

Трудно сказать какія крайнія инстанціи важнѣе, высшія или низшія въ ихъ совокупности. Такъ же точно трудно сказать, что важнѣе, лѣсъ или деревья: различіе въ точкахъ зрѣнія: 1) общей и 2) множества частныхъ. Можно изъ-за лѣса не видѣть деревьевъ, и изъ-за деревьевъ не видѣть лѣса.

Нисхожденіе инстанцій считается въ мѣру приближенія ихъ функціи къ «точкамъ» (мелкимъ частностямъ) обсуждаемаго массивнаго конкретнаго сложнаго явленія, историческаго и топографическаго. А вверхъ инстанціи считаются по степени обобщенія понятій и отдаленія отъ помянутыхъ мелкихъ частностей конкрета.

Промежуточныя же инстанціи (между крайнею высшею и крайними низшими инстанціями) ситуируются рѣже, а именно пунктируются въ гуще населенныхъ центрахъ территоріи, гдѣ концентрируется уже массовая запись человѣческой дѣятельности. Связь по инстанціямъ, нити которой создаются циркуляціями движимыхъ цѣнныхъ обозначеній, просвѣщающими корреспонденціями (включая сюда публицистику) и личными циркуляціями (делегаціями, агентурами и пр.), устанавливаетъ и пути движимыхъ матеріальныхъ цѣнностей въ порядкахъ: 1) отъ общаго къ частному, 2) отъ частнаго къ общему и 3) отъ частнаго къ частному.

V. Власть (авторитетъ) идей и ученій стилизующаго гражданскаго закона, опредѣляющаго и уравновѣшивающаго матеріальныя права и повинности лицъ, распространяется на всѣхъ подчиненныхъ ему гражданъ. Граждане *равны передъ гражданскимъ закономъ*. Но самое понятіе этого равенства укладывается различно (идіотично) въ разныхъ государствахъ и различно формулируется философами права.

«Упрощенная» радикальная формулировка равенства, опасная въ ея идеологической опрощенности, трактуетъ среду подчиненныхъ закону гражданъ такъ, какъ «изотропную» *) среду сталкивающихся атомовъ, а не какъ окачествованную «кристаллическую» среду, дифференцированную въ ея разнотипныхъ индивидуальностяхъ. Опрощенцы готовы трактовать гражданъ, какъ совокупность или стадо молекулъ, рожденіемъ выбрасываемыхъ въ общую территоріальную философичную урну, какъ фиктивныя государства Платона, Руссо и пр., и перемѣшиваемыхъ тамъ до полнаго индивидуальнаго безразличія экземпляровъ. Такое государство совпадаетъ съ царствомъ 1^0 внутренняго софиста (см. § 19_2, пунктъ I). Соціальная опрощенская программа не можетъ удовлетворить запросамъ многогранной сложной природы человѣка, которая скорѣе вступитъ въ ратоборство, чѣмъ подчинится грубой опрощенской политической идеологіи.

Классификація элементовъ среды лицъ, подвластной закону, генетическая, этическая и политико-экономическая, приспособляемая къ природѣ вещей, къ содержащемуся въ ней раздѣленію труда и функцій, есть основной

*) Термины: «изотропая» среда и «кристаллическая» среда беру у физиковъ, какъ аналогическія обсуждаемому вопросу изъ области общественныхъ наукъ. Изотропная среда одинакова во всѣхъ направленіяхъ, и лучевыя волны въ ней передаются одинаково во всѣ стороны; кристаллическая среда волнуется иначе и поляризуетъ свѣтъ.

принципъ, входящій въ соотношеніе понятія равенства всѣхъ гражданъ передъ закономъ и обусловливающій собою здравую нормальную (не утопическую) структуру гражданскаго кодекса. Государство, какъ конкретная территоріальная и историческая урна, должно приспособлять формулы своего законодательства къ мысли, что содержимое въ урнѣ тѣло есть въ его упругихъ элементахъ какъ бы кристаллъ органической соціальной химіи, элементы коего различны, одушевлены различнымъ «химическимъ» сродствомъ и отталкиваніемъ и должны быть уравновѣшены этически, психологически, физіологически, электродинамически, графологически (логически) и юридически.

Уже средневѣковая исторія представляетъ намъ въ государственныхъ тѣлахъ примѣры замѣчательныхъ кристалловъ, въ которыхъ дифференціація правовыхъ лицъ вылилась въ формы сословій, корпорацій, цѣховъ и пр. Эта форма устарѣла не по существу дѣла, а по причинѣ успѣховъ техники и вслѣдствіе увеличенія плотности населенія въ отдѣльныхъ территоріальныхъ урнахъ (государствахъ). Нынѣ дифференціація на почвѣ раздѣленія труда даже возрастаетъ; задача закона—это правомѣріемъ, наукооборотомъ и трудооборотомъ уравновѣсить соотношеніе группъ такъ, чтобы жизненные интересы одного класса гражданъ не приносились въ жертву интересамъ гражданъ другого класса, чтобы ни въ одномъ классѣ не было невинно обездоленныхъ преступленіемъ и слѣпою игрою случая, чтобы не было не только рабовъ по римской формулѣ и по земельно-феодальной формулѣ среднихъ вѣковъ, но и новыхъ рабовъ, являющихся слѣдствіемъ финансово-экономической кабалы.

VI. Интересъ жизни и правопорядокъ развиваются не въ уединеніи того или другого «я», а въ средѣ субъектовъ, въ которой однако же параллельно съ закономѣрными пертурбаціями поселяются пертурбаціи незакономѣрныя, несовмѣстимыя съ формулою и духомъ законовъ, направленныхъ своими скалами ко благу.

Въ этическо-правовомъ государствѣ всѣ безъ исключенія граждане отъ мала до велика должны быть проникнуты принципомъ безусловнаго почитанія гражданскаго закона. Всѣ должны безпрекословно подчиняться распубликованному въ надлежащемъ порядкѣ закону, хотя бы онъ показался тѣмъ, кто призванъ его исполнять, самымъ нецѣлесообразнымъ, невыгоднымъ и неблагоразумнымъ. Для нихъ именно и говориться «lex dura, sed lex!». Тогда возможны будутъ *изслѣдованія* и на немъ основанныя меліораціи, духовныя и матеріальныя, развиваемыя впредь по опыту прежнихъ лѣтъ. Иначе же и факты будутъ окружены такимъ кольцомъ софизмовъ и извращеній, что они перестанутъ быть уроками, поучительными на будущее время и способными исключать заблужденія.

Легальныя пертурбаціи, входящія въ гражданскій оборотъ и неустра-

нимыя въ силу вышеуказанныхъ вѣчныхъ антиномій, могутъ закулисною интригою извращаться въ нелегальныя пертурбаціи, учитываемые какъ ошибки противъ закона, проступки и преступленія.

Требуемая закономъ несовмѣстимость закулисною интригою можетъ извращаться въ незакономѣрное совмѣстительство, преступное, напримѣръ, противъ служебнаго долга; либо можетъ извращаться въ закулисную стачку вмѣсто честной конкурренціи по списку одинъ на одинъ между многими на торгу и въ другихъ видахъ состязанія. Наоборотъ, законная совмѣстимость можетъ закулисною интригою извращаться въ проступокъ или преступленіе противъ общественнаго права, семейнаго союза, государства и другихъ видовъ кондомніума и кооперації, — въ возбужденіе разлада, раздѣленія и междуусобія. Интрига можетъ быть направлена противъ законной зависимости во имя независимости и противъ законной независимости во имя зависимости. Зачатыя въ умыслѣ и закулисномъ уговорѣ проступки и преступленія дѣлаются потомъ фактами, улавливаемыми судомъ и учитываемыми статистикою нравовъ.

Скалы «законовъ погрѣшностей» въ крайнихъ своихъ частяхъ, гдѣ вина не возмѣстима гражданскою пеней, переходятъ въ скалы уголовнаго закона, направленнаго своими обезвреживаніями и скорпіонами противъ преступленій, какъ опасной общественной язвы и духовнаго вырожденія.

Въ борьбѣ съ преступленіями на почвѣ неудовлетворенія первыхъ матеріальныхъ нуждъ человѣка положительныя мѣры — это улучшеніе путей труда и трудоваго обезпеченія, соотвѣтствующее народное образованіе и филантропія по отношенію къ нетрудоспособнымъ по естественнымъ основаніямъ, какъ болѣзнь, старость, младенчество.

Но явленіе сгущенной преступности безъ насилія и съ квалифицированнымъ насиліемъ, есть уже преступная общественная техника (кагалъ, «союзъ» преступности); противъ такого систематическаго явленія требуется политическая и уголовная репрессія скорпіонами, достаточными для совершеннаго разгона подобныхъ соединеній.

Раціональная лѣстница дисциплинирующихъ, выдерживающихъ и обезвреживающихъ наказаній, соотвѣтствующая извѣстнымъ статьямъ закона и статистическаго учета преступленій и раскрытыхъ виновниковъ преступленій, составляетъ необходимый элементъ уголовнаго законодательства, тюремнаго бюджета и уголовной политики, помогающей культурному обществу, порядковому народу, правильно держать щитъ закона и лицомъ къ лицу бороться съ хищными наклонностями, гнѣздящимися въ извращенныхъ человѣческихъ страстяхъ.

Въ этой борьбѣ необходимы столько же неволокитность (скорость) и твердость, сколько и осмотрительность, обязательная въ судебныхъ учрежденіяхъ для сведенія числа *судебныхъ ошибокъ*, карающихъ невиновную личность за чужое преступленіе, по возможности, къ нулю.

Существенное отличіе спиритуалистическаго направленія въ рѣшеніи реальныхъ задачъ заключается, между прочимъ, въ принципѣ, утверждающемъ, что внѣшній формальный законъ, въ виду множества діалектическихъ изъяновъ, представляетъ для массивнаго народнаго тѣла такую лакунарную, дырявую бумажную тогу, бутафорски защитную отъ погрѣшностей и смертельныхъ ошибокъ, которая, будучи существенно необходима для гражданскихъ задачъ права, совершенно недостаточна для вполнѣ удовлетворительной защиты; что и дѣлаетъ необходимымъ въ нормативномъ государствѣ по всѣмъ вопросамъ, кромѣ этого щита и меча правосудія, составляющихъ право стихіи В, еще примѣнять судъ просвѣщенной совѣсти и другіе щиты вѣры и науки, хранимые духовнымъ авторитетомъ представительныхъ службъ А и Б (см. § 19 пунктъ III), прививающимъ этническому тѣлу нравственныя начала стойкости, патріотическую любовь, научное образованіе, трудолюбіе и самодѣятельное, въ ходѣ обстоятельствъ, укрѣпленіе непрочнаго положенія, непредусматриваемое внѣшнимъ закономъ.

Съ одной стороны, *лакунарность внѣшняго формальнаго закона вызываетъ тяжелыя мѣры запасныхъ гарантій, апріорныхъ (страховыхъ) обложеній, судебныхъ скорпіоновъ за преступленія и пр., съ другой она же дѣлаетъ необходимостью Правду и Милость сверхъ формальнаго права.* Поэтому, напримѣръ, въ прерогативу верховной власти входитъ и должно входить право помилованія кажущихся тяжкихъ преступниковъ, караемыхъ формальнымъ закономъ, но въ существѣ жертвъ хитросплетенія и даже совершенно невинныхъ жертвъ формализма и народнаго вотума; жертвъ подобныхъ Сократу и даже самому Богочеловѣку, осужденному на зарѣ христіанской эры.

Въ короткомъ очеркѣ трудно перечислить всѣ скалы меліораціи, духовной и матеріальной, — скалы графическаго пространства, наполняемаго какъ ученіями представительныхъ службъ А и Б, такъ и статьями повелительныхъ, надлежаще распубликованныхъ гражданскихъ узаконеній съ Высочайшею подписью: «быть по сему». Скажемъ только, что меліорація можетъ совершаться въ сферѣ выработки формулъ и мѣръ закона и отбора представительствъ для представительной «головы» политическаго тѣла, въ сферѣ народнаго просвѣщенія, облагороженія общественныхъ нравовъ и взглядовъ, въ сферѣ раціональной филантропіи, въ сферѣ правосудія, защищающаго обездоленныхъ.

Право обездоленныхъ коллизіями въ игрѣ случайности возмѣщается, по надежнымъ скаламъ закона, за счетъ обездоливающихъ и за счетъ общихъ налоговъ и резервовъ правооборота.

§ 23$_1$. Статистическія концентраціи. Дѣятельность статистическаго корпуса и публикація его рисунковъ, таблицъ и руководствъ.

Статистическое изслѣдованіе есть мѣстная функція, которая исполняетъ свою роль вблизи конкрета, наблюдая явленія in statu nascendi; поэтому статистическая функція по возможности распространяется на всѣ точки причинно связанныхъ дѣлъ населенія въ территоріи государства.

Статистическія же высшія инстанціи или концентраціи устраиваются въ областныхъ административныхъ центрахъ страны, а главная концентрація помѣщается въ административномъ центрѣ всего государства. Статистическія публикаціи рисунковъ, таблицъ и руководствъ дѣлаются по сводкѣ и обработкѣ матеріаловъ въ центрахъ.

Страны однако не выработали одинаковаго плана обширной организаціи статистическаго дѣла, какъ это видно, напримѣръ, изъ статьи *А. В. Погожева:* «Очеркъ организаціи статистическихъ учрежденій въ иностранныхъ государствахъ» (Извѣстія Имп. Русск. Геогр. Общества, т. XLVI. 1910 г. Вып. I). Да и быть не можетъ совершеннаго однообразія статистической организаціи у различныхъ странъ; ибо каждая страна имѣетъ свое лицо, свою независимую свободу воли и форму правленія, свои промышленныя задачи, свои грѣхи и свое соперничество съ прочими странами на всемірной аренѣ.

Статистическія учрежденія всѣхъ центральныхъ вѣдомствъ, дѣлая сводки матеріаловъ, доставляемыхъ мѣстными учрежденіями, издаютъ увѣсистые томы своихъ ежегодниковъ, наполненные сырыми цыфрами, которыя нужно еще перерабатывать такъ, чтобы колонны цыфръ получили краснорѣчіе убѣдительной таблицы и подавали хорошій совѣтъ государству, его законодательнымъ и политико-экономическимъ учрежденіямъ и всѣмъ гражданамъ. Нужно, чтобы между разными цыфровыми колоннами, соотвѣтствующими разнымъ скрещивающимся массовымъ явленіямъ, были установлены вѣрныя ассоціаціи, функціональныя соотношенія, коэффиціенты ± сродства (см. часть III, гл. I—III) или утонченной (идейной) связи, которые открываются между всѣми частями многоединой организованной вихреатомной дѣятельности страны.

Этой цѣли еще далеко не соотвѣтствуютъ существующія схемы собиранія и обработки статистическихъ матеріаловъ, усвоенныя практиками, не выведшими этого дѣла изъ низшей фазы его развитія, громоздящей матеріалы въ цифровыя колонны, плохо согласованныя другъ съ другомъ и съ модулированіемъ взглядовъ на будущее. Управленіе людьми при этомъ поневолѣ совершается въ недостаточномъ освѣщеніи.

Инстанціи статистической работы соотвѣтствуютъ вышеупомянутымъ инстанціямъ управленія и стилизированія человѣческихъ взаимоотношеній. Самостоятельный корпусъ статистиковъ, являясь ядромъ своей развѣдочной функціи, совершенствуетъ эту функцію; желательно довести ее до высшихъ степеней приложенія *точнаго графическаго изслѣдованія* и демонстрированія продуктовъ его работы, прилагаемой къ познанію свѣтотѣней, озареній и движеній отечества—государства въ его массовыхъ проявленіяхъ.

Дѣятельность корпуса статистиковъ, топографическая и историческая, въ конечной стадіи направляемая на изданіе статистическихъ руководящихъ таблицъ, діаграммъ, картограммъ и стереограммъ, троякаго рода: 1) собираніе идіографическаго матеріала, 2) превращеніе этого матеріала въ номографическій оригиналъ и 3) изготовленіе съ этого оригинала *клише* для печатанія символическаго номографическаго матеріала, выпукаемаго въ публичное обращеніе и въ учрежденія всѣхъ вѣдомствъ.

§ 23$_2$. Значеніе просвѣтительныхъ графическихъ символовъ (вѣхъ), дѣйствующихъ на предразсужденія, укрѣпляющихъ чувство довѣрія и исключающихъ чащу (трущобу) заблужденій. Какъ побѣждаетъ школьный учитель. Оцѣнка и отборъ потребляемыхъ въ дѣлѣ людей.

I. Символическій номографическій матеріалъ, выпущенный въ свѣтъ, въ публику, является усовершенствованнымъ просвѣтительнымъ средствомъ для всѣхъ отъ мала до велика, кто можетъ понимать, читать и истолковывать этотъ матеріалъ, слѣдуя математическому синтаксису. Это средство руководитъ *предразсужденіями*, оздоровительно символизуя вѣроятія и правдоподобія, и помогаетъ укрѣплять оправдывающееся довѣріе и выбираться изъ трущобы заблужденій.

Если возможности заблужденія считать арміей враговъ, коихъ надо убивать, то вышепомянутое просвѣтительное средство, исключающее чащу заблужденій, можно сравнить съ пулеметомъ; тогда какъ устарѣвшая дедуктивная и индуктивная логика, также задающаяся цѣлью убивать по возможности заблужденія, работаетъ древнимъ лукомъ съ колчаномъ стрѣлъ, хотя и ядовитыхъ, но выводящихъ изъ строя мало не пріятелей.

Графическіе просвѣтительные оздоровительные символы (вѣхи), сближенныеиспытаніемъ и наблюденіемъ съ конкретными фактами и сближенные, съ другой стороны, съ общими запросами жизни и ея идеалами, являются могущественнымъ средствомъ административной, судебной и законодательной техники, промышленной техники и порядочной публицистики, освѣдомляющей гражданъ своими правдивыми сообщеніями. Дѣйствуя на чувство довѣрія (на зеркало души, на воззрительное или интуитивное мышленіе), просвѣтительные символы возбуждаютъ символическое

мышленіе, сближенное съ дѣйствительностью, если предлагаемыя символическія номограммы являются достаточно свѣжимъ слѣпкомъ съ остова дѣйствительности, свидѣтельствующимъ о ней правдиво, не скрывая ни опасныхъ, ни благопріятствующихъ возможностей, способныхъ осуществляться, возраждаться или повторяться.

Важно научить читать эти символы и мыслить ими уже въ юношескомъ возрастѣ. Обученіе этому искусству составляетъ обязанность точной графической школы, представляемой пока только военными и реальными училищами, училищами топографовъ, мореходными и коммерческими училищами и пр.; каковая школа, основанная въ Россіи еще Петромъ Великимъ и дополняющая литературную (классическую) школу, владѣетъ многими методами изслѣдованія, положеніями и нетлѣнными достовѣрностями. Эти методы должны бы быть возведены не только философскою наукою, но и школьною реформою въ достоинство общихъ образовательныхъ принциповъ, необходимыхъ для выведенія нашего отечества къ свѣту или побѣдамъ надъ изнурительными заблужденіями *).

Въ простѣйшихъ случаяхъ просвѣтительныя вѣхи (символы) могутъ изготовлять, съ помощью сырого статистическаго матеріала, даже сами ученики подъ руководствомъ наставниковъ. А для дѣтей младшаго возраста матеріалы чтенія изготовляются и издаются въ видѣ учебныхъ пособій искусными педагогами, въ связи съ отечественной исторіей, географіей и пр. Получаются такимъ образомъ въ учебной литературѣ содержательные миніатюры и геніальные штрихи Божьей природы, тріангуляціи и вѣхи родной дѣйствительности, истолковываемые учителемъ и легко понимаемые дѣтьми, ибо имъ вообще врождены глазомѣръ и способность воспріятія не только частностей, но и общаго. Поэтому-то эти представленія, какъ пробудители понятій, схватываются дѣтьми уже въ раннемъ возрастѣ, пріобщая народную школу къ довольно высокимъ «матеріямъ» связной мысли, научнаго знанія и символическаго мышленія.

Германская народная школа это именно и дѣлаетъ, благодаря ея просвѣщенному корпусу народныхъ учителей. Одно время вошла въ моду метафора о «побѣдахъ германскаго школьнаго учителя», т. е. о побѣдахъ германскаго генія и германскаго оружія на различныхъ аренахъ мірового состязанія благодаря нѣмецкому учительству **), научившему читать и примѣнять къ дѣлу символы и номограммы, связанные съ историческими

*) См. наши статьи: 1) „Точная графическая школа, литературная школа и законченная профессіональная школа“ (С.-Петербургскія Вѣдомости, 1911 г., № 62), 2) „Основы общественныхъ и естественныхъ наукъ въ средней школѣ“. (С.-Петерб., 1906).

**) *И. И. Янжулъ*: Очерки по вопросамъ народнаго образованія. (См. сборникъ: „Между дѣломъ“. (С.-Петерб. 1904).

и геодезическими тріангуляціями, оборотами, интересами и обороною своего отечества *).

Номограммы, выведенныя изъ оборотовъ нѣмецкаго отечества и передающія наглядно, безъ болтливой разжиженности, компактную, спрессованную въ «золотые слитки» идею нѣмецкаго отечества съ его отростками, сплачиваетъ нѣмецкія молекулы такъ, что нѣмецкое національное неслитное тѣло является въ извѣстныхъ случаяхъ какъ бы нераздѣльною сложною единицою—монадою.

Планъ нѣмецкаго просвѣщенія неразрывно связанъ съ идеей просвѣтительнаго абсолютизма, о которомъ мы выше уже говорили.

Повторимъ, что истинная свобода народовъ и государствъ не мыслима: 1) безъ цѣломудренно-просвѣтительныхъ (на творчество) точныхъ (единообразныхъ, честныхъ, недвусмысленныхъ по тенденціи) научныхъ символизацій, выводящихъ изъ трущобы заблужденій, и 2) *безъ умѣнья народной массы читать и понимать эти символы.* Ибо именно заблужденія и принципіальныя ошибки являются врагами свободы короны и народа («познайте истину—и она сдѣлаетъ васъ свободными»).

Этотъ принципъ и побуждаетъ доброжелательныхъ вождей народа трактовать и самыя государства какъ школы жизни для народовъ. Недоброжелатели же ставятъ свою ставку на карту, которая благопріятствуетъ распространенію заблужденій, и, пользуясь мутною водою, выигрываютъ партію.

II. Оцѣнка (аттестація), даваемая ученикамъ школами въ собственномъ (неметафорическомъ) смыслѣ, помогаетъ лишь первой жатвѣ, дѣлающей культурный отборъ людей на дѣла жизни. Школа жизни потомъ не разъ переучитываетъ эту оцѣнку лицъ, по мѣрѣ развертыванія ихъ идіограммъ въ дѣятельности, въ жизненной ихъ карьерѣ. Послѣдняя оцѣнка дѣлается заднимъ числомъ, по смерти, по выходѣ лица въ жизненный тиражъ; и эта оцѣнка въ глазахъ историческаго статистическаго мышленія имѣетъ свое важное значеніе, характеризующее какъ среду, такъ ея выдающихся лицъ, которые выдвигались въ авангардъ, ведя за собою арьергардъ исторіи.

Возникаетъ общій вопросъ оцѣнки и отбора лицъ для службы на высшихъ ступеняхъ: насколько выслуга лѣтъ на извѣстномъ мѣстѣ даетъ право двинуться человѣку по ступенькамъ впередъ къ высшимъ должностямъ, и на какой ступенькѣ такой пріоритетъ времени выслуги теряетъ свою силу?

Тамъ, гдѣ функція учрежденія зависитъ отъ изощренности лица, отъ умѣнья его показать иниціативу и держать камертонъ въ своихъ рукахъ,—тамъ мѣсто есть принадлежность достойнѣйшаго по трудамъ и по испы-

*) Укажемъ напримѣръ, на слѣдующій учебникъ для высшихъ народныхъ школъ по географіи. „Kulturgeographie. Stoffe für den kulturgeohraphischen Unterricht im letzten Schuljahre innerhalb gehobener Schulen“. Bearbeitet von Robert Gleisberg, Lehrer in Leipzig. 1902.

танію, а не старѣйшаго. Оцѣнку же достоинства трудовъ дѣлаютъ не профаны и не число голосовъ профановъ, хотя бы оно было очень велико, а голоса свѣдующихъ прежде испытанныхъ людей.

Лишь при этомъ пробномъ камнѣ отборъ лицъ на дѣла будетъ поднимать и самыя дѣла Отечества, образуя авангардъ, пробивающій пути арьергарду. Въ странѣ, гдѣ люди не умѣло цѣнятся по достоинству, верхи падаютъ на низы, звѣзды падаютъ съ неба. Историческая Немезида здѣсь караетъ и правыхъ и виноватыхъ безъ разбора и суда.

§ 23_3. Цѣнные знаки—фетиши и «внутренній софистъ», какъ источники эпидемическихъ заблужденій, главныхъ и второстепенныхъ Достоинство философскихъ системъ, восходящихъ къ Декарту. Самосознаніе и самобытность въ нормативномъ государствѣ △ АБВ.

I. Идеи умственно *властвуютъ* надъ людьми; однѣ изъ идей являются *истинными* ученіями и вѣрованіями, другія *заблужденіями*.

Источниками заблужденій, матеріальныхъ и интеллектуальныхъ, являются: а) рыночные цѣнные знаки — фетиши, обладающія валютой относительно матеріальныхъ благъ и имѣющія символическій кредитный и промышленный характеръ, и б) психологически понимаемый (см. § 19_2) «внутренній софистъ».

Рыночные цѣнные знаки — фетиши, какъ-то монеты и бумажныя деньги государства, банковыя обязательства, акціи и денежныя и товарныя обязательства фирмъ, служа дѣлу размѣна вещными правами и вещами, подлежатъ точнѣйшему учету, отчету и судебному гражданскому контролю, какъ проводники финансовой валюты, завязывающіе и развязывающіе множество экономическихъ общественныхъ узловъ. Противъ засилій заблужденія и злоупотребленія въ этой области должна быть поставлена достаточная кустодія отъ короны и отъ народа, недремлющая, вооружаемая статистикой финансово-экономическаго оборота и тѣмъ точнымъ наукообротомъ и оборотомъ правосудія, динамическая теорія котораго намѣчена въ §§ 6_1, 6_2, 19_1—23_2.

Такъ какъ осмысленные фетиши — знаки, служа символомъ прикрѣпленной къ нимъ идеи, имѣютъ матеріальный, внѣшне осязательный характеръ, хотя бы и весьма дешевый по стоимости своего вещества, какъ напримѣръ бумаги гражданскихъ актовъ, то процессы, связанные такими осязательными явленіями, имѣютъ достаточно наглядный и юридически доказательный характеръ, не исключающій, конечно, заблужденій. Эти неискупленныя правооборотомъ заблужденія однакоже относительно рѣдки, если судебная кустодія *хорошо штрафуетъ* и *кусаетъ* злоупотребляющихъ и симулирующихъ правдоподобіе.

Хорошая запись, прокурорскій надзоръ, общественный контроль и право-оборотъ въ этомъ случаѣ достаточны, чтобы защитить насъ отъ неправильныхъ сдвиговъ, отъ софистическихъ ухищреній корыстолюбія, отъ недобросовѣстной игры словами и правдоподобіемъ.

II. Но «внутреній софистъ», вводящій въ интеллектуальное заблужденіе и заражающій заблужденіемъ (темною силою) соприкасающіеся элементы, врагъ болѣе опасный, такъ какъ его орудіями служатъ прирожденныя наклонности человѣка къ заблужденіемъ, когда онъ подпадаетъ подъ власть собственныхъ неразумныхъ влеченій и спекулативныхъ страстей.

Эти источники заблужденія и ошибочной увѣренности, искажающіе мышленіе внутренними субъективными вліяніями и символически двусмысленными (по тенденціи) мистическими полуистинами*), эпидемически соблазнительными для пробуждающейся мысли, называютъ иногда «идолами» **), «демонами» «обманчивыми призраками истины», «иллюзіями» и пр. Различаютъ два рода «идоловъ»: 1) «идолы» основные, принципіальные, генеральные, формирующіе догму, вакцину идейной эпидеміи, и 2) «идолы» второстепенные, мелочные весьма разнообразныхъ типовъ.

Францискъ Бэконъ, авторъ сочиненій: *De Augmentis* и *Novum Organon*, достигшій своимъ краснорѣчіемъ и талантами блестящаго положенія и званія лорда, насквозь прожженный внутреннимъ софистомъ ***), далъ слѣдующій списокъ «идоловъ», передъ которыми умъ человѣческій давно привыкъ преклоняться: *Idola tribus*, призраки расы, т. е. иллюзіи, общія всему человѣческому роду; *Idola specus*, призраки пещеры, — иллюзіи каждой отдѣльной личности, свойственныя той «пещерѣ» въ которой

*) Терминъ „полуистина“ беремъ изъ статьи *В. С. Соловьева*: Словестность или истина?

**) См. труды по логикѣ Минто, А. И. Введенскаго и другихъ.

***) Вотъ что значится въ біографіи *Ф. Бэкона*. «Когда благосостояніе его достигло апогея, насталъ моментъ ужаснаго паденія. Противъ него было возведено обвиненіе въ продажности. Обвиненія, возведенныя противъ него, были таковы, что король, не будучи въ силахъ спасти его, посовѣтовалъ ему признать себя виновнымъ, что онъ и сдѣлалъ. Приговоръ, состоявшійся надъ нимъ, былъ строгій...» (Дж. Г Льюисъ: Жизнь Бэкона).

В. Минто (проф. Эбердинскаго универс.) въ своей книгѣ: «Дедуктивная и индуктивная логика» (Москва. 1896. Переводъ съ англійскаго С. А. Котляревскаго). разъясняетъ, что Ф. Бэконъ не былъ основателемъ индуктивной логики, но заявилъ свое право на титулъ ея основателя (стр. 302). Возставая противъ средневѣковыхъ авторитетовъ въ области естествознанія, онъ у нихъ же бралъ свой научный багажъ. «Его научныя занятія—говоритъ Минто—были заимствованы не изъ наблюденія надъ природой, а изъ ходячаго, традиціоннаго средневѣковаго естествознанія. Словомъ, онъ обманывалъ самого себя, думая, что можетъ совсѣмъ отказаться отъ традиціи и начать все дѣло сызнова, съ наблюденія природы. Однако же онъ на практикѣ не прилагалъ своихъ собственныхъ правилъ обращенія съ природой и опытомъ, не пытался дойти до объясненія причинъ медленнымъ терпѣливымъ изслѣдованіемъ, а сразу перескакивалъ къ самымъ широкимъ обобщеніямъ» (стр. 311).

живетъ каждый человѣкъ, *Idola fori,* призраки площади, т. е. иллюзіи, происходящія вслѣдствіе словеснаго общенія между людьми,—предразсудки символическіе, закрѣпляемые тѣмъ или другимъ привычнымъ употребленіемъ словъ; *Idola theatri*, призраки театра, т. е. иллюзіи, происходящія отъ обаянія знаменитыхъ ученій и теорій ослѣпляющихъ авторитетовъ и великихъ именъ.

Какъ классификація, это раздѣленіе человѣческихъ заблужденій имѣетъ свои недостатки, хотя этотъ списокъ иллюзій, которымъ подвержены люди, тонко подмѣчаетъ пороки человѣческой психологіи.

Ею подъ рубику Idola theatri подведены ослѣпляющіе авторитеты огульно, безъ внутренняго руководящаго принципа, устанавливающаго, что есть авторитеты, кредитъ къ которымъ долженъ во времени рости и рости, и есть «авторитеты», прививающіе эпидемическую язву заблужденій. Если признать, что спорныя теоріи ослѣпляющихъ авторитетовъ испытываются и опытомъ оцѣниваются по формулѣ: «согласуй ученія авторитетовъ съ фактами», то это правда. Но общіе синтетическіе руководящіе принципы достовѣрности во всякомъ случаѣ было необходимо принять на вѣру; между тѣмъ схема Ф. Бэкона подрывала именно историческій опытъ, традицію, предлагая огульно отрѣшиться «отъ предразсудковъ», окунуться въ пучину скептицизма съ головою и вѣровать лишь опыту анатомирующаго и анализирующаго момента.

III. Болѣе глубокимъ критическимъ методомъ, необходимымъ для разумной самодѣятельности нормативнаго государства $\Delta АБВ$ (см. § 19_2, пунктъ III), представляется научно-философскій методъ Рэнэ Декарта, современника Ф. Бэкона, съ присоединеніемъ къ Декарту Паскаля, Лейбница, Ломоносова и ихъ продолжателей.

1° точно выраженная Декартомъ *сырая достовѣрность* единоличнаго самосознанія («cogito, ergo sum»—мыслю, слѣдовательно существую), совпадающая по смыслу съ «самопознаніемъ» по ученію Сократа, какъ и съ «самобытностью» по ученію А. С. Хомякова, и являющаяся внутреннимъ убѣжденіемъ душъ (монадъ), какъ элементовъ общественнаго, собирательнаго тѣла; 2° далѣе монадологическія классификаціи Лейбница и потомъ Бугаева и затѣмъ *достовѣрности синтетическія* (чебышевскія), модулируемыя для данной страны монадъ по законамъ и планамъ исчисленія вѣроятностей, и, наконецъ, 3° *дедуктивный* аналитическій пангеометрическій методъ, впервые формулированный Декартомъ подъ формой «приложенія алгебры къ геометріи», выражающаго графически законы, какъ предписанія, и подмѣченные законы природы, — все это способно исключать заблужденія массами, включая въ кругъ графическаго изслѣдованія и въ кругъ дедукціи и индукціи всякую завѣтную истину, человѣческую и даже божескую, по скольку начало вещей

мыслится какъ Первопричина и какъ «средній Принципъ» посреди насъ.

Подобно всякимъ другимъ способностямъ, распространеннымъ въ массѣ людей, способности къ заблужденіямъ изслѣдуются какъ на отдѣльныхъ экземплярахъ, такъ и на совокупностяхъ ихъ. Терминъ Кетле «средній человѣкъ» въ отношеніи къ способности заблуждаться возможно понять обычно какъ фигуру или идею — діаграмму, проникая этимъ мѣриломъ за ширму, позади которой существуютъ внутреннія качества совокупности характеровъ (но не характера отдѣльной личности). Идея *заблуждающагося* средняго человѣка ставитъ много существенныхъ вопросовъ о качествѣ соотвѣтствующихъ ей совокупностей. Заблужденія воли, открываемыя въ фигурѣ средняго человѣка, какъ идеи собирательнаго предмета и идеи массивнаго собирательнаго событія, суть *заблужденія эпидемическія*, массовыя.

Необходимо думать объ исцѣленіи захваченныхъ этою эпидеміей совокупностей, работая просвѣщеніемъ, прессой и учительской кустодіей.

Въ составѣ воображаемаго средняго человѣка должно различать (фигурально, образно) тѣло, душу и *окачествованный* разумъ, духъ, обусловливающій характеристику души и сообщающій качества всему, держимому (въ жизни мысли) курсу поступковъ человѣка, каковой курсъ есть то же, что свободная *воля* (ибо творческій духъ свободенъ отъ Idola specus, отъ законовъ физической, тѣлесной пещеры человѣка). Само собою разумѣется, что свободная (некрѣпостная) причинная связь между народнымъ тѣломъ и его духовною жизнью существуетъ *): въ народномъ тѣлѣ, не отравленномъ наркозами «цивилизаціи», легче уживается разумъ, независящій отъ заблужденій, отъ «внутренняго софиста».

Главное вниманіе опытной просвѣтительной философіи и духовной кустодіи должно быть сосредоточено на *принципіальныхъ заблужденіяхъ*, чтобы ихъ побѣдить и основать среди господствующаго скептицизма, пессимизма и анархіи прочное и убѣдительное ученіе.

Д. С. Милль совершенно правильно утверждаетъ, что «какъ справедливость, такъ и здравый смыслъ предписываютъ бороться не съ самою нелѣпою, а съ самою разумною формою ложнаго мнѣнія». Ибо явно несостоятельная аргументація сама себя легко подрываетъ.

---

*) Въ составѣ человѣка просвѣтительная философія различаетъ, кромѣ тѣла (плоти), души и духа (разума), еще промежуточныя связи или конъюнктуры: «тѣлодушевность» и «душедуховность», причемъ получается рядъ:

«неорганическая матерія», «тѣло», «тѣлодушевность», «душа», «душедуховность», окачествованный «духъ».

Между духомъ и тѣломъ нѣтъ *крѣпостной* зависимости, но есть свободная связь. Эта *свободная* зависимость обычно совершается въ человѣческомъ составѣ чрезъ душевность. Отсылаемъ за подробностями къ книгѣ философа-инженера бар. М. Ф. Таубе: «Познаніевѣдѣніе» Петербургъ, 1912 г.

Принципіальный идолъ, какъ эпидемическій внушитель увѣрованія въ полуистину, источающій двусмысленную «сладкую и горькую воду», увлекаетъ, но отнимаетъ у метода мышленія ту или другую изъ точекъ опоры, и отъ этого дефекта опрокидывается вся длительная работа.

Сколько бы ни было мелкихъ «идоловъ» въ природѣ человѣческой души и соотвѣтствующихъ имъ заблужденій и погрѣшностей, всѣ они могутъ быть побѣждены, если только исходить изъ полноты истинныхъ, вѣрныхъ принциповъ жизни, вѣры и науки, однакоже извращаемыхъ и разъединяемыхъ принципіальными идолами.

Эти первосортные «идолы» формируютъ у многихъ въ судящемъ глазу ослѣпленіе довѣрія и недовѣрія гдѣ не слѣдуетъ, подрывая науку, метафизическую схематизацію психологическихъ концепцій вѣры и историческій опытъ вѣковъ и замѣщая эти критеріи частью мистикой, частью сенсуалистическою и матеріалистическою оргіей.

Мелкіе «демоны» гибельны тогда, когда они являются массовою арміей крупнаго «демона», т. е. когда является организаторъ, покупающій дешевыя заблужденія для цѣлесообразнаго дѣйствія. «Мелкіе идолы», слѣдовательно, заслуживаютъ вниманія, какъ саранча и какъ возможное орудіе ловца, организатора.

Отъ мелкихъ идоловъ никто никогда не бываетъ вполнѣ свободенъ. Для названія ихъ можно употреблять менѣе рѣзкое слово «заблужденіе», принятое, напримѣръ, въ книгѣ Минто, дающей характеристики обычныхъ заблужденій, которыми бываютъ одержимы люди *).

Дополненіе къ §§ 16 (п. V), 18_1 и 21_1 (п. II).

Списокъ трудовъ по исчисленію приближенныхъ надлежитъ дополнить книгою проф. *А. Н. Крылова*: «Лекціи о приближенныхъ вычисленіяхъ». (С.-Петерб., 1911).

Дополненіе къ § 19_2, пункту III.

Перечисленіе политическихъ средоточій элементарныхъ госуд. стихій *А*, *Б* и *В* нужно пояснить слѣдующими замѣчаніями.

Государственный совѣтъ (верхняя палата) не есть элементарное сосредоточіе; онъ есть представитель «конъюнктуры» или, иначе говоря, «химическаго» соединенія *БВ* стихій *Б* и *В*. Также и синодъ есть представитель соединенія *АВ* стихій *А* и *В*. Далѣе долженъ существовать въ средоточіи (въ головѣ политическаго тѣла) и представитель конъюнктуры *АБ* стихій *А* и *Б*; онъ долженъ быть школьнымъ имперскимъ совѣтомъ по дѣламъ человѣческой культуры, т. е. народнаго просвѣщенія.

---

*) *Минто*, стр. 26—36.

ГЛАВА III.

Ситуація при помощи уравненій. Рѣшеніе алгебраическихъ линейныхъ опредѣленныхъ уравненій въ случаѣ значительнаго числа неизвѣстныхъ.

§ 24. Уравненія положеній и движеній въ ихъ отношеніяхъ къ алгебраическимъ линейнымъ уравненіямъ. Методы рѣшенія системъ уравненій съ большимъ числомъ неизвѣстныхъ.

Множество положеній и движеній въ природѣ и обществѣ опредѣляется, изслѣдуется помощью уравненій, алгебраическихъ и дифференціальныхъ, количественныхъ и неколичественныхъ (символическихъ, оперативныхъ, логическихъ).

Эти уравненія сводятся иногда въ совершенной точности, иногда въ первомъ приближеніи, иногда съ помощью рядовъ, неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и послѣдовательныхъ приближеній, къ алгебраическимъ линейнымъ *опредѣленнымъ* уравненіямъ съ нѣсколькими неизвѣстными.

Рѣшеніе алгебраическихъ линейныхъ опредѣленныхъ уравненій, простое въ теоріи, быстро осложняется въ практическомъ исполненіи съ возрастаніемъ числа неизвѣстныхъ.

Между тѣмъ на практикѣ и въ теоріи очень часто приходится встрѣчаться съ необходимостью рѣшать системы именно съ значительнымъ числомъ неизвѣстныхъ.

Якоби упоминаетъ, что при геодезическихъ измѣреніяхъ число неизвѣстныхъ простиралось до 80; градусное измѣреніе *Бесселя* требовало опредѣленія 70 неизвѣстныхъ, а рядъ фотометрическихъ измѣреній *Зейделя* требовалъ опредѣленія 72 неизвѣстныхъ; г. *Цераскій* при опредѣленіи блеска звѣздъ оперировалъ съ 58 неизвѣстными; опредѣленіе погрѣшностей дѣленій меридіаннаго круга Казанской обсерваторіи привело г. *Порѣцкаго* къ системѣ съ 36 неизвѣстными; распредѣленіе энергіи на центральной электрической станціи въ Дармштадтѣ, по словамъ г. *Мемке*, опредѣлялось системой уравненій, содержащей до 30 неизвѣстныхъ.

Интегрированіе уравненій математической физики нерѣдко требуетъ разложеній въ безконечные ряды, коеффиціенты которыхъ выводятся рѣшеніемъ линейныхъ уравненій съ большимъ и даже съ безконечно большимъ числомъ неизвѣстныхъ *).

Извѣстныя линейныя уравненія политической экономіи, выводимыя изъ принциповъ Рикардо, Курно, Парето и другихъ **), также содержатъ весьма большое число неизвѣстныхъ, представляющихъ цѣны благъ въ связи съ ихъ количествомъ, обращающимся въ торговлѣ.

При общемъ рѣшеніи линейныхъ системъ уравненій съ весьма большимъ числомъ неизвѣстныхъ употребляютъ детерминанты, но они содержатъ необъятное число слагаемыхъ въ представляемой ими суммѣ. Въ подобныхъ обстоятельствахъ прибѣгаютъ къ особеннымъ методамъ рѣшенія, которые распадаются на двѣ категоріи: 1) частные методы, въ основѣ коихъ лежитъ то или другое приспособленіе и упрощеніе, обусловливаемое особенностями состава уравненій, и 2) методъ послѣдовательныхъ приближеній.

Иногда при опредѣленіи большого числа неизвѣстныхъ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ удается свести вопросъ къ рѣшенію системы уравненій слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 = A_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2,\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kk}x_k = A_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (A)$$

Рѣшеніе этой системы, послѣдовательно опредѣляющее неизвѣстныя $x_1, x_2, \ldots$, не представляетъ затрудненій, какъ ни было велико *число* неизвѣстныхъ.

Примѣры системъ вида (A) представляются въ Гауссовой теоріи способа наименьшихъ квадратовъ; такіе же примѣры представляются при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ однимъ независимымъ перемѣннымъ съ помощью рядовъ, коеффиціенты которыхъ получаются изъ системы уравненій вида (A) иногда съ *ограниченнымъ* числомъ неизвѣстныхъ ***), а иногда съ *неограниченнымъ* числомъ ихъ.

*) Съ подобнымъ вопросомъ имѣлъ дѣло г. *Коялович*ъ, разсмотрѣвшій въ монографіи: «Объ одномъ уравненіи съ частными производными четвертаго порядка» (С.-Петербургъ, 1902) одинъ случай, который встрѣчается въ теоріи равновѣсія упругихъ тѣлъ. Такой же вопросъ представляется въ помянутой выше (§ 21_2) нашей статьѣ: «Аналитическое продолженіе потенціала».

**) *H. Laurent.* Statistique Mathématique.—*П. А. Некрасовъ.* Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты.

***) *Д. М. Синцовъ.* Раціональные интегралы линейныхъ уравненій. Казань. 1898.

При изслѣдованіи уравненій съ частными производными, какъ напримѣръ уравненія (1) § 21_2, встрѣчаемся съ обобщеніемъ системы (A). Въ обобщенной системѣ число n_k неизвѣстныхъ, входящихъ въ уравненіе подъ номеромъ k по порядку, опредѣляется по формулѣ:

$$n_k = s\left(1 + E\frac{k}{s}\right),$$

гдѣ s есть небольшое цѣлое число ($s = 1$, или 2, или 3,...) и $E(x)$, есть бугаевскій аритмологическій символъ.

Но часто не удается легко свести ту или другую проблему къ системамъ вида (A) или ихъ указанному сей часъ обобщенію.

Ниже мы разсмотримъ, во-первыхъ, частный методъ, пригодный для группы циклическихъ уравненій, къ которымъ приводится множество вопросовъ, когда приходится послѣдовательно сличать величины явленія и измѣрять ихъ различія (таковы явленія: положенія, блеска, электрическаго напряженія, тепла, осадка, дохода, импульса и проч.) и ихъ итоги; во-вторыхъ, разсмотримъ общій способъ послѣдовательныхъ приближеній.

§ 25. Циклическія и гиперциклическія системы.

I. Во многихъ случаяхъ послѣдовательнаго сличенія величинъ явленія возможны такія схемы наблюденій, которыя приводятъ къ циклическимъ системамъ уравненій.

Циклическою системою линейныхъ уравненій *) я называю систему слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
&p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_{n-2}x_{n-2} + p_{n-1}x_{n-1} = A_0,\\
&p_{n-1}x_0 + p_0x_1 + p_1x_2 + \ldots + p_{n-3}x_{n-2} + p_{n-2}x_{n-1} = A_1,\\
&p_{n-2}x_0 + p_{n-1}x_1 + p_0x_2 + \ldots + p_{n-4}x_{n-2} + p_{n-3}x_{n-1} = A_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_1x_0 + p_2x_1 + p_3x_2 + \ldots + p_{n-1}x_{n-2} + p_0\ x_{n-1} = A_{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

Коеффиціенты при неизвѣстныхъ $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ въ этихъ уравненіяхъ выражаются одними и тѣми же числами $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, занимающими въ различныхъ уравненіяхъ различныя мѣста, съ сохраненіемъ одной и той же послѣдовательности, называемой циклическою.

*) *П. А. Некрасовъ*: Циклическія уравненія, ихъ связь съ способомъ наименьшихъ квадратовъ и примѣненія къ астрономіи. (Матем. Сборникъ, т. XII).

П. С. Порѣцкій: 1) Къ вопросу о рѣшеніи нѣкоторыхъ нормальныхъ системъ, встрѣчающихся въ практической астрономіи. Казань, 1886.—2) Двѣ замѣтки. II. По поводу соч. г. Цераскаго. (Извѣстія Физико-математическаго Общества при Казанскомъ университетѣ за 1888 г.).

Если система (1) есть нормальная, полученная по способу наименьшихъ квадратовъ, то величины $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$ будутъ связаны между собою равенствами вида:

$$p_m = p_{n-m}.$$

Опредѣлимъ сначала первое неизвѣстное x_0, которое, какъ извѣстно, должно выражаться формулой вида:

$$x_0 = A_0\delta_0 + A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + \ldots + A_{n-2}\delta_{n-2} + A_{n-1}\delta_{n-1}, \quad \ldots (2)$$

гдѣ величины $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ зависятъ отъ величинъ $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ и не зависятъ отъ величинъ $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Такимъ образомъ опредѣленіе неизвѣстнаго x_0 сводится къ опредѣленію величинъ $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$.

Пусть r есть какой либо первообразный корень двучленнаго уравненія

$$r^n - 1 = 0 \quad \ldots (3)$$

Подъ r можно разумѣть, напримѣръ, одну изъ величинъ:

$$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}} \quad \text{и} \quad e^{\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{n}}.$$

Далѣе вообразимъ n величинъ: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, опредѣляемыхъ по формулѣ *):

$$c_h = p_0 + p_1 r^h + p_2 r^{2h} + \ldots + p_{n-1} r^{(n-1)h} = \sum_{m=0}^{m=n-1} p_m r^{mh}, \quad \ldots (4)$$

гдѣ h есть какое либо изъ чиселъ 0, 1, 2, …, $(n-1)$.

Умножая равенство (4) послѣдовательно на величины: 1, r^h, r^{2h}, … …, $r^{(n-1)h}$, получимъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} p_0 &+ p_1 r^h + p_2 r^{2h} + \ldots + p_{n-2} r^{(n-2)h} + p_{n-1} r^{(n-1)h} = c_h, \\ p_{n-1} &+ p_0 r^h + p_1 r^{2h} + \ldots + p_{n-3} r^{(n-2)h} + p_{n-2} r^{(n-1)h} = c_h r^h, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1 &+ p_2 r^h + p_3 r^{2h} + \ldots + p_{n-1} r^{(n-2)h} + p_0 r^{(n-1)h} = c_h r^{(n-1)h} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

Сопоставляя эти равенства съ уравненіями (1), замѣчаемъ, что при значеніяхъ $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, опредѣляемыхъ системою равенствъ:

$$A_0 = c_h, \; A_1 = c_h r^h, \ldots, \; A_{n-1} = c_h r^{(n-1)h}, \quad \ldots (6)$$

*) Количество $\psi(r)$ вида:

$$\psi(r) = p_0 + p_1 r + \ldots + p_{n-1} r^{n-1},$$

гдѣ r есть корень алгебраическаго $F(r) = 0$ уравненія степени n, есть алгебраическое составное (комплексное) число. Этого рода числа имѣютъ много приложеній въ математикѣ и въ механикѣ. Ниже мы приложимъ ихъ къ гиперциклическимъ уравненіямъ. Теперь мы разсматриваемъ частный случай, соотвѣтствующій двухчленному уравненію (3) и циклическимъ уравненіямъ.

рѣшенія уравненій (1) будутъ:

$$x_0 = 1, \; x_1 = r^h, \; x_2 = r^{2h}, \ldots, \; x_{n-1} = r^{(n-1)h}.$$

Слѣдовательно, при значеніяхъ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, опредѣляемыхъ равенствами (6), равенство (2) должно имѣть видъ:

$$1 = c_h(\delta_0 + \delta_1 r^h + \delta_2 r^{2h} + \ldots + \delta_{n-1} r^{(n-1)h}) \quad \ldots (7)$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на $r^{kh}c_h$, находимъ:

$$\frac{1}{r^{kh}c_h} = \sum_{m=1}^{m=n-1} \delta_m r^{(m-k)h} \quad \ldots (8)$$

Помня, что, по извѣстнымъ свойствамъ первообразныхъ корней уравненія (3), выраженіе

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} r^{(m-k)h}$$

равно n или нулю, смотря по тому, будетъ ли цѣлое число $m-k$ кратно или некратно n, дадимъ въ равенствѣ (8) числу h значенія 0, 1, 2, …, $(n-1)$ и сложимъ полученныя равенства. Получимъ:

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{1}{r^{kh}c_h} = n\delta_k,$$

откуда

$$\delta_k = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{1}{r^{kh}c_h} \quad \ldots (9)$$

Такимъ образомъ величины $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ получены, и, слѣдовательно, по формулѣ (2) опредѣлится x_0.

Величины $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ будутъ выражаться посредствомъ тѣхъ же величинъ $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ формулами, подобными формулѣ (2). Величины $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ будутъ входить въ эти формулы съ соблюденіемъ одной и той же циклической послѣдовательности. Для полученія формулы, опредѣляющей второе неизвѣстное x_2, перемѣстимъ въ уравненіяхъ (1) первое неизвѣстное x_0 на послѣднее мѣсто и затѣмъ первое изъ уравненій (1) сдѣлаемъ послѣднимъ. Строй коэффиціентовъ первыхъ частей уравненій (1) послѣ указанныхъ перемѣнъ останется тотъ же самый, вторыя части будутъ выражаться величинами

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_0, \quad \ldots (10)$$

неизвѣстное x_1 сдѣлается первымъ неизвѣстнымъ и слѣдовательно оно должно выражаться формулой (2), въ которой величины $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}$ замѣняются соотвѣтственно величинами (10). Такимъ образомъ находимъ:

$$x_1 = A_1\delta_0 + A_2\delta_1 + A_3\delta_2 + \ldots + A_{n-1}\delta_{n-2} + A_0\delta_{n-1}.$$

Полная система рѣшеній уравненій (1) будетъ:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A_0\delta_0 + A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + \ldots + A_{n-1}\delta_{n-1},\\ x_1 &= A_0\delta_{n-1} + A_1\delta_0 + A_2\delta_1 + \ldots + A_{n-1}\delta_{n-2},\\ x_2 &= A_0\delta_{n-2} + A_1\delta_{n-1} + A_2\delta_0 + \ldots + A_{n-1}\delta_{n-3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1} &= A_0\delta_1 + A_1\delta_2 + A_2\delta_3 + \ldots + A_{n-1}\delta_0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

II. Сдѣлаемъ нѣкоторыя замѣчанія о формулахъ, облегчающихъ вычисленіе величинъ $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$.

Представимъ величину r и ея степени, входящія въ общія выраженія c_h и δ_h, посредствомъ тригонометрическихъ количествъ. При этомъ будемъ предполагать, что уравненія (1) суть нормальныя, полученныя по способу наименьшихъ квадратовъ, такъ что величины $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ должны быть связаны между собою равенствами:

$$p_m = p_{n-m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

При этомъ условіи мнимые члены второй части равенства (4) будутъ попарно сопряженными и въ суммѣ составятъ дѣйствительную величину, которая можетъ быть представлена такъ:

$$c_h = \sum_{m=0}^{m=n-1} p_m \cos mh\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

гдѣ

$$\sigma = \frac{2\pi}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Пусть q и s представляютъ собою цѣлую часть частнаго и остатокъ отъ дѣленія mh на n, такъ что

$$mh = nq + s.$$

Очевидно будемъ имѣть:

$$\cos mh\sigma = \cos s\sigma.$$

Поэтому, какъ видно изъ равенствъ (13), величины $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ будутъ выражаться посредствомъ $n - 1$ косинусовъ:

$$\cos\sigma, \cos 2\sigma, \ldots, \cos(n-1)\sigma,$$

между которыми будутъ существовать равенства:

$$\cos m\sigma = \cos(n-m)\sigma; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

а величины $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ будутъ связаны между собою равенствами:

$$c_m = c_{m-n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Далѣе равенство (9), служащее для опредѣленія величинъ $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, можетъ быть представлено такъ:

$$\delta_k = \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{1}{c_h} \cos kh\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Очевидно, величины $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ также будутъ выражаться посредствомъ $n - 1$ вышеуказанныхъ косинусовъ и будутъ связаны между собою равенствами вида:

$$\delta_k = \delta_{n-k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Для такихъ однообразныхъ (по составу лѣвыхъ частей) нормальныхъ системъ вида (1), кои будутъ часто встрѣчаться на практикѣ, возможно составленіе таблицъ величинъ $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, которое доведетъ рѣшеніе уравненій (1) до крайней простоты.

Болѣе подробнымъ изслѣдованіемъ вычисленіе величинъ $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ можетъ быть еще упрощено. При таковыхъ упрощеніяхъ приноситъ пользу элементарная теорія симметрическихъ функцій, ибо вторая часть равенства (9) есть симметрическая функція корней уравненія (3).

Далѣе привычисленіи величинъ $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ бываютъ иногда полезны, между прочимъ, слѣдующія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} p_0\delta_0 + p_1\delta_{n-1} + p_2\delta_{n-2} + \ldots + p_{n-1}\delta_1 &= 1,\\ p_0\delta_1 + p_1\delta_0 + p_2\delta_{n-1} + \ldots + p_{n-1}\delta_2 &= 0,\\ p_0\delta_2 + p_1\delta_1 + p_2\delta_0 + \ldots + p_{n-1}\delta_3 &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_0\delta_{n-1} + p_1\delta_{n-2} + p_2\delta_{n-3} + \ldots + p_{n-1}\delta_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19)$$

Эти соотношенія получаются внесеніемъ въ одно изъ уравненій (1) выраженій $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, опредѣляемыхъ равенствами (11), и уравниваніемъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ при произвольныхъ количествахъ $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ въ той или другой части полученнаго тождества.

III. Нормальныя уравненія, получаемыя по способу наименьшихъ квадратовъ, имѣютъ циклическій строй въ томъ случаѣ, когда начальныя

уравненія *) распадаются на циклическія группы. Эта цикличность зависитъ отъ предусмотрительности дирижера наблюденій, который составляетъ планъ наблюденій. Если же въ начальныхъ уравненіяхъ встрѣчаются нѣкоторыя не очень значительныя уклоненія отъ цикличности, то и нормальныя уравненія будутъ уклоняться отъ циклическаго строя, при чемъ въ этомъ случаѣ предшествующія формулы даютъ возможность исключить часть неизвѣстныхъ и свести рѣшеніе нормальной системы съ большимъ числомъ неизвѣстныхъ къ рѣшенію другой системы съ меньшимъ числомъ неизвѣстныхъ.

Пояснимъ изложенное на схематическомъ примѣрѣ. Вообразимъ линейку, раздѣленную на n частей. Пусть эти дѣленія подлежатъ изслѣдованію и обозначимъ длины ихъ чрезъ $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Предположимъ, что наблюдатель измѣрилъ сначала каждое дѣленіе отдѣльно, затѣмъ каждыя два смежныя дѣленія. Начальныя уравненія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x_0 = u_0,\ x_1 = u_1,\ x_2 = u_2, \ldots, x_{n-1} = u_{n-1},\\ x_0 + x_1 = v_1,\ x_1 + x_2 = v_2,\ x_2 + x_3 = v_3, \ldots, x_{n-2} + x_{n-1} = v_{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Нормальныя уравненія получатъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} 2x_0 + x_1 &= A_0,\\ x_0 + 3x_1 + x_2 &= A_1,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= A_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-3} + 3x_{n-2} + x_{n-1} &= A_{n-2},\\ x_{n-2} + 2x_{n-1} &= A_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

Уравненія эти будутъ содержать въ себѣ незначительное уклоненіе отъ циклическаго строя. Полагая

$$x_{n+k} = x_k$$

и

$$\varphi_s = x_{s-1} + 3x_s + x_{s+1},$$

систему (21) можемъ представить такъ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 = A_0 + x_0 + x_{n-1},\\ \varphi_1 = A_1,\ \varphi_2 = A_2, \ldots, \varphi_{n-2} = A_{n-2},\\ \varphi_{n-1} = A_{n-2} + x_{n-1} + x_0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21')$$

*) Термины: „нормальныя уравненія“ и „начальныя уравненія“ разъяснены во II части. Замѣтимъ теперь же, что начальныя уравненія получаются непосредственно наблюденіями величины линейныхъ алг. функцій отъ неизвѣстныхъ.

Лѣвыя части этихъ уравненій имѣютъ циклическій строй и получаются изъ лѣвыхъ частей уравненій (1), если положимъ:

$$p_0 = 3,\ p_1 = p_{n-1} = 1,$$

$$p_2 = p_3 = \ldots = p_{n-3} = p_{n-2} = 0.$$

Величины $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ для этого случая будутъ выражаться формулой:

$$\delta_k = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{r^{kh}}{3 + r^h + r^{-h}}, \quad \ldots\ldots (22)$$

гдѣ r есть первообразный корень уравненія (3). Но вычисленіе величинъ $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ упрощается. При помощи формулы (22) и свойствъ симметрическихъ функцій находимъ:

$$\delta_0 = \frac{3 + 2\xi_1}{5\,(1 - \xi_1^{\,n})} + \frac{3 + 2\xi_2}{5\,(1 - \xi_2^{\,n})}, \quad \ldots\ldots (23)$$

гдѣ ξ_1 и ξ_2 суть корни уравненія

$$x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Далѣе соотношенія (19) въ разсматриваемомъ случаѣ получаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\delta_0,\\ \delta_{k+2} &= -3\delta_{k+1} - \delta_k. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (24)$$

При помощи равенствъ (23) и (24) легко могутъ быть получены величины $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$. Имѣя эти величины, легко затѣмъ получить рѣшеніе системы (21), которое приводится сначала къ вычисленію величинъ ζ_0 и ζ_{n-1} по формуламъ:

$$\zeta_0 = A_0\delta_0 + A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + \ldots + A_{n-1}\,\delta_{n-1},$$
$$\zeta_{n-1} = A_0\delta_1 + A_1\delta_2 + A_2\delta_3 + \ldots + A_{n-1}\,\delta_0.$$

Затѣмъ будемъ имѣть:

$$x_0 = \zeta_0 \frac{1 + \delta_0}{2\delta_0} + \zeta_{n-1} \frac{1 - \delta_0}{2\delta_0},$$

$$x_1 = A_0 - 2x_0,\ x_{k+2} = A_{k+1} - 3x_{k+1} - x_k.$$

IV. Приведемъ еще слѣдующій примѣръ г. Порѣцкаго, примѣнимый

къ сличенію звѣзднаго блеска, геодезическихъ высотъ, кредитныхъ коэффиціентовъ, величинъ электрическаго напряженія въ различныхъ пунктахъ цѣпи и пр.

При опредѣленіи неизвѣстныхъ изъ уравненій вида $x_i - x_k = \alpha$, гдѣ α есть число, получаемое изъ наблюденій, обыкновенно употребляютъ только замкнутыя цѣпи подобныхъ уравненій, въ родѣ слѣдующей:

$$x_i - x_k = \alpha,\ x_k - x_l = \beta,\ x_l - x_m = \gamma, \ldots, x_s - x_t = \sigma,\ x_t - x_i = \tau. \quad (25)$$

Въ каждой такой цѣпи равенствъ сумма лѣвыхъ частей всегда нуль; вслѣдствіе чего изъ приблизительнаго соблюденія контрольнаго условія

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \sigma + \tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

бываетъ возможно вывести заключеніе, что данныя наблюденія не содержатъ грубыхъ ошибокъ.

Въ каждый пріемъ наблюденій строятъ одну или нѣсколько замкнутыхъ цѣпей уравненій по типу (25). Строить такія замкнутыя цѣпи можно или какъ попало, или же съ соблюденіемъ нѣкотораго упрощающаго правила для указателей неизвѣстныхъ въ предѣлахъ каждой отдѣльной цѣпи уравненій.

Въ правильно замкнутой цѣпи (1) должно соблюдаться условіе:

$$k - i = l - k = m - l = \ldots = t - s = n + i - t = q, \quad . \quad (27)$$

при обозначеніи

$$x_{n+i} = x_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Съ помощью условій (27) легко убѣдиться, что число q, представляющее собою общій интервалъ для указателей при неизвѣстныхъ въ этой цѣпи, принадлежитъ къ группѣ дѣлителей общаго числа n неизвѣстныхъ

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}.$$

И понятно, что чѣмъ болѣе дѣлителей допускаетъ число n, тѣмъ болѣе значеній можетъ принимать интервалъ q и тѣмъ на большее число ладовъ можетъ быть замыкаема правильнымъ образомъ цѣпь уравненій (25).

Пусть, напримѣръ, число неизвѣстныхъ $n = 12$; самыя неизвѣстныя будутъ

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{11},$$

причемъ изъ обозначенія (28) слѣдуетъ:

$$x_{12} = x_0,\ x_{13} = x_1,\ x_{14} = x_2, \ldots, x_{23} = x_{11}.$$

Дѣлители числа 12 суть: 1, 2, 3, 4, 6; а потому въ данномъ случаѣ возможны слѣдующія правильно замкнутыя цѣпи разностей неизвѣстныхъ:

$$x_0 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \ldots, x_{11} - x_0;$$
$$x_0 - x_2, x_2 - x_4, x_4 - x_6, \ldots, x_{10} - x_0;$$
$$x_1 - x_3, x_3 - x_5, x_5 - x_7, \ldots, x_{11} - x_1;$$
$$x_0 - x_3, x_3 - x_6, x_6 - x_9, x_9 - x_0;$$
$$x_1 - x_4, x_4 - x_7, x_7 - x_{10}, x_{10} - x_1;$$
$$x_2 - x_5, x_5 - x_8, x_8 - x_{11}, x_{11} - x_2;$$
$$x_0 - x_4, x_4 - x_8, x_8 - x_0;$$
$$x_1 - x_5, x_5 - x_9, x_9 - x_1;$$
$$x_2 - x_6, x_6 - x_{10}, x_{10} - x_2;$$
$$x_3 - x_7, x_7 - x_{11}, x_{11} - x_3;$$

Кромѣ наблюденія этихъ разностей, устанавливается еще значеніе суммы $x_0 + x_1 + \ldots + x_{11}$. Примѣняя затѣмъ способъ наименьшихъ квадратовъ, получимъ въ результатѣ нормальную систему уравненій въ циклической формѣ, къ рѣшенію которой успѣшно примѣняются установленныя выше формулы.

Въ подобныхъ примѣрахъ успѣхъ упрощенія рѣшенія нормальной системы основанъ на правильномъ замкнутіи цѣпей уравненій (25) и на удачномъ подборѣ числа n неизвѣстныхъ, которое во многихъ вопросахъ зависитъ отъ предусмотрительности дирижера наблюденій. Въ одномъ большомъ трудѣ наблюдатель оперировалъ съ числомъ неизвѣстныхъ $n = 58$. Но лучше было бы выбрать недалекія отъ 58 числа 56 или 60, имѣющія болѣе значительное число дѣлителей.

V. Теорію циклическихъ системъ можно значительно распространить или обобщить, взявъ вмѣсто двучленнаго уравненія (3) трехчленное уравненіе $r^n - pr^\nu - q = 0$ или даже общее алгебраическое уравненіе степени n относительно r, которое представимъ такъ:

$$F(r) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Возьмемъ алгебраическое составное (комплексное) количество $\psi(r)$ слѣдующаго вида:

$$\psi(r) = p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \ldots + p_{n-1} r^{n-1}, \quad . \quad . \quad (30)$$

гдѣ r есть корень уравненія (29), а $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ суть числа, не зависящія отъ корня r. Разсмотримъ при этомъ слѣдующую строку:

$$\psi(r),\ r\,\psi(r),\ r^2\,\psi(r^2), \ldots, r^{n-1}\,\psi(r).$$

Членъ $r^k . \varphi(r)$ этой строки выражается съ помощію равенства (30) какъ полиномъ степени $n - 1 + k$. Эту степень при помощи дѣленія многочлена $\psi(z)\, z^k$ на многочленъ $F(z)$ и уравненія (29) будемъ понижать такъ, чтобы результатъ представлялъ собою полиномъ степени ниже n. Послѣ такихъ пониженій, будемъ имѣть систему равенствъ:

$$\left.\begin{array}{c} r^k \psi(r) = p_{0,k} + p_{1,k}\, r + p_{2,k}\, r^2 + \ldots p_{n-1,k}\, r^{n-1}, \\ k = 0,1,2,\ldots,n-1, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (31)$$

гдѣ вообще $p_{i,k}$ есть количество, не зависящее отъ корня r, но зависящее отъ коэффиціентовъ уравненія (29) и отъ величинъ $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$.

Гиперциклическою системою линейныхъ алг. уравненій будемъ называть систему слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{array}{c} p_{0,k}\, x_0 + p_{1,k}\, x_1 + p_{2,k}\, x_2 + \ldots + p_{n-1,k}\, x_{n-1} = A_k, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{array}\right\} \quad . \quad (32)$$

Эта система обращается въ циклическую систему (1), если имѣетъ силу тождество $F(z) = z^n - 1$. Вообще же система (32) нециклическая.

Неизвѣстное x_i, выводимое изъ системы уравненій (32), должно выражаться по формулѣ:

$$x_i = A_0 . \delta_{0,i} + A_1 . \delta_{1,i} + \ldots + A_{n-1} . \delta_{n-1,i}, \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

которая сводитъ задачу къ опредѣленію количествъ $\delta_{s,i}$, зависящихъ отъ коэффиціентовъ $p_{j,k}$ системы уравненій (32).

Сопоставляя равенства (31) съ уравненіями (32), замѣчаемъ, что при значеніяхъ $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, опредѣляемыхъ системою равенствъ:

$$A_0 = \psi(r),\ A_1 = r\,\psi(r),\ A_2 = r^2 . \psi(r), \ldots,\ A_{n-1} = r^{n-1}\,\psi(r),$$

рѣшеніе системы уравненій (32) будетъ:

$$x_0 = 1,\ x_1 = r,\ x_2 = r^2, \ldots, x^{n-1} = r_{n-1}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (33) должно получить видъ слѣдующаго тождества:

$$\frac{r^i}{\psi(r)} = \delta_{0,i} + \delta_{1,i}\, r + \delta_{2,i}\, r^2 + \ldots + \delta_{n-1,i}\, r^{n-1} \quad . \quad . \quad (34)$$

Такихъ тождествъ получимъ n, полагая:

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Равенство (30) показываетъ, что лѣвая часть уравненія (34) есть

дробная функція корня r уравненія (29), которая можетъ быть сведена къ цѣлой функціи того же корня r степени ниже n, т. е. будемъ имѣть:

$$\frac{r^i}{\psi(r)} = H_{i,0} + H_{i,1}\, r + H_{i,2}\, r^2 + \ldots + H_{i,n-1}\, r^{n-1} \quad . \quad (35)$$

гдѣ $H_{i,0}, H_{i,1}, \ldots, H_{i,n-1}$ суть количества, независящія отъ корня r.

Сопоставляя равенства (34) и (35), находимъ:

$$\delta_{k,i} = H_{i,k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Итакъ, мы нашли всѣ элементы для рѣшенія системы уравненій (32) по формуламъ (33). Вычисленія по этимъ формуламъ хотя и сложны, но доступны вычислителямъ.

Для полученія второй части равенства (35) укажемъ два способа.

Первый способъ сводится къ слѣдующимъ дѣйствіямъ. Совершивъ послѣдовательное дѣленіе полиномовъ $F(y)$ и $\psi(y)$, будемъ имѣть серію равенствъ:

$$\left.\begin{array}{r} F(y) = \psi(y) . Q_1 + R_1, \\ \psi(y) = R_1 . Q_2 + R_2, \\ R_1 = R_2 . Q_3 + R_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-2} = R_{n-1}\, Q_n + R_n, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36')$$

гдѣ $R_1, R_2, \ldots, R_n$ суть послѣдовательные остатки, цѣлые относительно перемѣннаго y, и остатокъ R_n не содержитъ y. Полагая $y = r$ и принимая во вниманіе уравненіе (29), будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l} R_1 = -\,Q_1 . \psi(r) \\ R_2 = (1 + Q_1\, Q_2) . \psi(r) \\ R_3 = -\,(Q_1 + Q_3 + Q_1\, Q_2\, Q_3) . \psi(r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n = \theta(r) . \psi(r), \end{array}$$

гдѣ $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ и $\theta(r)$ суть цѣлыя функціи корня r. Послѣднее изъ полученной серіи равенствъ показываетъ, что

$$\frac{r^i}{\psi(r)} = \frac{r^i . \theta(r)}{R_n}.$$

Вторая часть этого равенства есть цѣлая функція корня r, но степень ея можетъ оказаться не ниже n. Въ этомъ случаѣ потребуется еще алгебраическое дѣленіе для пониженія степени.

Этотъ методъ можетъ оказаться недостаточнымъ, если полиномы $F(y)$ и $\psi(y)$ имѣютъ общій алгебраическій дѣлитель; ибо въ этомъ случаѣ R_n есть нуль. Но въ этомъ случаѣ $\theta(r)$ есть также нуль, и располагая въ составѣ данныхъ параметрами, легко бываетъ раскрыть эту неопредѣленность по способу предѣловъ. Эта неопредѣленность останется неразрѣшимою лишь при невозможности или неопредѣленности системы уравненій (32).

Другой способъ полученія второй части равенства (35) начинается извѣстнымъ разложеніемъ дробнаго выраженія

$$\frac{y^i}{\psi(y)}$$

на элементарныя дроби, что потребуетъ опредѣленія корней $a_1, a_2, \ldots$ уравненія $\psi(y) = 0$. Получимъ:

$$\frac{y^i}{\psi(y)} = \sum \frac{L}{(y-a)^\lambda},$$

гдѣ сумма $\sum$ распространяется на всѣ корни $a_1, a_2, \ldots$ Затѣмъ каждое выраженіе вида

$$\frac{L}{(r-a)^\lambda}$$

легко представить какъ цѣлую функцію корня r, слѣдуя схемѣ послѣдовательнаго дѣленія (36′) съ замѣною выраженія $\psi(y)$ выраженіемъ $(y-a)^\lambda : L$. Далѣе нужно подвести итогъ $\sum$ этимъ результатамъ и понизить степень полученнаго полинома относительно r, если она будетъ не ниже n.

VI. Иногда обсуждается не гиперциклическая и нециклическая система слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} p_{0,k}x_0 + p_{1,k}x_1 + p_{2,k}x_2 + \ldots + p_{n-1,k}x_{n-1} &= A_k + L_k, \\ k &= 0, 1, 2, \ldots, n-1, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

гдѣ сохраняются вышеуказанныя обозначенія и гдѣ сверхъ того $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ обозначаютъ линейныя функціи не всѣхъ, а ν изъ n неизвѣстныхъ. Пусть эти ν неизвѣстныхъ будутъ: $x_l, x_m, \ldots, x_t$.

Замѣняя въ уравненіяхъ (33) A_k чрезъ $A_k + L_k$, получимъ, очевидно, систему уравненій, равносильную системѣ (37), именно:

$$x_i = (A_0+L_0)\delta_{0,i} + (A_1+L_1)\delta_{1,i} + \ldots + (A_{n-1}+L_{n-1})\delta_{n-1,i} \quad . \quad (38)$$

Давая здѣсь указателю i значенія: $l, m, \ldots, t$, получимъ систему ν уравненій съ ν неизвѣстными $x_l, x_m, \ldots x_t$; т. е. $n-\nu$ остальныхъ неизвѣстныхъ будутъ исключены и опредѣлятся по формулѣ (38) послѣ рѣшенія найденной системы ν уравненій съ ν неизвѣстными.

Это исключеніе неизвѣстныхъ продвигаетъ дѣло впередъ болѣе или менѣе значительно, смотря по величинѣ числа $n-\nu$.

§ 26. Способъ послѣдовательныхъ приближеній въ формѣ Зейделя и въ другихъ формахъ.

I. Всѣ вышеуказанные частные методы, основанные на упрощающихъ особенностяхъ формы рѣшаемыхъ уравненій, не исчерпываютъ общей задачи рѣшенія линейныхъ алгебр. опред. уравненій съ большимъ числомъ неизвѣстныхъ. Вотъ почему бываютъ необходимы рѣшенія по способу послѣдовательныхъ приближеній *).

Разсмотримъ сначала этотъ способъ въ зависимости отъ способа наименьшихъ квадратовъ, либо рѣшая интерполяціонную задачу § 15, для функціи $F(a_i, \lambda, \mu, \nu, \ldots)$, линейной относительно параметровъ $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, принимаемыхъ теперь за извѣстныя $x, y, z, \ldots$; либо трактуя систему линейн. начальныхъ уравненій, выведенныхъ изъ наблюденій съ погрѣшностями. Зейдель рѣшилъ этотъ вопросъ по слѣдующему плану.

Пусть $x, y, z, \ldots, t$ будутъ μ неизвѣстныхъ. Полагая

$$f_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + p_i t + q_i,$$

допустимъ, что полученныя на основаніи наблюденій начальныя уравненія будутъ:

$$f_1 - A_1 = \Delta_1,\ f_2 - A_2 = \Delta_2,\ \ldots,\ f_m - A_m = \Delta_m,$$

---

*) Приведемъ литературу по этому вопросу.

L. Seidel. Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen ueberhaupt durch successive Annäherung aufzulösen. (Abhandlungen der Kgl. Baierschen Akademie der Wissenshaften zu München-Zweite Klasse. Bd. XI. 1874).

П. А. Некрасовъ. Опредѣленіе неизвѣстныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ при весьма большомъ числѣ неизвѣстныхъ. (Математ. Сборникъ, т. XII).

Онъ же. Къ вопросу о рѣшеніи линейной системы уравненій съ большимъ числомъ неизвѣстныхъ посредствомъ послѣдовательныхъ приближеній. (Приложеніе къ LXIX тому Записокъ Импер. Академіи Наукъ. С.-Петерб. 1892).

Р. Мемке и *П. А. Некрасовъ.* Рѣшеніе линейной системы уравненій посредствомъ послѣдовательныхъ приближеній. (Математ. Сборн., т. XVI. 1892).

Б. М. Коялович. Объ одномъ уравненіи съ частными производными четвертаго порядка. Стр. 47—66. (С.-Петербургъ, 1902).

В. К. Цераскій: Астрономическій фотометръ и его приложенія. (Математ. Сборн., т. XIII).

гдѣ $m \leqq \mu$. Нормальная система уравненій, получаемыхъ по способу наименьшихъ квадратовъ, какъ извѣстно, будетъ слѣдующая:

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + \ldots + (ap)\,t + (aq) - (aA) = 0,\\
&(ba)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + \ldots + (bp)\,t + (bq) - (bA) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(pa)\,x + (pb)\,y + (pc)\,z + \ldots + (pp)\,t + (pq) - (pA) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

гдѣ вообще

$$(kl) = g_1 k_1 l_1 + g_2 k_2 l_2 + \ldots + g_m k_m l_m.$$

Величины $x, y, z, \ldots, t$, удовлетворяющія уравненіямъ (1), какъ извѣстно, обращаютъ въ *minimum* функцію

$$Q = \frac{1}{2}\,(g_1 \Delta_1^{\,2} + g_2 \Delta_2^{\,2} + \ldots + g_m \Delta_m^{\,2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Разлагая эту функцію по степенямъ x, находимъ:

$$Q = \frac{1}{2}\,\{(aa)\,x^2 + 2\,(ab)\,xy + 2(ac)\,xz + \ldots$$

$$\ldots + 2\,(ap)\,xt + 2\,[(aq) - (aA)]\,x\} + R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

гдѣ R есть многочленъ, не содержащій x. Равенство (2′) можемъ представить еще такъ:

$$Q = \frac{1}{2\,(aa)}\,\{(aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + \ldots + (ap)\,t + (aq) - (aA)\}^2 + P, \quad . \quad (3)$$

гдѣ P есть многочленъ, не содержащій x.

Пусть $x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0$ будетъ какая либо система частныхъ значеній перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$, не удовлетворяющихъ первому изъ уравненій (1). Величина Q, соотвѣтствующая этимъ значеніямъ перемѣнныхъ, будетъ:

$$Q_0 = \frac{1}{2\,(aa)}\,\{(aa)\,x_0 + (ab)\,y_0 + (ac)\,z_0 + \ldots + (ap)\,t_0 + (aq) - (aA)\}^2 + P_0\,. \quad (3')$$

Пусть x_1 будетъ величина, удовлетворяющая уравненію:

$$(aa)\,x_1 + (ab)\,y_0 + (ac)\,z_0 + \ldots + (ap)\,t_0 + (aq) - (aA) = 0.$$

Очевидно, для системы частныхъ значеній $x_1, y_0, z_0, \ldots, t_0$ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$ величина Q пріобрѣтаетъ значеніе Q_1, равное P_0, причемъ, очевидно, будемъ имѣть:

$$Q_1 < Q_0.$$

Такимъ образомъ, для значеній $x_1, y_0, z_0, \ldots$ величина Q ближе къ своему *minimum*, чѣмъ для значеній $x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0$ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$.

Пусть y_1 есть величина, удовлетворяющая уравненію:

$$(ba)\,x_1 + (bb)\,y_1 + (bc)\,z_0 + \ldots + (bp)\,t_0 + (bq) - (bA) = 0.$$

Указаннымъ путемъ легко убѣдиться, что величина Q, которую можно представить въ формѣ:

$$Q = \frac{1}{2\,(bb)}\,\{(ba)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + \ldots + (bp)\,t + (bq) - (bA)\}^2 + L,$$

для значеній $x_1, y_1, z_0, \ldots, t_0$ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$ будетъ еще ближе къ своему minimum, чѣмъ величина Q, соотвѣтствующая значеніямъ $x_1, y_0, z_0, \ldots, t_0$. Продолжая такимъ образомъ разсуждать далѣе, можемъ послѣдовательно замѣнить всѣ величины $x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0$ величинами $x_1, y_1, z_1, \ldots, t_1$, постоянно приближая соотвѣтствующую величину Q къ ея minimum. Далѣе систему величинъ $x_1, y_1, z_1, \ldots, t_1$ по тому же плану можемъ замѣнить системой значеній $x_2, y_2, z_2, \ldots, t_2$, и т. д. Въ предѣлѣ послѣ безчисленнаго множества такихъ повторныхъ аналогическихъ оборотовъ исчисленія величина Q приблизится къ ея minimum, и слѣдовательно система полученныхъ такимъ образомъ окончательныхъ значеній перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$ приблизится къ искомымъ значеніямъ, удовлетворяющимъ уравненіямъ (1).

Положеніе это составляетъ *основную теорему способа Зейделя*, позволяющую считать величины $x_m, y_m, z_m, \ldots, t_m$ при весьма большомъ m за приближенія къ неизвѣстнымъ $x, y, z, \ldots, t$.

Съ цѣлями ускоренія убыванія погрѣшностей

$$x - x_m,\ y - y_m,\ z - z_m, \ldots,\ t - t_m$$

при возрастаніи m можно бываетъ передъ каждымъ новымъ оборомъ вычисленія измѣнить порядокъ неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots, t$, если это будетъ способствовать желательной быстротѣ приближенія къ искомымъ рѣшеніямъ. Однако же сохраненіе одного и того же порядка способствуетъ однообразію оборотовъ вычисленія и, слѣдовательно, приспособленію вычислительнаго механизма къ работѣ соотвѣтственно этому порядку.

Способъ Зейделя въ предѣлѣ приближаетъ къ искомымъ рѣшеніямъ опредѣленной нормальной системы (1) болѣе или менѣе быстро, по мѣрѣ возрастанія m; но для сужденія о быстротѣ этого приближенія необходимо имѣть выраженія погрѣшностей приближенныхъ величинъ, получаемыхъ этимъ способомъ.

Эти выраженія хотя и неопредѣленныя (благодаря произвольнымъ

постояннымъ), но характерныя, мы разсмотрѣли въ мемуарѣ о способѣ Зейделя; они приводятъ къ *теоремѣ*: *При удачной постановкѣ самыхъ наблюденій и способъ Зейделя быстро, удачно ведетъ къ цѣли приближенія*; но при неудачной, *парадоксальной* ихъ постановкѣ, когда детерминантъ D системы уравненій (1) почти аннулируется, т. е. вѣса неизвѣстныхъ *), опредѣляемые по формуламъ Гаусса, оказываются ничтожными, *способъ Зейделя будетъ чрезвычайно медленно приближать къ цѣли.*

Разсмотримъ выраженія вышеуказанныхъ погрѣшностей, оправдывающія эту теорему. Введемъ слѣдующія обозначенія погрѣшностей:

$$\xi_m = x - x_m,\ \eta_m = y - y_m,\ \zeta_m = z - z_m,\ \ldots,\ \tau_m = t - t_m, \quad . \quad (4)$$

гдѣ x_m, y_m, z_m, . . ., t_m пусть будетъ система приближенныхъ величинъ, полученныхъ по способу Зейделя послѣ m указанныхъ выше операцій. Система величинъ, получаемыхъ по тому же способу вслѣдъ за нахожденіемъ x_m, y_m, z_m, . . ., t_m, будетъ: x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1}, . . ., t_{m+1}. Величины эти удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\,x_{m+1} + (ab)\,y_m + (ac)\,z_m + \ldots (ap)\,t_m + (aq) - (aA) = 0,\\
&(ba)\,x_{m+1} + (bb)\,y_{m+1} + (bc)\,z_m + \ldots (bp)\,t_m + (bq) - (bA) = 0,\\
&(ca)\,x_{m+1} + (cb)\,y_{m+1} + (cc)\,z_{m+1} + \ldots (cp)\,t_m + (cq) - (cA) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(pa)\,x_{m+1} + (pb)\,y_{m+1} + (pc)\,z_{m+1} + \ldots (pp)\,t_{m+1} + (pq) - (pA) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

Съ помощью уравненій (1), (4) и (5) убѣждаемся, что величины ξ_m, η_m, ζ_m, . . ., τ_m будутъ удовлетворять уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\,\xi_{m+1} + (ab)\,\eta_m + (ac)\,\zeta_m + \ldots + (ap)\,\tau_m = 0,\\
&(ba)\,\xi_{m+1} + (bb)\,\eta_{m+1} + (bc)\,\zeta_m + \ldots + (bp)\,\tau_m = 0,\\
&(ca)\,\xi_{m+1} + (cb)\,\eta_{m+1} + (cc)\,\zeta_{m+4} + \ldots + (cp)\,\tau_m = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(pa)\,\xi_{m+1} + (pb)\,\eta_{m+1} + (pc)\,\zeta_{m+1} + \ldots + (pp)\,\tau_{m+1} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

Уравненія (6) суть однородныя линейныя дифференціальныя (въ конечныхъ разностяхъ) уравненія. Будемъ сначала искать частные интегралы (рѣшенія) этихъ уравненій, имѣющіе форму:

$$\xi_m = \omega \,.\, \alpha^m,\ \eta_m = \omega \,.\, B\alpha^m,\ \zeta_m = \omega \,.\, C\alpha^m,\ \ldots,\ \tau = \omega \,.\, P\alpha^m, \quad . \quad (7)$$

гдѣ ω, α, B, C, . . ., P суть неопредѣленныя пока величины, независящія

*) Выраженія этихъ «вѣсовъ» указаны во II части. Способъ Зейделя связанъ съ вычисленіемъ «вѣсовъ» по Гауссу. Тамъ же уяснится терминъ «парадоксальность» установки наблюденій, въ связи съ закономъ большихъ чиселъ. Здѣсь же причина парадоксальности выяснится въ связи съ способомъ послѣдовательнаго приближенія.

отъ перемѣннаго цѣлаго числа m. Внося рѣшенія (7) въ уравненія (6), получимъ для отысканія неопредѣленныхъ величинъ систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\,\alpha + (ab)\,B + (ac)\,C + \ldots + (ap)\,P = 0,\\
&(ba)\,\alpha + (bb)\,\alpha B + (bc)\,C + \ldots + (bp)\,P = 0,\\
&(ca)\,\alpha + (cb)\,\alpha B + (cc)\,\alpha C + \ldots + (cp)\,P = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(pa) + (pb)\,B + (pc)\,C + \ldots + (pp)\,P = 0.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Исключая изъ этой системы величины B, C, . . ., P, получимъ для опредѣленія α слѣдующее детерминантное уравненіе:

$$\begin{vmatrix}
(aa)\,\alpha, & (ab), & (ac), & \ldots, (ap)\\
(ba)\,\alpha, & (bb)\,\alpha, & (bc), & \ldots, (bp)\\
(ca)\,\alpha, & (cb)\,\alpha, & (cc)\,\alpha, & \ldots, (cp)\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
(pa), & (pb), & (pc), & \ldots, (pp)
\end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Уравненіе (9) степени $\mu - 1$ относительно α и допускаетъ $\mu - 1$ значеній корня α, кои пусть будутъ α_1, α_2, . . . $\alpha_{\mu-1}$. Каждому изъ нихъ будетъ соотвѣтствовать особая серія величинъ B, C, . . . P, опредѣляемыхъ уравненіями (8). Слѣдовательно, получимъ $\mu - 1$ частныхъ интеграловъ подъ формой (7), въ которой ω останется *произвольнымъ постояннымъ*. Общій интегралъ представится уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_m &= \omega_1\alpha_1{}^m + \omega_2\alpha_2{}^m + \ldots \omega_{\mu-1}\alpha^m{}_{\mu-1},\\
\eta_m &= \omega_1 B_1\alpha_1{}^m + \omega_2 B_2\alpha_2{}^m + \ldots \omega_{\mu-1}B_{\mu-1}\alpha^m{}_{\mu-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tau_m &= \omega_1 P_1\alpha_1{}^m + \omega_2 P_2\alpha_2{}^m + \ldots \omega_{\mu-1}P_{\mu-1}\alpha^m{}_{\mu-1},
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ ω_1, ω_2, . . ., $\omega_{\mu-1}$ суть произвольныя постоянны и B_i, C_i . . ., P_i суть опредѣленныя значенія величинъ B, C, . . . P, выводимыя изъ уравненій (8) при $\alpha = \alpha_i$.

Если уравненіе (9) имѣетъ равные корни α, то форма (10) общаго рѣшенія уравненій (6) должна быть нѣсколько измѣнена извѣстнымъ способомъ, но нижеслѣдующіе выводы не теряютъ силу при этой подробности.

Пусть α будетъ *наибольшій* по своему модулю корень уравненія (9), который назовемъ *главнымъ корнемъ*. Соотвѣтствующіе этому корню члены выраженій (10), опредѣляющихъ погрѣшности ξ_m, η_m, . . ., τ_m, будутъ:

$$\omega \,.\, \alpha^m,\ \omega \,.\, B\alpha^m,\ \ldots,\ \omega P\alpha^m.$$

Очевидно, *модуль главнаго корня α долженъ быть менѣе* 1; въ противномъ случаѣ соотвѣтствующіе главному корню α члены выраженій

(10) и, слѣдовательно, погрѣшности ξ_m, η_m, . . ., ζ_m при неограниченномъ возрастаніи m не стремились бы къ нулю, что противорѣчитъ доказанной на стр. 167 теоремѣ Зейделя.

Затѣмъ легко усмотрѣть, что упомянутыя погрѣшности будутъ быстро убывать при возрастаніи m, если модуль главнаго корня будетъ небольшою правильною дробью.

Наоборотъ, если модуль главнаго корня α будетъ правильною дробью, близкою къ 1, то погрѣшности будутъ убывать медленно, т. е. послѣдовательное приближеніе будетъ имѣть медленный, затяжной характеръ. Это послѣднее обстоятельство будетъ имѣть мѣсто тогда, когда детерминантъ

$$D = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), & \ldots, & (ap) \\ (ba), & (bb), & \ldots, & (bp) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (pa), & (pb), & \ldots, & (pp) \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

будетъ имѣть ничтожное, почти аннулирующееся значеніе. Этотъ случай соотвѣтствуетъ, какъ выше было разъяснено, неудачной, пародоксальной постановкѣ самихъ наблюденій, соотвѣтствующей незначительнымъ, ненадежнымъ вѣсамъ выводовъ по способу наименьшихъ квадратовъ. Наблюденія этого рода, если они были произведены тщательно, надо дополнить новыми наблюденіями такъ, чтобы вывести дѣло изъ парадоксальнаго положенія. Теорема, указанная на стр. 168, доказана.

II. Разсмотримъ затѣмъ рѣшеніе опредѣленной системы линейныхъ алгебраическихъ уравненій по способу послѣдовательныхъ приближеній, но внѣ зависимости отъ наблюденій. Происхожденіе этой системы уравненій можетъ быть даже не эмпирическое, а чисто теоретическое, или же можетъ зависѣть отъ какого либо предписанія.

Заданную опредѣленную систему уравненій, содержащую μ неизвѣстныхъ x, y, z, . . ., t, представимъ теперь въ слѣдующей формѣ:

$$\left. \begin{array}{l} a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z + \ldots + a_{k\mu}t - A_k = 0, \\ k = 1,\ 2, \ldots, \mu. \end{array} \right\} \quad \ldots . (12)$$

Чтобы воспользоваться опять теоремой Зейделя, мы можемъ формально принять уравненіе (12) какъ бы за начальныя, выведенныя изъ воображаемыхъ (въ дѣйствительности несуществующихъ) наблюденій, приписать имъ произвольныя вѣса g_1, g_2, . . ., g_μ и опредѣлять неизвѣстныя x, y, z, . . ., t изъ системы уравненій, соотвѣтствующихъ минимуму выраженія:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{k=\mu}^{k=\mu} g_k \cdot (a_{k1}x + a_{k2}y + \ldots + a_{k\mu}t - A_k)^2 \quad \ldots . (13)$$

Эта новая система уравненій будетъ равносильна системѣ уравненій (12), а съ другой стороны будетъ допускать примѣненіе къ себѣ теоремы Зейделя. Соотвѣтствующій этой теоремѣ способъ послѣдовательныхъ приближеній достовѣрно приведетъ съ большею или меньшею быстротою къ приближеннымъ рѣшеніямъ системы уравненій (12). Быстрота приближенія отчасти будетъ зависѣть отъ подбора параметровъ g_1, g_2, . . . g_μ.

Теоретически теорема Зейделя, примѣненная къ отысканію минимума выраженія Q, опредѣляемаго равенствомъ (13), хотя и приводитъ послѣдовательными приближеніями къ рѣшеніямъ уравненій (12), однако же этотъ способъ содержитъ нежелательное осложненіе, требующее преобразовывать систему уравненій (12) къ системѣ, аналогической нормальнымъ уравненіямъ.

III. Избѣгая этого осложненія, можемъ иногда (не всегда) съ успѣхомъ примѣнять способъ послѣдовательныхъ приближеній непосредственно къ системѣ уравненій (12).

Такъ, возьмемъ наугадъ, какъ и въ способѣ Зейделя, группу *первыхъ* приближенныхъ величинъ

$$x_0,\ y_0,\ z_0, \ldots, t_0;$$

а затѣмъ найдемъ послѣдовательныя группы величинъ:

$$\begin{array}{l} x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots, t_1 \\ x_2,\ y_2,\ z_2, \ldots, t_2 \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x_m,\ y_m,\ z_m, \ldots, t_m \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

выводимыя при помощи слѣдующей системы уравненій:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_{m+1} + a_{12}y_m + a_{13}z_m + \ldots + a_{1\mu}t_m = A_1, \\ a_{21}x_{m+1} + a_{22}y_{m+1} + a_{23}z_m + \ldots + a_{2\mu}t_m = A_2, \\ a_{31}x_{m+1} + a_{32}y_{m+1} + a_{33}z_{m+1} + \ldots + a_{3\mu}t_m = A_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\mu1}x_{m+1} + a_{\mu2}y_{m+1} + a_{\mu3}z_{m+1} + \ldots + a_{\mu\mu}t_{m+1} = A_\mu. \end{array} \right\} \ldots (14)$$

Обсудимъ вопросъ, будутъ ли величины x_m, y_m, z_m, . . ., t_m при возрастаніи m до ∞ стремиться къ величинамъ x, y, z, . . ., t, удовлетворяющимъ уравненіямъ (12).

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| + \ldots + \left|\frac{a_{1\mu}}{a_{11}}\right|,\\
P_2 &= \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| P_1 + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| + \ldots + \left|\frac{a_{2\mu}}{a_{22}}\right|,\\
P_3 &= \left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| P_1 + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| P_2 + \ldots + \left|\frac{a_{3\mu}}{a_{33}}\right|,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_\mu &= \left|\frac{a_{\mu 1}}{a_{\mu\mu}}\right| P_1 + \left|\frac{a_{\mu 2}}{a_{\mu\mu}}\right| P_2 + \ldots + \left|\frac{a_{\mu(\mu-1)}}{a_{\mu\mu}}\right| P_{\mu-1},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

гдѣ вообще символъ $|x|$ обозначаетъ абсолютную величину x. Уравненія (15) опредѣляютъ группу положительныхъ величинъ $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\mu$. Пусть P есть наибольшая изъ нихъ.

Теорема. Если $P < 1$, то количества $x_m, y_m, z_m, \ldots, t_m$ должны при неограниченномъ возрастаніи m стремиться къ рѣшеніямъ $x, y, z, \ldots, t$ системы уравненій (12), и абсолютныя величины погрѣшностей

$$x - x_m, \quad y - y_m, \quad z - z_m, \quad \ldots, \quad t - t_m$$

должны быть соотвѣтственно менѣе величинъ:

$$\frac{P_1\delta}{1-P}, \quad \frac{P_2\delta}{1-P}, \quad \frac{P_3\delta}{1-P}, \quad \frac{P_\mu\delta}{1-P},$$

гдѣ δ есть наибольшая изъ величинъ:

$$|y_{m+1} - y_m|, \quad |z_{m+1} - z_m|, \quad \ldots, \quad |t_{m+1} - t_m|.$$

Доказательство. Изъ уравненій (14) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\Delta x_{m+1} + a_{12}\Delta y_m + \ldots + a_{1\mu}\Delta t_m &= 0,\\
a_{21}\Delta x_{m+1} + a_{22}\Delta y_{m+1} + \ldots + a_{2\mu}\Delta t_m &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{\mu 1}\Delta x_{m+1} + a_{\mu 2}\Delta y_{m+1} + \ldots + a_{\mu\mu}\Delta t_{m+1} &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

гдѣ

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m, \quad \Delta y_m = y_{m+1} - y_m, \quad \ldots, \quad \Delta t_m = t_{m+1} - t_m.$$

Обозначимъ абсолютныя значенія величинъ $\Delta y_m, \Delta z_m, \ldots, \Delta t_m$ символами $\eta'_m, \zeta'_m, \ldots, \tau'_m$. Наибольшая изъ этихъ величинъ, по условію теоремы, есть δ.

Затѣмъ разсмотримъ функціи $\xi'_{m+k}, \eta'_{m+k}, \zeta'_{m+k}, \ldots, \tau'_{m+k}$ перемѣннаго цѣлаго числа k, опредѣляемыя съ помощію слѣдующей системы дифференціальныхъ (въ конечныхъ разностяхъ) уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
+|a_{11}|\,\xi'_{m+k+1} - |a_{12}|\,\eta'_{m+k} - \ldots - |a_{1\mu}|\,\tau'_{m+k} &= 0,\\
-|a_{21}|\,\xi'_{m+k+1} + |a_{22}|\,\eta'_{m+k+1} - \ldots - |a_{2\mu}|\,\tau'_{m+k} &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-|a_{\mu 1}|\,\xi'_{m+k+1} - |a_{\mu 2}|\,\eta'_{m+k+1} - \ldots + |a_{\mu\mu}|\,\tau'_{m+k+1} &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Если въ системѣ (17) число k послѣдовательно замѣнять числами: 0, 1, 2, . . . , то полученныя такимъ образомъ системы уравненій могутъ служить для послѣдовательнаго вычисленія величинъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi'_{m+1}, \ \eta'_{m+1}, \ \ldots, \ \tau'_{m+1},\\
&\xi'_{m+2}, \ \eta'_{m+2}, \ \ldots, \ \tau'_{m+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi'_{m+k}, \ \eta'_{m+k}, \ \ldots, \ \tau'_{m+k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Не трудно при этомъ убѣдиться, что каждая изъ величинъ (18) положительная и меньше соотвѣтственной изъ величинъ:

$$\left.\begin{aligned}
&P_1\delta, \quad P_2\delta, \ \ldots, \quad P_\mu\delta,\\
&P_1\delta P, \ P_2\delta P, \ \ldots, \ P_\mu\delta P,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_1\delta P^k, \ P_2\delta P^k, \ \ldots, \ P_\mu\delta P^k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

гдѣ $P_1, P_2, \ldots, P_\mu, P$ и δ суть величины, значеніе которыхъ разъяснено выше.

Съ другой стороны систета (16), если въ ней число m послѣдовательно замѣнять числами m, $m+1$, $m+2$, . . . , даетъ возможность послѣдовательно получать величины:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta x_{m+1}, \ \Delta y_{m+1}, \ \ldots, \ \Delta t_{m+1},\\
&\Delta x_{m+2}, \ \Delta y_{m+2}, \ \ldots, \ \Delta t_{m+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta x_{m+k}, \ \Delta y_{m+k}, \ \ldots, \ \Delta t_{m+k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Если сопоставить выраженіе какой либо изъ величинъ (20) посредствомъ $\Delta y_m, \ldots, \Delta t_m$ съ выраженіемъ соотвѣтственной изъ величинъ (18) посредствомъ $\eta'_m, \ldots, \tau'_m$, то легко замѣтимъ, что то и другое выраженіе состоитъ изъ одинаковаго числа членовъ, но абсолютныя значенія членовъ перваго выраженія *менѣе* соотвѣтственныхъ членовъ второго выра-

женія. Поэтому абсолютныя значенія величинъ (20) менѣе соотвѣтственныхъ величинъ (18) и менѣе соотвѣтственныхъ величинъ (19). Вмѣстѣ съ тѣмъ, если $P < 1$, величины Δx_{m+k}, Δy_{m+k}, Δz_{m+k}, . . . , Δt_{m+k} при возрастаніи k до безконечности должны стремиться къ нулю, убывая по абсолютнымъ ихъ значеніямъ быстрѣе, чѣмъ величины $P_1\delta P^k$, $P_2\delta P^k$, . . . , $P_k\delta P^k$. Отсюда слѣдуетъ первая половина доказываемой теоремы.

Погрѣшность приближенной величины x_{m+1} есть

$$x - x_{m+1} = \Delta x_{m+1} + \Delta x_{m+2} + \ldots + \Delta x_{m+k} + \ldots$$

Очевидно, абсолютная величина этой погрѣшности менѣе суммы

$$P_1\delta + P_1\delta P + \ldots + P_1\delta P^k + \ldots,$$

т. е. менѣе

$$\frac{P_1\delta}{1-P}.$$

Подобнымъ образомъ при $P < 1$ абсолютныя значенія погрѣшностей приближенныхъ величинъ y_{m+1}, . . . , t_{m+1} менѣе соотвѣтственныхъ величинъ:

$$\frac{P_2\delta}{1-P}, \ldots, \frac{P_\mu\delta}{1-P}.$$

Теорема доказана и во второй ея половинѣ.

Условія этой теоремы хорошо оправдываются тогда, когда при $i > k$ всѣ величины вида $\left|\frac{a_{ki}}{a_{kk}}\right|$ малы, т. е. когда система уравненій (12) представляетъ незначительную пертурбацію сравнительно съ системой (A), § 24.

ГЛАВА IV.

Вспомогательныя формулы и функціи математическаго анализа, относящіяся къ коеффиціентамъ и кривымъ вѣроятности и къ закону большихъ чиселъ *).

§ 27. Нѣкоторыя формулы и теоремы анализа и интегральнаго исчисленія.

$n^0$1. Въ выводахъ теоріи вѣроятностей приходится пользоваться различными вспомогательными теоріями математическаго анализа. Между прочимъ, мы будемъ часто пользоваться слѣдующими извѣстными формулами и теоремами интегральнаго исчисленія.

I. Пусть функціи $f(x)$ и $F(x)$ при измѣненіи *вещественнаго* или *дѣйствительнаго* перемѣннаго x въ предѣлахъ отъ a до b остаются конечными и непрерывными и представляютъ собою количества дѣйствительныя, а функція $F(x)$ остается, кромѣ того, положительною. При этихъ условіяхъ будемъ имѣть *теорему*:

$$\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b F(x)\,dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ ξ есть количество, заключающееся въ предѣлахъ a и b,

$$\xi = a + (b-a)\,\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Равенство (2) выводится какъ слѣдствіе того, что выраженіе

$$\frac{A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

въ которомъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть величины положительныя и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть количества дѣйствительныя, есть *среднее* изъ этихъ послѣднихъ количествъ, т. е. заключается между наименьшимъ и наибольшимъ изъ количествъ: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ совпадаютъ съ зна-

*) Для изучающихъ только вторую часть настоящей книги эта глава не нужна.

ченіями выраженія $F(x)\,dx$, а количества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть значенія функціи $f(x)$, то дробное выраженіе

$$\frac{\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx}{\int_a^b F(x)\,dx}$$

будетъ частнымъ случаемъ выраженія (3) и будетъ представлять среднее изъ значеній функціи $f(x)$ при измѣненіи x отъ a до b, т. е. величину $f(\xi)$. Отсюда слѣдуетъ формула (2).

II. Пусть функціи $f(x)$ и $F(x)$ при измѣненіи *дѣйствительнаго* перемѣннаго x отъ a до b остаются конечными и непрерывными. Предположимъ, что функція $f(x)$ представляетъ величину комплексную:

$$f(x) = f_1(x) + i\,f_2(x),\ i = \sqrt{-1},$$

гдѣ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суть дѣйствительныя количества. Функція $F(x)$ пусть остается величиною дѣйствительною и положительною. При этихъ условіяхъ будемъ имѣть *теорему*:

$$\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx = \lambda\,f(\xi)\int_a^b F(x)\,dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ λ есть комплексное количество, модуль котораго менѣе 1, и ξ есть дѣйствительная величина, заключенная между a и b,

$$\xi = a + (b-a)\,\theta;\quad 0 < \theta < 1.$$

Для вывода формулы (4), которая дана впервые Дарбу *), можемъ воспользоваться, во-первыхъ, извѣстнымъ свойствомъ модуля суммы, показывающимъ, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx\right| = \theta_1\int_a^b |f(x)|\,F(x)\,dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

гдѣ $0 < \theta_1 < 1$ и $|z|$ есть модуль z. Во-вторыхъ, можемъ воспользоваться формулой (2), на основаніи которой находимъ:

$$\int_a^b |f(x)|\,F(x)\,dx = |f(\xi)|\int_a^b F(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4'')$$

Изъ равенствъ (4′) и (4″) слѣдуетъ равенство (4).

*) См. Journal de Mathématiques pures et appliquées. 1876.

Количество λ (множитель Дарбу) въ равенствѣ (4) должно обращаться въ 1, если мнимая часть $if_2(x)$ перемѣннаго $f(x)$ обращается въ нуль; ибо при этомъ предѣльномъ условіи формула (4) должна переходить въ формулу (2).

Функціи составного мнимаго (комплекснаго) перемѣннаго

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

являясь *геометрическими векторами* *), *т. е. направленными радіусами*, силами, скоростями и пр., оказываютъ со временъ Коши и Римана реальныя услуги въ изслѣдованіяхъ физики, механики **) и теоріи вѣроятностей. Формула (4) Дарбу, по этому, оказывается важною въ анализѣ вообще. Въ частности она играетъ роль въ оцѣнкѣ дополнительныхъ членовъ, сопровождающихъ ряды анализа и являющихся погрѣшностями въ различныхъ приближенныхъ исчисленіяхъ, излюбленныхъ практикою.

III. Примѣнимъ формулу (4) Дарбу къ извѣстному выраженію:

$$R_{s+1} = \frac{z_{s+1}}{1.2\ldots s}\int_0^1 (1-x)^s\,\varphi^{(s+1)}(z_0 + zx), \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

представляющему дополнительный или остаточный членъ ряда Тейлора

$$\varphi(z_0 + z) = \varphi(z_0) + \frac{z}{1}\cdot\varphi'(z_0) + \ldots + \frac{z^s}{1.2\ldots s}\cdot\varphi^{(s)}(z_0) + R_{s+1}. \quad (6)$$

Полагая въ формулѣ (4) $a = 0$, $b = 1$,

$$F(x) = (1-x)^s,\ f(x) = \varphi^{(s+1)}(z_0 + zx) : \varphi^{(s+1)}(z_0)$$

и принимая во вниманіе обозначеніе (5), по формулѣ Дарбу находимъ:

$$R_{s+1} = \lambda.\frac{z^{s+1}}{1.2\ldots s}\,\varphi^{(s+1)}(z_0 + z.\theta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ $\theta = (0,1)$ и λ есть множитель Дарбу;

$$0 < \theta < 1 \text{ и } |\lambda| < 1.$$

*) Элементарная геометрическая теорія векторовъ и векторныхъ функцій, зависящихъ отъ составного перемѣннаго, кратко изложена въ нашей книгѣ: «Приложеніе алгебры къ геометріи», Глава VII. Москва, 1897.

**) *Г. В. Колосовъ*: «О приложеніи теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго къ задачѣ математ. теоріи упругости». Юрьевъ, 1909.

Здѣсь вопросы сводятся къ задачѣ Дирикле. Въ примѣненіи же къ движенію твердаго тѣла комплексное перемѣнное употребляется въ изслѣдованіи С. В. Ковалевской, а также въ моемъ трудѣ: «Аналитическое изслѣдованіе одного случая движенія тяжелаго твердаго тѣла». (Математ. Сборн., т. XVIII, и Mathematische Annalen, Bd. 47. Leipzig).

Множитель λ Дарбу обязательно мнимый, пока функція

$$\varphi(z_0 + z \,.\, x) : \varphi(z_0)$$

вещественнаго перемѣннаго x мнимая, т. е. представляется въ формѣ:

$$\varphi(z_0 + z \,.\, x) : \varphi(z_0) = f_1(x) + i f_2(x),$$

гдѣ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суть вещественныя функціи и функція $f_2(x)$ вообще отлична отъ нуля.

Если же указанная сейчасъ функція $f_2(x)$ при разныхъ значеніяхъ вещественнаго перемѣннаго x вообще есть нуль, то множитель λ Дарбу есть 1, т. е. при этомъ особомъ условіи будемъ имѣть слѣдующую извѣстную форму остаточнаго члена R_{s+1} ряда Тейлора:

$$R_{s+1} = \frac{z^{s+1}}{1 \,.\, 2, \ldots s} \cdot \varphi^{(s+1)}(z_0 + z \,.\, \theta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ $\theta = (0, 1)$.

§ 28. Формула Эйлера.

Связь между суммами или интегралами по конечнымъ разностямъ и аналитическими интегралами устанавливается при помощи формулы Эйлера. Этою связью очень часто приходится пользоваться въ исчисленіи вѣроятностей, какъ и въ числовой геометріи.

Выведемъ формулу Эйлера въ простѣйшемъ выраженіи, когда она совпадаетъ съ формулою квадратуръ по извѣстному способу трапецій; при этомъ снабдимъ ее остаточнымъ членомъ для оцѣнки погрѣшности приближеннаго вычисленія.

Посредствомъ формулы Тейлора находимъ:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots +$$

$$+ \frac{h^m}{1 \,.\, 2 \ldots m} f^{(m)}(x) + \frac{h^{m+1}}{1 \,.\, 2 \ldots m} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x + ht)\, dt \,. \quad (1)$$

Напишемъ эту формулу въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ: 1) когда $m = 2$ и $f(x) = F(x)$ и 2) когда $m = 1$ и $f(x) = F'(x)$. Получимъ уравненія:

$$\Delta F(x) = \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \frac{h^3}{1.2} \int_0^1 (1-t)^2 F'''(x + ht)\, dt,$$

$$\Delta F'(x) = \frac{h}{1} F''(x) + \frac{h^2}{1.2} \int_0^1 (1-t) F'''(x + ht)\, dt.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій производную $F''(x)$ и выразивъ производную $F'(x)$ черезъ $\Delta F(x)$ и $\Delta F''(x)$, найдемъ:

$$h F'(x) = \Delta F(x) - \frac{1}{2} h \Delta F'(x) + \frac{h^3}{2} \int_0^1 t(1-t) F'''(x + ht)\, dt.$$

Иначе:

$$h F'(x) = F(x + h) - F(x) - \frac{1}{2} h [F'(x + h) - F'(x)]$$

$$+ \frac{h^3}{2} \int_0^1 t(1-t) F'''(x + ht)\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Дадимъ въ этомъ равенствѣ количеству x слѣдующія значенія: α, $\alpha + h$, $\alpha + 2h, \ldots, \alpha + sh - h$ и затѣмъ сложимъ всѣ полученныя равенства. Въ найденномъ результатѣ сложенія положимъ: $F'(x) = f(x)$. Послѣ этого получимъ искомую формулу съ дополнительнымъ членомъ,

$$f(\alpha) + f(\alpha + h) + f(\alpha + 2h) + \ldots + f(\alpha + sh - h) =$$

$$= \int_\alpha^{\alpha + s.h} f(x) \,.\, \frac{dx}{h} - \frac{1}{2} \,.\, [f(\alpha + sh) - f(\alpha)] + R, \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ

$$R = \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^1 t \,.\, (1-t) \,.\, \Phi(t)\, dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{k=s-1} f''(\alpha + k \,.\, h + h.t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3'')$$

Формула (3) сводитъ вычисленіе суммы къ квадратурѣ кривой

$$y = f(x) : h,$$

т. е. къ вычисленію интеграла:

$$J = \int_\alpha^{\alpha + sh} f(x) \frac{dx}{h}.$$

Дополнительный или остаточный членъ R формулы (3), смотря по свойствамъ функціи $\Phi(t)$, можетъ быть различно представленъ, опираясь на формулы § 27.

Такъ, если функція $\Phi(t)$ *не мѣняетъ своего знака* при измѣненіи t въ предѣлахъ интеграла (3′), то она можетъ быть оставлена подъ знакомъ интеграла, а ея множитель $t \,.\, (1-t)$ вынесенъ за знакъ инте-

грала примѣнительно къ формулѣ (2) § 27, т. е. съ значеніемъ τ перемѣннаго t, среднимъ между предѣлами интеграла. Получимъ:

$$R = \frac{h^2 . \tau . (1-\tau)}{2} \int_0^1 \Phi(t)\, dt = \frac{h . \tau (1-\tau)}{2} . \{f'(\alpha + sh) - f'(\alpha)\}, \quad (4)$$

$$0 < \tau < 1.$$

Если же функція $\Phi(t)$ мѣняетъ свой знакъ при измѣненіи t въ предѣлахъ интеграла (3′), то примѣняется слѣдующій планъ оцѣнки остаточнаго члена R. Перемѣна знака функціи $\Phi(t)$ находится въ связи съ перемѣною знака слагаемыхъ суммы (3″), имѣющихъ видъ

$$f''(\alpha + kh + ht),$$

въ каковыхъ членахъ перемѣнное $\alpha + kh + ht$ получаетъ разныя значенія, всегда заключенныя въ промежуткѣ $(\alpha, \alpha + sh)$.

Пусть производная $f''(x)$ есть непрерывная функція отъ x; она мѣняетъ свой знакъ только при переходѣ x черезъ корни уравненія:

$$f''(x) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

соотвѣтствующіе *точкамъ перегиба* кривой:

$$y = f(x) : h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Пусть абсциссы x точекъ перегиба, содержащіяся между α и $\alpha + s . h$, послѣдовательно будутъ: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Въ промежуткахъ $(\alpha, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, \alpha + sh)$ пусть кривая (6) уже не имѣетъ точекъ перегиба. Пусть

$$\mu_m = E_{(-1)}\left(\frac{x_m - \alpha}{h}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6')$$

т. е. μ_m есть результатъ округленія числа $(x_m - \alpha) : h$ (см. выше, § 16). Слѣдовательно,

$$\alpha + \mu_m h - h < x_m < \alpha + \mu_m h,$$

Пусть между числами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ нѣтъ равныхъ. Введемъ еще обозначенія:

$$\mu_0 = 0, \ \mu_{n+1} = s,$$

$$x_0 = \alpha, \ x_{n+1} = \alpha + sh,$$

$$\Phi_m(t) = \sum_{k=\mu_m}^{k=\mu_{m+1}-1} f''(\alpha + k . h + ht), \ m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Будемъ имѣть:

$$\Phi(t) = \Phi_0(t) + \Phi_1(t) + \ldots + \Phi_n(t) \quad \ldots\ldots (7)$$

При этомъ каждая функція $\Phi_m(t)$, представляя сумму членовъ

$$f''(\alpha + kh + ht)$$

одного и того же знака (кромѣ перваго изъ слагаемыхъ членовъ, знакъ котораго измѣняется въ зависимости отъ t и который принадлежа къ области корня x_m уравненія (6), ничтоженъ и покрывается послѣдующими членами), будетъ вообще сохранять свой знакъ въ предѣлахъ интеграла (3′) (рѣдкія исключенія не будемъ разсматривать). Поэтому для каждаго интеграла $R^{(m)}$ вида:

$$R^{(m)} = \frac{h^2}{2} \int_0^1 t(1-t) . \Phi_m(t)\, dt \quad \ldots\ldots (8)$$

должна существовать формула, аналогичная формулѣ (4) именно:

$$R^{(m)} = \frac{h}{2} . \tau_m (1-\tau_m) . \{f'(\alpha + \mu_{m+1} . h) - f'(\alpha + \mu_m . h)\}, \ 0 < \tau_m < 1.$$

Отсюда и изъ равенства:

$$R = R^{(0)} + R^{(1)} + \ldots + R^{(n)},$$

являющагося слѣдствіемъ формулъ (3′), (7) и (8), находимъ:

$$R = \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{m=n} \tau_m (1-\tau_m) \{f'(\alpha + \mu_{m+1} . h) - f'(\alpha + \mu_m . h)\}. \quad (9)$$

Предполагая, что всѣ корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравненія (6) простые (некратные) и соотвѣтствуютъ чередованію максимумовъ функціи $f'(x)$ съ ея минимумами, и замѣчая, что корни эти при маломъ h близки соотвѣтственно къ величинамъ $\alpha + \mu_1 h$, $\alpha + \mu_2 h, \ldots, \alpha + \mu_n h$, можемъ во множествѣ случаевъ ожидать, что въ суммѣ (9) положительные по числовой величинѣ члены будутъ чередоваться съ отрицательными. Пропуская во второй части равенства (9) то всѣ положительные по величинѣ члены, то всѣ отрицательные и въ результатахъ замѣняя выраженія $\tau_m(1-\tau_m)$ ихъ высшимъ предѣломъ $^1/_4$, получимъ неравенства:

$$\frac{8}{h} \overset{(-)}{\sum} \{f'(\alpha + \mu_{m+1} h) - f'(\alpha + \mu_m h)\} < R < \frac{h}{8} \overset{(+)}{\sum} \{f'(\alpha + \mu_{m+1} . h) - f'(\alpha \mu_m + h)\} \quad (10)$$

гдѣ $\overset{(+)}{\sum}$ и $\overset{(-)}{\sum}$ суть отдѣльно: 1) совокупность положительныхъ и 2) совокупность отрицательныхъ членовъ суммы

$$\sum_{m=0}^{m=n} \{f'(\alpha + \mu_{m+1} h) - f'(\alpha + \mu_m h)\}.$$

Изъ свойствъ аритмологическаго символа (6′) и изъ чередованія максимумовъ и минимумовъ функціи $f'(x)$, соотвѣтствующихъ корнямъ x_1, $x_2, \ldots, x_n$, легко обнаруживается, что вмѣстѣ съ неравенствами (10) должны имѣть силу неравенства:

$$\frac{h}{8}\overset{(-)}{\S}\{f'(x_{m+1})-f'(x_m)\}<R<\frac{h}{8}\overset{(+)}{\S}\{f'(x_{m+1})-f'(x_m)\} \quad . \quad (10')$$

Формулы (9) и (10) или (10′) часто бываютъ рѣшающими при оцѣнкѣ остаточнаго члена R, т. е. погрѣшности приближеннаго вычисленія суммъ при помощи формулы Эйлера.

Въ примѣненіяхъ закона большихъ чиселъ намъ представляется случай (см. ниже § 32), когда кривыя вѣроятности, имѣя форму (6), содержатъ только двѣ точки перегиба, соотвѣтствующія двумъ корнямъ x_1 и x_2 уравненія (5).

§ 29. Производящія функціи или женератрисы, какъ опредѣлительницы другихъ функцій. Векторныя ариѳметическія среднія и интегралы Коши, прилагаемые къ производящимъ функціямъ.

Въ третьей части настоящей книги мы будемъ исходить изъ теоріи производящихъ функцій (женератрисъ), которую я нѣсколько видоизмѣню, приспособляя ее къ таблицѣ § 12 и къ задачамъ исчисленія вѣроятностей.

Обозначимъ черезъ z перемѣнную величину, которую назовемъ *параметромъ*. Вообразимъ полиномъ $\varphi(z)$ вида:

$$\varphi(z)=\Delta v_{x_1}.z^{x_1}+\ldots+\Delta v_{x_l}.z^{x_l}+\ldots+\Delta v_{x_{a-1}}.z^{x_{a-1}}, \quad . \quad (1)$$

гдѣ v_x есть функція перемѣннаго x, значенія котораго записаны въ таблицу § 12 и исчерпываются строкою:

$$x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_{a-1}, x_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Равенство (1) сокращенно обозначаютъ, по усмотрѣнію, либо такъ:

$$\varphi(u)=\sum_{l=1}^{l=a-1}\Delta v_{x_l}.z^{x_l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

либо такъ:

$$\varphi(u)=\sum_{x_1}^{x_a}\Delta v_{x_l}.z^{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'')$$

гдѣ $\sum_{x_1}^{x_a}$ есть знакъ интегрированія (въ предѣлахъ x_1 и x_a) по данному ряду значеній перемѣннаго x.

Эти обозначенія соотвѣтствуютъ установившемуся въ математикѣ обычаю. Число a членовъ въ формулѣ (1) можетъ быть безконечнымъ; этотъ случай есть предѣльный относительно того случая, когда число a конечное, т. е. когда формула (1) есть полиномъ.

Если всѣ разности Δv_{x_l} и Δx_l суть безгранично малыя величины, то въ предѣлѣ ихъ замѣняютъ символами dv_x и dx, а знакъ $\sum$ замѣняютъ знакомъ $\int$.

Функцію $\varphi(z)$ назовемъ *производящею функціей* относительно *опредѣляемой* функціи Δv_x, ибо разложеніе функціи $\varphi(z)$ по степенямъ z опредѣляетъ своими коэффиціентами числовую функцію Δv_x. Напримѣръ, биномъ Ньютона $(a+bz)^m$ опредѣляетъ числовую функцію:

$$\Delta v_x=a^m.\overset{x}{C}_m\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^x,$$

гдѣ C_m^x есть число сочетаній изъ m элементовъ по x. Терминъ «производящая функція» или «женератриса» введенъ впервые въ науку Лапласомъ. Коши, Дарбу, Риманъ и другіе распространили теорію женератрисъ на тотъ случай, когда перемѣнное z въ функціи $\varphi(z)$ представляется геометрическимъ векторомъ или составною мнимою величиною $z=\xi+\eta\sqrt{-1}$, гдѣ ξ и η суть вещественныя величины, опредѣляющія произвольную точку (ξ, η) плоскости (*карты* или *основанія* декартовской *діаграммы*) съ прямоугольными координатами ξ и η.

При этомъ не только перемѣнное z, но и его функція $\varphi(z)$ дѣлаются въ разсматриваемомъ графическомъ пространствѣ геометрическими величинами (см. главу VII въ моей книгѣ «Приложеніе алгебры къ геометріи»).

Точка (ξ, η) вполнѣ опредѣляетъ мнимую величину $\xi+\eta.\sqrt{-1}$, которую можно представить такъ:

$$z=\xi+\eta.\sqrt{-1}=r.(\cos\theta+\sqrt{-1}.\sin\theta)=$$
$$=r.e^{\theta i}, \quad i=\sqrt{-1},$$

гдѣ r и θ суть *полярныя* координаты точки (ξ, η), а также суть *модуль и амплитуда* мнимой величины $\xi+\eta.\sqrt{-1}$. Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ обозначенія (1′) будетъ слѣдовать:

$$\varphi(r.e^{\theta i})=\sum_{l=1}^{l=a-1}\Delta v_{x_l}.(r.e^{\theta i})^{x_l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$.

Въ обычной теоріи женератрисъ показатели x_l членовъ разложенія (2) считаются цѣлыми числами, положительными и отрицательными. Обобщая

эту теорію, мы будемъ считать показатели x_l какими нибудь вещественными числами, цѣлыми, дробными, положительными и отрицательными. Это обобщеніе играетъ рѣшительную роль въ тѣхъ вопросахъ, кои трактуются въ части III настоящей книги.

Теперь предложимъ себѣ такую задачу.

Задача. *Женератриса $\varphi(z)$ опредѣлена количественно и опредѣлены строкою (A) показатели x_l членовъ ея разложенія по степенямъ z; найти выраженіе числовой функціи Δv_x.*

Рѣшеніе. Примѣчательныя формулы Коши даютъ рѣшеніе этой задачи. Пусть h есть *общая наибольшая мѣра* всѣхъ возможныхъ разностей значеній перемѣннаго x_l, записанныхъ въ строкѣ (A). Слѣдовательно, всѣ числа:

$$\frac{x_1-x}{h}, \frac{x_2-x}{h}, \ldots, \frac{x_l-x}{h}, \ldots, \frac{x_a-x}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ x есть одинъ изъ членовъ строки (A), суть *цѣлыя*, и общій наибольшій дѣлитель этихъ чиселъ есть 1. Пусть далѣе s есть перемѣнное цѣлое число, *неограниченно* возрастающее, и вообразимъ *среднеариѳметическое* значеніе s величинъ:

$$\frac{\varphi(z_0)}{z_0^x}, \frac{\varphi(z_1)}{z_1^x}, \ldots, \frac{\varphi(z_k)}{z_k^x}, \ldots, \frac{\varphi(z_{s-1})}{z_{s-1}^x},$$

гдѣ вообще

$$z_k = r \cdot e^{\left(\theta_0+\frac{2k\pi}{sh}\right)i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Предѣлъ этого средняго значенія при возрастаніи s до ∞ обозначимъ вообще символомъ

$$\mathfrak{M}\frac{\varphi(z)}{z^x},$$

т. е. положимъ:

$$\mathfrak{M}\frac{\varphi(z)}{z^x} = lim\left\{\frac{1}{s}\left[\frac{\varphi(z_0)}{z_0^x}+\frac{\varphi(z_1)}{z_1^x}+\ldots+\frac{\varphi(z_{s-1})}{z_{s-1}^x}\right]\right\}_{s=\infty} \quad . \quad . \quad (5)$$

Этотъ предѣлъ назовемъ *векторнымъ среднимъ значеніемъ* функціи $z^{-x}\varphi(z)$ для даннаго модуля r перемѣннаго z.

При помощи этого этого обозначенія и равенствъ (1), (2) и (4) находимъ:

$$\mathfrak{M}\frac{\varphi(z)}{z^x} = lim\left\{\sum_{l=1}^{l=a-1} A_l \cdot \Delta v_{x_l} \cdot (re^{\theta_0 i})^{x_l-x}\right\}_{s=\infty} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ

$$A_l = \frac{1}{s}(1+q_l+q_l^2+\ldots+q_l^{s-1}),$$

$$q_l = e^{\frac{2\pi(x_l-x)i}{s\,.\,h}}$$

Если x_l совпадаетъ съ x, то, очевидно, $A_l = 1$. Если же x_l не совпадаетъ съ x, то

$$lim\, A_l = lim\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{q_l^s-1}{q_l-1}\right\} = 0;$$

ибо число

$$\frac{x_l-x}{h}$$

есть цѣлое и, слѣдовательно, $q^s{}_l = 1$. Въ силу этихъ *предѣльныхъ* свойствъ количества A_l вторая часть равенства (6) обращается въ Δv_x. Отсюда слѣдуетъ рѣшеніе предложенной задачи:

$$\Delta v_x = \mathfrak{M}\frac{\varphi(z)}{z^x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Представимъ это рѣшеніе задачи въ другомъ видѣ. Полагая

$$\Delta\theta = \frac{\theta_1-\theta_0}{s},$$

введемъ обозначеніе:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)\,d\theta = lim\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1} f(\theta_0+k\Delta\theta)\,.\,\Delta\theta\right\}_{s=\infty} =$$

$$= lim\{[f(\theta_0)+f(\theta_0+\Delta\theta)+f(_0+2\Delta\theta)+\ldots+f(\theta_0+s\,.\,\Delta\theta-\Delta\theta)]\,.\,\Delta\theta\}.$$

Сближая это обозначеніе съ обозначеніемъ (5), убѣждаемся, что

$$\mathfrak{M}\frac{\varphi(z)}{z^k} = \frac{h}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{2\pi}{h}} \varphi(re^{\theta i})\,(re^{\theta i})^{-x}\,d\theta.$$

Поэтому равенство (7) можетъ быть представлено въ формѣ:

$$\Delta v_x = \frac{h}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{2\pi}{h}} \varphi(re^{\theta i})\,.\,(re^{\theta i})^{-x}d\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Обобщая предшествующіе выводы, можемъ предположить, что строка (A) содержитъ *безконечное* число членовъ. Въ такомъ случаѣ вторая часть равенства (1), т. е. разложеніе производящей функціи $\varphi(z)$ по степенямъ перемѣннаго z, будетъ *безконечнымъ рядомъ*. Если этотъ рядъ будетъ *сходящимся*, то предшествующія разсужденія и формулы (7) и (9), рѣшающія вышеприведенную задачу, сохранятъ силу также и въ этомъ особомъ случаѣ, когда вышеуказанная таблица оказывается *безконечною*, необъятною.

Мы беремъ лишь ту часть ученія о производящихъ функціяхъ, которая намъ потребуется ниже. Съ помощію этого ученія прежде всего получается обоснованіе элементарной теоріи функцій составного перемѣннаго съ теоріей ряда Лагранжа.

§ 30. Рядъ Лагранжа.

Не только рядъ Тейлора, но и рядъ Лагранжа, ниже приводимый и всесторонне изслѣдованный въ нашей диссертаціи «Рядъ Лагранжа», играетъ важную роль въ слѣдующихъ задачахъ анализа: 1) въ задачѣ «обращенія» аналитическихъ функцій, когда независимое перемѣнное x и его функція $y = \psi(x)$ мѣняются ролями, т. е. требуется опредѣлить *обратную* зависимость *): $x = \phi(y)$; 2) въ задачѣ изслѣдованія вѣроятности, соотвѣтствующей Пуассонову закону большихъ чиселъ и его обобщеніямъ (см. § 14_2, пунктъ III, и см. ниже); 3) въ задачѣ Кеплера и вообще въ задачахъ земной и небесной механики, рѣшаемыхъ съ помощію безконечныхъ рядовъ и приближеннаго вычисленія функцій весьма большого числа m, встрѣчающихся въ математич. физикѣ; 4) въ задачѣ аналитическаго продолженія функцій перемѣннаго x изъ одной области перемѣннаго въ другую (см. выше §§ 15 и 21_2 и см. *В. А. Анисимова*: Предѣльный кругъ Фукса. Варшава. 1892).

Формулируемъ основную теорему о рядѣ Лагранжа, которая намъ будетъ полезна. Теорема Руше, являющаяся результатомъ метода Коши, даетъ простѣйшее рѣшеніе вопросовъ теоріи ряда Лагранжа.

Хотя эти условія не всегда въ состояніи обнять полный кругъ сходимости ряда Лагранжа **), однако простота ихъ выраженія дѣлаетъ теорему Коши-Руше особенно удобопримѣнимою для разъясненія нѣкоторыхъ важныхъ вопросовъ.

Теорема Руше. *Пусть $f(\zeta + z)$ есть функція конечная, непрерывная и однозначная* (въ итогѣ голоморфная, какъ объясняется въ теоріи функцій) *для всѣхъ значеній z, модули которыхъ менѣе r_1, и неравная нулю при $z = 0$. Пусть r есть данное положительное количество, меньшее r_1. Если θ возрастаетъ отъ 0 до 2π и если при этомъ измѣненіи модуль тахітит тахітогит функціи*

$$\frac{t}{r} f(\zeta + re^{\theta i})$$

*) *Н. В. Бугаевъ.* Вопросы числовой алгебры. — Выше (§ 14_2, пункты III и V) мы рѣшали эту задачу графически, съ помощію помѣченныхъ скалъ и діаграммъ. Но рѣшеніе съ желаемой повышенной степенью точностью и независимо отъ графическихъ способовъ дается лишь анализамъ.

**) См. нашу диссертацію «Рядъ Лагранжа», гл. II §§ 8 и 9. Математ. Сборн. т. XII.

менѣе 1, то уравненіе

$$z = t f(\zeta + z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

будетъ имѣть одинъ и только одинъ корень z_1, модуль котораго менѣе даннаго значенія r. Если функція $\Phi(\zeta + z)$ конечна, непрерывна и однозначна (голоморфна) для всѣхъ значеній z, модули которыхъ менѣе r_1, то выраженіе $\Phi(\zeta + z_1)$ будетъ разлагаться въ сходящійся рядъ по формулѣ:

$$\Phi(\zeta + z_1) = \Phi(\zeta) + \frac{t}{1}\Phi'(\zeta) f(\zeta) + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\frac{d[\Phi'(\zeta) f^2(\zeta)]}{d\zeta} + \ldots$$

$$+ \frac{t^n}{1 \cdot 2 \ldots n}\frac{d^{n-1}\{\Phi'(\zeta) f^n(\zeta)\}}{dz^{n-1}} + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

при чемъ модули членовъ этого ряда будутъ удовлетворять неравенствамъ:

$$\left|\frac{t^n}{1 \cdot 2 \ldots n}\frac{d^{n-1}\{\Phi'(\zeta) f^n(\zeta)\}}{d\zeta^{n-1}}\right| < \frac{|t^n|}{n} r \cdot N \cdot M^n,$$

гдѣ N и M суть соотвѣтственно модули тахітит тахітогит функцій $\Phi'(\zeta + re^{\theta i})$ и $\frac{1}{2} f(\zeta + re^{\theta i})$ при возрастаніи θ отъ 0 до 2π.

Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что

$$\Phi(\zeta + z_1) = \Phi(\zeta) + \sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{t^k}{1.2\ldots k}\frac{d^{k-1}\{\Phi'(\zeta) f^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}} + R_n. \quad . \quad (2')$$

гдѣ

$$R_n = \frac{\lambda r N}{n} \cdot \frac{t^n M^n}{1 - |t| M}, \quad |\lambda| < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2'')$$

Вышеизложенныя основанія теоріи производящихъ функцій достаточны для строгаго доказательства теоремы Руше. Докажемъ сначала двѣ леммы.

Лемма I. *Если для даннаго значенія модуля r перемѣннаго z функція $\varphi(z)$ разлагается въ сходящійся рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ z то коэффиціентъ при z^n въ этомъ разложеніи равенъ векторному среднему значенію $\mathfrak{M}\frac{\varphi(z)}{z^n}$ функціи $\frac{\varphi(z)}{z^n}$.*

Въ самомъ дѣлѣ для даннаго значенія модуля r перемѣннаго z имѣемъ, по условію, сходящееся разложеніе:

$$\varphi(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m z^m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

дозволяющее назвать функцію $\varphi(z)$ женератрисой функціи A_m перемѣннаго цѣлаго числа m. Примѣняя сюда способъ § 29 и формулы (5)—(7)

этого §, мы должны будемъ замѣнить x, h, Δv символами x, 1, A_m. Въ результатѣ получимъ:

$$\mathfrak{M}\ \frac{\varphi(z)}{z^n} = A_n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

что́ и требовалось доказать.

Пусть амплитуда θ перемѣннаго z возрастаетъ отъ 0 до 2π, а его модуль r остается постояннымъ. При этомъ модуль функціи $\varphi(z)$ будетъ измѣняться и при нѣкоторомъ θ пріобрѣтаетъ наибольшую величину. Эту именно величину мы и называемъ модулемъ maximum maximorum функціи $\varphi(z)$ при данномъ r. Относительно него на основаніи леммы I нетрудно доказать слѣдующую лемму.

Лемма II. *Если для даннаго значенія модуля r перемѣннаго z функція $\varphi(z)$ разлагается въ сходящійся рядъ по цѣлымъ положительнымъ и отрицательнымъ степенямъ z, то модуль коэффиціента A_n при z^n въ этомъ разложеніи менѣе модуля maximum maximorum функціи $z^{-n}\varphi(z)$ при данномъ r.*

Въ самомъ дѣлѣ пусть R_0, R_1, R_k, . . . , R_{s-1} будутъ модули величинъ

$$\frac{\varphi(z_0)}{{z_0}^n}, \frac{\varphi(z_1)}{{z_1}^n}, \ldots, \frac{\varphi(z_k)}{{z^n}_k}, \ldots, \frac{\varphi(z_{s-1})}{{z^n}_{s-1}},$$

гдѣ вообще

$$z_k = r \,.\, e^{\left(\theta_0 + \frac{2k\pi}{n}\right) i},$$

и пусть R есть модуль maximum maximorum функціи $z^{-n}\varphi(z)$ при данномъ значеніи r. Такъ какъ модуль суммы не болѣе суммы модулей слагаемыхъ, то

$$mod\ \frac{1}{s}\cdot\left[\frac{\varphi(z_0)}{{z_0}^n} + \frac{\varphi(z_1)}{{z_1}^n} + \ldots + \frac{\varphi(z_{s-1})}{{z^n}_{s-1}}\right] < \frac{R_0 + R_1 + \ldots + R_{s-1}}{s} < R.$$

Отсюда въ предѣлѣ при $s = \infty$ получимъ:

$$mod\ \mathfrak{M}\ \{z^{-n}\,.\,\varphi(z)\} < R, \text{ или } mod\ A_n < R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Это и требовалось доказать.

Чтобы доказать теперь первую часть теоремы Руше, предположимъ, что уравненіе

$$z - t\,.\,f(\zeta + z) = 0$$

имѣетъ неизвѣстное число m корей, модули которыхъ менѣе даннаго значенія r, и обозначимъ эти корни чрезъ a_1, a_2, . . . , a_m. Будемъ имѣть какъ извѣстно,

$$z - t\,.\,f(\zeta + z) = (z - a_1)\,(z - a_2)\ldots(z - a_m)\,.\,\psi(z), \quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ $\psi(z)$ есть аналитическая функція, конечная, непрерывная и однозначная для всѣхъ значеній z, модули которыхъ менѣе r_1; причемъ уравненіе $\psi(z) = 0$, очевидно, не имѣетъ корней, модули которыхъ не болѣе r. При помощи тождества (5) находимъ:

$$\frac{d\,lg\,[1 - t\,.\,z^{-1}f(\zeta + z)]}{dz} - \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} =$$

$$= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + \ldots + \frac{1}{z - a_m}. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Пусть, согласно условіямъ теоремы Руше, модуль перемѣннаго z имѣетъ данное значеніе r, при которомъ модуль maximum maximorum функціи $t\,.\,z^{-1}\,.\,f(\zeta + z)$ имѣетъ значеніе, меньшее 1. Благодаря этому условію $lg\,[1 - t\,.\,z^{-1}\,f(\zeta + z)]$ разлагается въ сходящійся безконечный рядъ по степенямъ t, и мы будемъ имѣть разложеніе:

$$\frac{d\,lg\,(1 - t\,.\,z^{-1}f(\zeta + z))}{dz} = -\frac{t}{1}\frac{d\,[z^{-1}f(\zeta + z)]}{dz} -$$

$$-\frac{t^2}{2}\frac{d\,[z^{-1}f(\zeta + z)]^2}{dz} - \ldots - \frac{t^n}{n}\frac{d\,[z^{-1}f(\zeta + z)]^n}{dz} - \ldots$$

Разсматривая члены второй части этого послѣдняго равенства, удостовѣряемся, что каждый изъ нихъ разлагается по цѣлымъ положительнымъ и отрицательнымъ степенямъ z, при чемъ коэффиціентъ при z^{-1} въ этомъ разложеніи равенъ *нулю*. Выраженіе

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

въ силу вышеуказанныхъ свойствъ функціи $\psi(z)$ разлагается по цѣлымъ положительнымъ степенямъ z, такъ что и въ этомъ разложеніи по степенямъ z коэффиціентъ при z^{-1} равенъ нулю.

Вторая же часть тождества (6) разлагается очевидно по цѣлымъ отрицательнымъ степенямъ z, и коэффиціентъ при z^{-1} въ этомъ разложеніи будетъ $m - 1$.

Приравнивая другъ другу коэффиціенты при z^{-1} въ разложеніяхъ той и другой части тождества (6), находимъ уравненіе:

$$m - 1 = 0.$$

Слѣдовательно, уравненіе

$$z - t\,.\,f(\zeta + z) = 0$$

имѣетъ одинъ только такой корень $a_1 = z_1$, модуль котораго менѣе данной величины r. Первое изъ заключеній теоремы Руше доказано.

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (5) приводится къ виду:

$$z - tf(\zeta + z) = (z - z_1) \cdot \psi(z).$$

При помощи этого равенства находимъ:

$$\Phi'(\zeta + z)\{lg[1 - tz^{-1} f(\zeta + z)] - lg\,\psi(z)\} = \Phi'(\zeta + z)\, lg\left(1 - \frac{z_1}{z}\right). \quad (7)$$

Разложимъ обѣ части этого тождества по степенямъ z, опять предполагая, что модуль z равенъ данному въ теоремѣ Руше значенію r, и приравняемъ другъ другу коэффиціенты при z^{-1} въ томъ и другомъ разложеніи.

Выраженіе $\Phi'(\zeta + z)\, lg\,\psi(z)$ разлагается только по положительнымъ степенямъ z, и слѣдовательно коэффиціентъ при z^{-1} въ этомъ разложеніи равенъ нулю.

Коэффиціентъ z^{-1} въ разложеніи второй части равенствъ (7) будетъ:

$$-\frac{z_1}{1} \cdot \Phi'(\zeta) - \frac{z_1^2}{1.2} \cdot \Phi''(\zeta) - \frac{z_1^3}{1.2.3} \cdot \Phi'''(\zeta) - \ldots,$$

или, на основаніи формулы Тейлора,

$$-[\Phi(\zeta + z_1) - \Phi(\zeta)].$$

Выраженіе

$$\Phi'(\zeta + z) \cdot lg\,[1 - tz^{-1} \cdot f(\zeta + z)]$$

можетъ быть представлено такъ:

$$-\Phi'(u+z) \cdot \left[\frac{t}{1} z^{-1} \cdot f(\zeta+z) + \frac{t^2}{2} \cdot \{z^{-1} f(\zeta+z)\}^2 + \ldots + \frac{t^n}{n} \cdot \{z^{-1} \cdot f(\zeta+z)\}^n + \ldots\right]$$

Коэффиціентъ при z^{-1} въ разложеніи выраженія

$$\frac{t^n}{n} \cdot \Phi'(\zeta + z) \cdot \{z^{-1} f(u + z)\}^{-n},$$

легко находимой при помощи формулы Тейлора, есть

$$\frac{t^n}{1.2 \ldots n} \cdot \frac{d^{n-1}[\Phi'(\zeta)\{f(\zeta)\}^n]}{d\zeta^{n-1}}.$$

Модуль этого коэффиціента, на основаніи леммы II, менѣе модуля maximum maximorum функціи

$$\frac{t^n}{n} \cdot z \cdot \Phi'(\zeta + z)\ \{z^{-1} f(\zeta + z)\}^n$$

и, слѣдовательно,

$$mod\ \frac{t^n}{1.2 \ldots n} \frac{d^{n-1}[\Phi'(\zeta) \cdot \{f(\zeta)\}^n]}{d\zeta^{n-1}} < \frac{|t^n|}{n} \cdot r \cdot N \cdot M^n, \quad \ldots \quad (8)$$

гдѣ N и M имѣютъ значенія, указанныя въ текстѣ теоремы, при условіяхъ которой

$$|t| \cdot M < 1 \quad \ldots \quad (9)$$

Коэффиціентъ при z^{-1} въ разложеніи первой части равенства (7), слѣдовательно, выразится рядомъ:

$$-\frac{t}{1}\Phi'(\zeta) f(\zeta) - \frac{t^2}{1.2} \frac{d[\Phi'(\zeta) \cdot \{f(\zeta)\}^2]}{d\zeta} - \ldots -$$

$$-\frac{t^n}{1.2 \ldots n} \frac{d^{n-1}[\Phi'(\zeta)\ \{f(\zeta)\}^n]}{d\zeta^{n-1}} - \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

Модули членовъ этого ряда будутъ менѣе соотвѣтствующихъ членовъ ряда

$$rN \cdot \left[\frac{|t| \cdot M}{1} + \frac{|t^2| \cdot M^2}{2} + \frac{|t^3| \cdot M^3}{3} + \ldots\right],$$

который въ силу условія (9) будетъ сходящимся. Слѣдовательно и рядъ (10) сходящійся при условіи (9).

Изъ равенства найденныхъ коэффиціентовъ при z^{-1} въ разложеніяхъ той и другой части равенства (7) вытекаетъ равенство (2). Теорема Руше доказана; а изъ нея и изъ неравенства (8) вытекаетъ ея слѣдствіе въ формѣ равенства ($2'$) и неравенства ($2''$).

Условіе (9), достаточное для сходимости Лагранжева ряда (2), приводится къ виду:

$$|t| < c,$$

гдѣ

$$c = \frac{1}{M} \quad \ldots \quad (11)$$

Эту величину въ отношеніи ряда (2) будемъ называть *взаимнымъ съ r радіусомъ круга сходимости* ряда (2) на плоскости перемѣннаго t.

Наибольшій размѣръ взаимнаго съ r радіуса c соотвѣтствуетъ первому *минимуму* величины M при возрастаніи r отъ нуля.

§ 31. Кривая вѣроятности. Опредѣленіе съ помощію ряда Лагранжа областей годности для практики простѣйшихъ формулъ кривой вѣроятности, соотвѣтствующихъ закону большихъ чиселъ и его обобщеніямъ.

Если изслѣдуются сомнѣнія относительно средняго значенія

$$\varepsilon = \frac{x}{m} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m}{m}$$

независимыхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, то вѣроятность *средняго* значенія ε или соотвѣтствующей суммы x иллюстрируютъ при помощи *кривой вѣроятности*; ордината y этой кривой приблизительно представляетъ вѣроятностный дифференціальный коеффиціентъ:

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta x},$$

гдѣ ΔP_x есть вѣроятность осуществленія равенства:

$$x = m\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m.$$

Въ части III настоящей книги съ помощію «исчисленія приближенныхъ» мы для нормальныхъ обстоятельствъ разсматриваемаго событія устанавливаемъ слѣдующую кривую вѣроятности:

$$y = T(x) : h, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$T(x) = \frac{h \,.\, F(u) \,.\, u^{-x}}{\sqrt{2\pi \,.\, m \,.\, g(u)}}, \quad \ldots \ldots \quad (1')$$

$$g(u) = \frac{u}{m}\frac{d}{du}\left\{u \,.\, \frac{d \lg F(u)}{du}\right\}, \quad F(u) = \varphi_1(u) \,.\, \varphi_2(u) \ldots \varphi_m(u), \quad (1'')$$

$$u \frac{d \lg F(u)}{du} = x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u)$ суть женератрисы вѣроятностей частныхъ значеній соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, наконецъ, h есть *общая наибольшая мѣра* разностей всѣхъ частныхъ значеній суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$.

Въ концѣ настоящаго параграфа приведены примѣры, когда приходится разсматривать кривую (1) вѣроятности; каковая кривая есть *аналитическое подобіе* неаналитической, а именно пунктирной (аритмологической) линіи, опредѣляемой уравненіемъ:

$$Y = \frac{\Delta P_x}{\Delta x}.$$

Уравненіе (2) показываетъ, что количество u есть функція перемѣннаго x, получаемая «обращеніемъ» функціи $x = u \,.\, \frac{d \lg F(u)}{du}$, каковая операція совершается съ помощью ряда Лагранжа. Вмѣстѣ съ тѣмъ съ помощію этого ряда легко выяснить вопросъ о томъ, какъ извлекать изъ уравненія (1) *болѣе привычныя* формы кривой вѣроятности событія, употребляемыя для представленія идеи событія и для цѣлей статистической теоріи, *надзора* и учетно-смѣтной *практики*.

Таблицы и обычныя діаграммы приспособляются къ упрощенной формѣ, указанной выше (см. § 14_2, пунктъ III), именно:

$$y = Ae^{B(x-n)}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2')$$

Къ этой формѣ равенство (1) преобразуется слѣдующимъ приближеннымъ вычисленіемъ съ помощію *быстро* сходящихся рядовъ.

Вмѣстѣ съ уравненіемъ (2) возьмемъ уравненіе:

$$\zeta \,.\, \frac{d \lg F(\zeta)}{d\zeta} = n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

гдѣ ζ есть данная величина, которой на скалѣ перемѣннаго x соотвѣтствуетъ опредѣленный пунктъ n. Этотъ пунктъ примемъ за начальную точку, отъ которой будемъ измѣнять абсциссу x кривой (1), изучая отклоненіе $x - n$ пункта x отъ пункта n. Полагая

$$t = \frac{x-n}{2mg(\zeta)}, \quad g(\zeta) = \frac{\zeta}{m}\frac{d}{d\zeta}\left\{\zeta \frac{d \lg F(\zeta)}{d\zeta}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

можемъ уравненіе (2) представить подъ формой:

$$u - \zeta = t \,.\, f_\zeta(u), \quad \text{гдѣ } f_\zeta(u) = \frac{2(u-\zeta) \,.\, g(\zeta)}{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k=m}\left\{\frac{u\,\varphi'_k(u)}{\varphi_k(u)} - \frac{\zeta\,\varphi'_k(\zeta)}{\varphi_k(\zeta)}\right\}} \quad \ldots \quad (4')$$

Къ этой формѣ, если въ ней положить:

$$u = \zeta + z,$$

примѣняется теорема Руше о рядѣ Лагранжа (см. § 30), позволяющая разложить въ рядъ выраженіе:

$$lg\{T(x):h\} = lg\frac{F(u)}{\sqrt{2\pi mg(u)}} - x\,lgu = lg\frac{F(u)}{\sqrt{2\pi mg(u)}} - \frac{uF'(u)}{F(u)}\,.\,lgu, \quad (4'')$$

которое обозначимъ чрезъ $\Phi(u)$, въ рядъ по степенямъ t. Въ результатѣ этого разложенія получимъ:

$$lg\,y = lg\{T(x):h\} = \lambda + \lambda_1\,.\,t + \lambda_2\,.\,t^2 + \ldots + \lambda_k\,.\,t^k + \ldots, \quad . \quad (5)$$

гдѣ

$$\lambda = lg\{T(n):h\},\ \lambda_1 = -2mg(\zeta)\,.\,lg\,\zeta - \frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)}, \ldots,$$

$$\lambda_k = \frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,k}\left\{\frac{d^{k-1}[\Phi'(u)\,.\,f_\zeta{}^k(u)]}{du^{k-1}}\right\}_{u=\zeta}, \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

На плоскости перемѣннаго t, по теоремѣ Руше (§ 30), взаимный съ r радіусъ c_ζ круга сходимости Лагранжева ряда (5) представляется такъ:

$$c_\zeta = \frac{1}{M}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ M есть модуль maximum maximorum функціи

$$z^{-1} f_\zeta(\zeta + z)$$

при данномъ значеніи r модуля перемѣннаго z и при возрастаніи амплитуды θ перемѣннаго z отъ 0 до 2π; модуль же r выбирается по возможности такъ, чтобы онъ соотвѣтствовалъ первому минимуму функціи M параметра r при возрастаніи его отъ нуля. Сходимость ряда (5) будетъ обезпечена въ той области оси абсциссъ, точки x которой удовлетворяютъ неравенствомъ:

$$-c_\zeta < \frac{x-n}{2m\,.\,g(\zeta)} < +c_\zeta\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ на основаніи теоремы Руше будемъ имѣть.

$$\lambda_k = \frac{\lambda'}{3}\left(\frac{1}{c_\zeta}\right)^k . \frac{mr\,.\,N}{1 - \left|\frac{t}{c_\zeta}\right|},\ |\lambda'| < 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7'')$$

гдѣ N есть модуль maximum maximorum функціи $\frac{1}{m}\Phi'(\zeta + re^{\theta i})$ при возрастаніи θ отъ 0 до 2π. Полезно замѣтить, что количество N имѣетъ

характеръ функціи отъ ариѳметическаго средняго изъ m величинъ, ибо функція $\frac{1}{m}\Phi'(u)$, изъ которой N выводится, представляется такъ:

$$\frac{1}{m}\Phi'(u) = -\frac{g'(u)}{2mg(u)} - \frac{lg\,u}{u}\,.\,g(u),\ g(u) = \frac{1}{m}\,.\sum_{k=1}^{k=m} u\frac{d}{du}\left\{\frac{u\varphi'_k(u)}{\varphi_k(u)}\right\}\ . \quad (8)$$

При условіяхъ закона большихъ чиселъ количества m и $m\,.\,g(\zeta)$ представляются весьма большими; между тѣмъ какъ количества:

$$g(\zeta),\quad z^{-1}f_\zeta(\zeta + z),\quad r,\quad M \text{ и } c_\zeta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

опредѣляясь дѣйствіями надъ средними ариѳметическими отъ m обыкновенныхъ конечныхъ величинъ $lg\,\varphi_k(\zeta)$ и $lg\,\varphi_k(\zeta + z)$ и ихъ производныхъ перваго и втораго порядка [что видно изъ формулъ $(1'')$, (4) и $(4')$], бываютъ обыкновенно конечными величинами. Соотвѣтственно этимъ обстоятельствамъ можно подобрать для измѣненій перемѣннаго t весьма *узкую* область $(-\tau, +\tau)$, въ которой τ и t будутъ весьма малыми и, слѣдовательно, рядъ (6) будетъ сходиться съ *форсмажерною быстротою*;— притомъ подобрать такъ, чтобы соотвѣтствующая часть $(n - \tau\,.\,2mg(\zeta),\ n + \tau\,.\,2mg(\zeta))$ скалы перемѣннаго x имѣла *весьма большую* длину $2\,.\,[\tau\,.\,2mg(\zeta)]$.

Для осуществленія вышеуказаннаго подбора области $(-\tau, +\tau)$ достаточно положить:

$$\tau = [2m\,.\,g(\zeta)]^{-\sigma_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

гдѣ число σ_1 выбирается подъ условіями:

$$0, < \sigma_1 < 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

При этомъ въ узкой области $(-\tau, +\tau)$ измѣненій перемѣннаго t равенство (5) представится такъ:

$$lg\,y = \lambda + \lambda_1\,.\,t + \lambda_2\,.\,t^2 + R_3(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ $R_3(x)$ есть дополнительный членъ, оцѣниваемый какъ погрѣшность съ помощью теоремы Руше. Этотъ дополнительный членъ будетъ ничтоженъ сравнительно съ t^2, благодаря быстротѣ сходимости ряда (5) при малыхъ значеніяхъ t.

Условія (9) и $(9')$ выполнимы при весьма большихъ значеніяхъ m и $2m\,.\,g(\zeta)$ и при сохраненіи группою величинъ $(8')$ обыкновенныхъ конечныхъ числовыхъ значеній. Отбрасывая остаточный членъ R_3, полу-

чимъ при этой практической натяжкѣ искомую весьма простую кривую вѣроятности, уравненіе которой, по исключеніи t, напишется такъ:

$$y = e^{\lambda + \mu (x-n) - \nu (x-n)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\mu = \frac{\lambda_1}{2mg(\zeta)}, \quad \nu = -\frac{\lambda_2}{\{2mg(\zeta)\}^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

каковая кривая будетъ тѣсно сближена съ кривою (1) въ точкахъ (x, y), абсциссы x которыхъ лежатъ въ промежуткѣ $(n - d,\ n + d)$ между $n - d$ и $n + d$, предполагая, что

$$d = [2mg(\zeta)]^{1-\sigma_1}.$$

Иначе говоря, абсциссы тѣсно сближенныхъ точекъ кривыхъ (1) и (11) удовлетворятъ неравенствамъ:

$$-[2mg(\zeta)]^{1-\sigma_1} < x - n < [2mg(\zeta)]^{1-\sigma_1}. \quad . \quad . \quad . \quad (11'')$$

Эта часть оси абсциссъ хотя и ограниченная, но *широкая*, ибо количество d весьма велико. Это свойство какъ нельзя лучше гармонируетъ съ простотою уравненія (11), которая является слѣдствіемъ быстроты сходимости ряда (5).

Огромная, форсмажерная быстрота сходимости безконечныхъ рядовъ, какъ увидимъ ниже, очень часто играетъ рѣшающую роль въ упрощеніи выраженій законовъ большихъ чиселъ.

Коэффиціенты λ, μ и ν, какъ видно изъ формулъ (6) и (11′), могутъ быть находимы теоретически съ помощію данныхъ женератрисъ $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, . . . , $\varphi_m(u)$. Они же, какъ разъяснено было ранѣе (см. § 15) могутъ быть приближенно исчислены съ помощію статическаго матеріала, если величину y, близкую къ дифференціальному коэффиціенту $\frac{\Delta P_x}{\Delta x}$, выразить посредствомъ статистической частости. Такимъ образомъ, подъ эмпирическую кривую вѣроятности подводится теоретическій фундаментъ, оправдывающій съ помощью женератрисъ и ряда Лагранжа форму (11) этой кривой для значительнаго ея куска.

Форма (11) лишь обозначеніями отличается отъ формы (2′). Связь между тѣми и другими обезпеченіями такова:

$$lg\ A = \lambda + \frac{\mu}{4\nu}, \qquad B = -\nu.$$

Само собою разумѣется, что коэффиціенты λ, λ_1, . . ., λ_k, . . . разложенія (5) могутъ быть получены при помощи формулы Тейлора, разлагающей въ рядъ по степенямъ t функцію:

$$log\ \{T\ (n + 2mg\ (\zeta)\ .\ t)\}.$$

Но установленіе свойствъ круга сходимости этого разложенія достигается вообще удачнѣе съ помощью теоріи ряда Лагранжа.

Заслуживаетъ особаго вниманія область наибольшаго значенія ординаты y; эту область мы назвали въ «Математической статистикѣ» *серединною областью*, именно въ ней собирается главный *запасъ достовѣрности*, трактуемой въ теоремѣ мемуара Чебышева «О среднихъ величинахъ» и во II части настоящей книги.

Вообразимъ кривую (1) въ области ея *наибольшей* ординаты y_0 и возьмемъ абсциссу x_0, соотвѣтствующую этой ординатѣ, за n, т. е. положимъ: $n = x_0$. Для этого значенія n будемъ имѣть условіе maximum'а:

$$\mu = \frac{d\ log\ [T\ (n) : h]}{dn} = 0.$$

Иначе:

$$log\ \zeta + \frac{\zeta\ .\ g'\ (\zeta)}{2mg^2\ (\zeta)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Если ζ_0 есть корень этого уравненія, то

$$x_0 = \frac{\zeta_0 F'\ (\zeta_0)}{F\ (\zeta_0)}.$$

При $n = x_0$ уравненіе (11) получитъ наиболѣе простой видъ:

$$y = e^{\lambda_0 - \nu_0 \cdot (x - x_0)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

гдѣ λ_0 и ν_0 суть значенія λ и ν при $n = x_0$.

Если допустить «округленіе» уравненія (12) отбрасываніемъ второго члена его первой части (каковой членъ въ законѣ большихъ чиселъ бываетъ незначителенъ), то получимъ уравненіе: $log\ \zeta = 0$, изъ котораго слѣдуетъ, что $\zeta_0 = 1$. При этой практической натяжкѣ будемъ имѣть:

$$x_0 = n_0 = \frac{F'\ (1)}{F\ (1)} = \frac{\varphi_1'\ (1)}{\varphi_1\ (1)} + \ldots + \frac{\varphi_m'\ (1)}{\varphi_m\ (1)}.$$

Такъ какъ $\varphi_1\ (1) = \varphi_2\ (1) = \ldots = \varphi_m\ (1) = F\ (1) = 1$, то при $\zeta_0 = 1$ количества λ и ν перейдутъ въ

$$\lambda_0 = -\ log \sqrt{2mg\ (1)} \text{ и } \nu_0 = 1 : [2mg\ (1)],$$

уравненіе (12′), получитъ видъ:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi mg\ (1)}} \cdot e^{-\frac{(x-n_0)^2}{2mg\ (1)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12'')$$

Здѣсь величина n_0 есть сумма математическихъ ожиданій величинъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$.

Кривая (12″) есть та, которая разсматривается въ трудахъ Лапласа и Гаусса, она тѣсно сближается съ кривою (11) въ точкахъ, абсциссы которыхъ заключены въ промежуткѣ $(n_0 - d_0,\ n_0 + d_0)$, полагая

$$d_0 = [2mg\ (1)]^{1-\sigma_4}.$$

Эту область мы назвали *серединною*; тогда какъ область, опредѣляемую неравенствами (11″) и совпадающую лишь отчасти съ областью $(n_0 - d_0,\ n_0 + d_0)$ или вовсе не совпадающую съ нею, назовемъ *боковою*, притомъ *слѣва* и *справа*, смотря по тому, будетъ ли $n < n_0$ или $n > n_0$.

Кривыя (11), (12′) и (12″) *симметричны* относительно своихъ максимальныхъ ординатъ; тогда какъ кривая (1) вообще не имѣетъ оси симметріи.

Кривыя (12′) и (12″) употребительны для представленія «закона погрѣшности» научныхъ точныхъ измѣреній или наблюденій. Однако, эти кривыя вѣрно передаютъ распредѣленіе погрѣшностей лишь въ серединной части кривой вѣроятности и при заботѣ о томъ, чтобы систематическія погрѣшности были исключены и чтобы положительныя и отрицательныя случайныя погрѣшности уравновѣшивались. Въ противномъ случаѣ картина распредѣленія погрѣшностей будетъ другая *), зависящая отъ способа точныхъ наблюденій.

Всѣ вышеизложенные упрощенные выводы связаны съ установленіемъ ничтожества остаточнаго члена R_3 формулы (10).

Въ учетно-смѣтной практикѣ банковъ, переполненной множествомъ систематическихъ «округленій», присоединяющихся къ случайнымъ экономическимъ кризисамъ, кривыя (12′) и 12″) поневолѣ далеко не исчерпываютъ кривой (1), охватывая лишь ея серединную часть; между тѣмъ боковыя области кривой (1), расположенныя слѣва и справа отъ серединной области, въ существующей учетно-смѣтной практикѣ и въ надзорѣ при контрольно-ревизіонномъ порядкѣ игнорируются, что и ведетъ ко множеству недоразумѣній въ торговомъ кредитѣ и правосудіи.

Командующее положеніе торговаго кредита въ экономической жизни странъ требуетъ нынѣ отъ руководителей экономическою жизнью народа изучать тщательнымъ образомъ кривую (1) вѣроятности, да кстати оцѣнивать и ея «парадоксальныя» отклоненія отъ точнаго *пунктирнаго* аритмологическаго ряда, опредѣляемаго *неаналитическимъ уравненіемъ*:

$$y = \Delta P_x : \Delta x.$$

*) Споры объ этомъ предметѣ многочисленны; сущность ихъ передана въ нашей статьѣ: «Къ основамъ закона большихъ чиселъ, способа наименьшихъ квадратовъ и статистики». Матем. Сборникъ, т. XXVII.

Примѣры для упражненія.

Для уясненія вышеизложенныхъ методовъ полезно разсмотрѣть ихъ на классическихъ примѣрахъ. Достаточно уяснить себѣ на этихъ примѣрахъ лишь методологическій *планъ* вычисленія, проведенный до конца лишь въ *алгебраическихъ обозначеніяхъ*, устанавливающихъ формулу; полученіе же *цифровыхъ результатовъ* составляетъ уже задачу чисто калькуляторской практики, выполняемой до конца въ *счетныхъ учрежденіяхъ* съ пособіемъ статистическихъ матеріаловъ и счетныхъ механизмовъ.

Примѣръ 1 (относящійся къ закону большихъ чиселъ Пуассона).
Изслѣдовать кривую, опредѣляемую уравненіями:

$$y = \frac{(q_1 + p_1 u)\ (q_2 + p_2 u) \ldots (q_m + p_m u) \cdot u^{-x}}{\sqrt{2\pi m g\ (u)}},$$

$$x = \frac{p_1 u}{q_1 + p_1 u} + \ldots + \frac{p_m u}{q_m + p_m u},$$

$$g\ (u) = \frac{pqu}{m}\left\{\frac{1}{(q_1 + p_1 u)^2} + \ldots + \frac{1}{(q_m + p_m u)^2}\right\}.$$

Примѣръ этотъ соотвѣтствуетъ кривой вѣроятности, къ которой приводятъ данныя теоремы Пуассона. Въ этой теоремѣ перемѣнныя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_m$ имѣютъ каждое по два значенія: $\varepsilon_k' = 0$ и $\varepsilon_k' = 1$, съ вѣроятностями q_k и p_k этихъ значеній. Женератриса $\varphi_k\ (u)$ при этомъ будетъ:

$$\varphi_k\ (u) = q_k + p_k u. \text{ Мѣра } h = 1.$$

Примѣръ 2 (относящійся къ теоремѣ Я. Бернулли).
Изслѣдовать кривую, опредѣляемую уравненіемъ:

$$y = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi x\ (m - x)}} \cdot \left(\frac{mp}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{mq}{m - x}\right)^{m-x}.$$

Примѣръ этотъ есть частный случай предшествующаго примѣра, получаемый при предположеніяхъ:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_m = p, \quad q_1 = q_2 = \ldots = q_m = q = 1 - p.$$

Примѣръ 3. *Изслѣдовать кривую, опредѣляемую уравненіями:*

$$y = \frac{\varphi^m(u) \cdot u^{-x}}{\sqrt{2\pi m g(u)}}, \quad x = \frac{m \cdot u \cdot \varphi'(u)}{\varphi(u)}, \quad g(u) = u \frac{d}{du}\left\{u \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right\},$$

$$\varphi(u) = p' \cdot u^{s' \cdot h} + p'' u^{s'' \cdot h} + p''' \cdot u^{s''' \cdot h},$$

гдѣ s', s'' и s''' суть цѣлыя числа, имѣющія общій наибольшій дѣлитель 1.

Примѣръ этотъ даетъ кривую вѣроятности для *совокупности* m нормальныхъ предпріятій $O_1, O_2, \ldots, O_m$, обѣщающихъ достовѣрно принести соотвѣтственно независимыя перемѣнныя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, изъ коихъ каждое способно имѣть три различныхъ значенія: $s' \cdot h$, $s'' \cdot h$ и $s''' \cdot h$ съ вѣроятностями p', p'' и p'''.

§ 32. Исчисленіе суммы $\sum_{\alpha}^{\beta} T(x)$.

Сохранимъ обозначенія предшествующаго параграфа.

При обстоятельствахъ, кои съ точки зрѣнія закона большихъ чиселъ названы *нормальными* (въ отличіе отъ парадоксальныхъ и особыхъ обстоятельствъ), вѣроятность ΔP_x осуществленія равенства $x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$, гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ суть независимыя перемѣнныя, представляется при весьма большомъ m приближенно функціей $T(x)$, которая опредѣлена равенствомъ (1′) предшествующаго §. Вѣроятность же того, что сумма x перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ будетъ заключена въ промежуткѣ (A, B) между A и $B > A$, представляется приближенно суммой $\sum_{\alpha}^{\beta} T(x)$, гдѣ α и β суть соотвѣтственно значенія x, ближайшія къ A и къ B и неменьшія ихъ. Величины α и β выводятся изъ величинъ A и B Бугаевскими аритмологическими преобразованіями перемѣннаго y по формулѣ: $x = x_0 + h\, E_a\left(\frac{y - x_0}{h}\right)$ (см. §§ 17_1 и 17_2), $y = A$ и $y = B$.

Если положимъ: $\beta = \alpha + s \cdot h$, гдѣ s цѣлое положительное число, то будемъ имѣть:

$$\sum_{\alpha}^{\beta} T(x) = T(\alpha) + T(\alpha + h) + T(\alpha + 2h) + \ldots + T(\alpha + sh - h) \quad (1)$$

Прилагая къ этому суммированію формулу Эйлера (§ 28), найдемъ:

$$\sum_{\alpha}^{[\beta} T(x) = \int_{\alpha}^{\beta} T(x) \frac{dx}{h} - \frac{1}{2}[T(\beta) - T(\alpha)] + R, \quad \ldots \quad (2)$$

$$R = \frac{h^2}{2} \int_0^1 t \cdot (1 - t) \cdot \Phi(t)\, dt, \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{k=s-1} T''(\alpha + kh + ht) \quad (2')$$

Уравненіе (2) сводитъ вычисленіе суммы $\sum_{\alpha}^{\beta} T(x)$ къ квадратурѣ кривой (1) предшествующаго параграфа; квадратура даетъ интегралъ:

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} T(x) \frac{dx}{R} \quad \ldots \quad (3)$$

Далѣе обсудимъ два дѣла: I) вычисленіе предѣловъ остаточнаго члена R и II) вычисленіе интеграла (3).

I. Оцѣнивая высшій и низшій предѣлы дополнительнаго члена R формулы (2) порядкомъ, изложеннымъ въ § 28, мы должны разсматривать абсциссы x точекъ перегиба кривой:

$$y = T(x) : h,$$

т. е. корни уравненія:

$$T''(x) = 0, \quad \ldots \quad (4)$$

лежащіе въ промежуткѣ (α, β). Уравненіе (4) при помощи обозначеній предшествующаго параграфа приводится къ виду:

$$\left\{g^2(u) \cdot \log u + \frac{u g'(u)}{2m}\right\}^2 = \frac{1}{m}\left\{g^3(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{g(u)[u^2 g''(u) + u g'(u)]}{2m} - \frac{[u g'(u)]^2}{m}\right\} \quad \ldots \quad (4')$$

Это уравненіе разсмотримъ при весьма большихъ значеніяхъ m и $m \cdot g(u)$, что соотвѣтствуетъ закону большихъ чиселъ.

При безконечно большомъ m всѣ корни u уравненія (4′) обращаются въ 1; ибо въ предѣлѣ уравненіе это приводится къ уравненію: $\log u = 0$. Корни же x уравненія (4) въ этомъ предѣльномъ случаѣ обращаются въ $x = n_0$.

Если же m не безконечное, но весьма большое, то корни u уравненіе (4′) будутъ близкими къ 1 и разлагающимся по восходящимъ степенямъ малаго количества

$$\frac{1}{\sqrt{m}}$$

въ безконечный рядъ, сходящійся *съ форсмажерною быстротою*. Разсмотрѣніе этихъ разложеній приводитъ къ двумъ и только къ двумъ корнямъ этого рода, кои представляются такъ:

$$u_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{m \cdot g(1)}}(1 + \delta_1), \quad u_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{m \cdot g(1)}}(1 + \delta_2), \quad \ldots \quad (5)$$

гдѣ δ_1 и δ_2 суть малыя величины, стремящіяся къ нулю при неограниченномъ возрастаніи m и разлагающіяся въ быстро сходящіеся ряды. На этомъ основаніи имѣется возможность упрощенія приближенныхъ формулъ закона большихъ чиселъ.

Абсциссы x_1 и x_2 точекъ перегиба кривой $y = T(x) : h$ представятся такъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1 \,.\, F(u_1)}{F(u_1)} = n_o - \sqrt{m \,.\, g(1)} \,.\, (1 + \eta_1), \\ x_2 &= \frac{u_2 \,.\, F'(u_2)}{F(u_2)} = n_o + \sqrt{m \,.\, g(1)} \,.\, (1 + \eta_2), \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (5')$$

гдѣ η_1 и η_2 суть весьма малыя величины, стремящіяся къ нулю при неограниченномъ возрастаніи m. Отсюда слѣдуетъ: $x_1 < x_2$; а изъ равенствъ (5) и изъ формулы:

$$T'(x) = -T(x) \,.\, \left[lg\, u + \frac{u \,.\, g'(u)}{2m \,.\, g(u)}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

легко обнаружить, что

$$T'(x_1) > 0 \quad \text{и} \quad T'(x_2) < 0.$$

Очевидно, $T'(x_1)$ есть maximum, а $T'(x_2)$ есть minimum функціи $T'(x)$.

Теперь можемъ опредѣлить предѣлы дополнительнаго или остаточнаго члена R уравненія (2), слѣдуя порядку, указанному въ § 28. Предѣлы эти выражаются различно, смотря по размѣщенію точекъ x_1 и x_2 оси абсциссъ x относительно ея точекъ α и β.

Если обѣ точки x_1 и x_2 оси абсциссъ x будутъ лежать на отрѣзкѣ (α, β) между точками α и β, то $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, и будутъ примѣнимы неравенства (10′) § 28, полагая $n = 2$, $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$ и замѣчая, что

$$T'(\alpha) < T'(x_1) > 0 > T'(x_2) < T'(\beta).$$

Будемъ имѣть:

$$\frac{h}{8}\,[T'(x_2) - T'(x_1)] < R < \frac{h}{8}\,[T'(x_1) - T'(\alpha) + T'(\beta) - T'(x_2)] \;. \quad (7)$$

Если же обѣ точки x_1 и x_2 оси абсциссъ будутъ лежать внѣ ея отрѣзка (α, β), то будетъ примѣнима формула (4) § 28, т. е. будемъ имѣть:

$$R = \lambda \,.\, \frac{h}{8}\,[T'(\beta) - T'(\alpha)], \quad 0 < \lambda < 1 \;. \; . \; . \; . \quad (7')$$

Другихъ случаевъ (когда какая нибудь одна изъ точекъ x_1 и x_2 лежитъ между точками α и β) не будемъ разсматривать для краткости.

Формулы эти дадутъ намъ, въ примѣненіи къ закону большихъ чиселъ, числовую оцѣнку погрѣшности R, обычно отбрасываемой при практическомъ употребленіи соотношенія (2).

II. Перейдемъ теперь къ приближенному вычисленію интеграла J, опредѣленнаго равенствомъ (3).

Пусть кривая

$$y = T(x) : h$$

порядкомъ, указаннымъ въ § 31, тѣсно сближена съ кривою:

$$y = e^{\lambda + \mu\,(x-n) - \nu\,(x-n)^2}$$

въ тѣхъ соотвѣтственныхъ точкахъ, абсциссы x которыхъ содержатся въ промежуткѣ $(n - d,\ n + d)$ между $n - d$ и $n + d$. Пусть предѣлы α и β интеграла (3) содержатся въ томъ же промежуткѣ. При этихъ обстоятельствахъ интегралъ (3) будетъ весьма близокъ къ интегралу

$$J' = \int_\alpha^\beta e^{\lambda + \mu\,(x-n) - \nu\,(x-n)^2}\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

и съ незначительною погрѣшностью можетъ быть замѣненъ этимъ послѣднимъ интеграломъ.

Оцѣнивая погрѣшность этой замѣны, можемъ исходить изъ совершенно точнаго равенства:

$$\int_\alpha^\beta T(x)\,\frac{dx}{h} = \int_\alpha^\beta e^{\lambda + \mu\,(x-n) - \nu\,(x-n)^2 + R_3(x)}\, dx,$$

гдѣ $R_3(x)$ есть остаточный членъ формулы (10) § 31. Это равенство съ помощію формулы (2) § 27 приводитъ къ слѣдующему заключенію:

$$J = e^{R_3(x')} \,.\, J', \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

гдѣ x' есть средняя величина, содержащаяся между α и β,

$$x' = \alpha + (\beta - \alpha)\,\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Слѣдовательно, x' содержится также между $n - d$ и $n + d$, и величина $R_3(x')$ должна быть весьма малымъ количествомъ, представляющимъ погрѣшность приближеннаго равенства:

$$lg\, J = lg\, J' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9')$$

Отыскивая формулу, оцѣнивающую предѣлы количества $R_3(x')$, мо-

жемъ, во-первыхъ, разсматривать его какъ дополнительный членъ Лагражева ряда, въ который мы разлагали функцію

$$\Phi(u) = lg\,\frac{F(u)}{\sqrt{2\pi m g(u)}} - \frac{uF'(u)}{F(u)}\,.\,lg\,u$$

корня u уравненія (4′) § 31. На этомъ основаніи и по теоремѣ Руше съ ея слѣдствіями будемъ имѣть:

$$R_3(x') = \frac{\lambda'}{3}\cdot\left(\frac{x'-n}{2mg(\zeta)\,.\,c_\zeta}\right)^3\cdot\frac{m\,.\,r\,.\,N}{1-\left|\frac{x'-n}{2mg(\zeta)\,c_\zeta}\right|},\quad |\lambda'|<1,\ .\quad (10)$$

гдѣ r, c_ζ и N суть количества, указанныя въ § 31.

Кромѣ формулы (10), приведемъ другую, на практикѣ иногда всетаки полезную, формулу для оцѣнки предѣловъ погрѣшности $R_3(x')$. Для этой цѣли можетъ служить выраженіе остаточнаго члена $R_3(x')$ по формулѣ, относящейся къ ряду Тейлора, дающему разложеніе функціи $lg\,[T(x'):h]$ перемѣннаго x' по степенямъ $(x'-n)$.

Равенство (7) § 27 даетъ для рѣшенія этого вопроса формулу:

$$R_3(x') = \frac{(x'-n)^3}{6}\cdot\frac{d^3\,lg\,T(x_1)}{dx_1^{\,3}}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (11)$$

гдѣ x_1 есть средняя величина между n и x',

$$x_1 = n + (x' - n)\,\theta,\quad 0<\theta<1.$$

Далѣе находимъ:

$$\frac{d^3\,lg\,T'(x)}{dx^3} = \frac{L(u)}{2\,[mg(u)]^2},$$

$$L(u) = -2u^2\,\frac{d^2}{du^2}\left\{lg\,u + \frac{ug'(u)}{2mg(u)}\right\} -$$

$$-2u\,.\left(1-\frac{ug'(u)}{g(u)}\right)\cdot\frac{d}{du}\left\{lg\,u+\frac{ug'(u)}{2mg(u)}\right\}.$$

Слѣдовательно,

$$R_3(x') = \frac{(x'-n)^3}{3\,.\,[2mg(u_1)]^2}\,.\,L(u_1),\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (11')$$

гдѣ u_1 есть корень уравненія $x_1 = u\,.\,F'(u) : F(u)$.

Часто предѣлы величины $L(u_1)$ при весьма большомъ m удается схватить съ помощію приближеннаго выраженія $L(u)$, именно:

$$L(u) = \frac{2u\,.\,g'(u)}{g(u)}.$$

Тогда равенство (11′) съ удобствомъ замѣняетъ собою формулу (10). Но область, гдѣ это удобство существуетъ, во всякомъ случаѣ изслѣдуется удачнѣе съ помощію § 31, т. е. ряда Лагранжа.

Что касается исчисленія величины интеграла J', опредѣляемаго равенствомъ (8), то оно, послѣ преобразованія перемѣннаго x съ помощію уравненія:

$$\left(x - n - \frac{\mu}{2\nu}\right)\,.\,\sqrt{\nu} = z,$$

сводится къ формулѣ:

$$J' = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_p^q e^{-z^2}\,dz = k\,\{\Theta(q) - (p)\},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (12)$$

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}\,dz,\qquad k = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,.\,e^{\lambda+\frac{\mu^2}{4\nu}},\ .\ .\ .\ .\quad (12')$$

$$p = \left(\alpha - n - \frac{\mu}{2\nu}\right)\,.\,\sqrt{\nu},\quad q = \left(\beta - n - \frac{\mu}{2\nu}\right)\,.\,\sqrt{\nu}.$$

Формула (12) сводитъ вычисленіе интеграла J' къ вычисленію функціи $\Theta(x)$, для которой составлена таблица.

§ 33. Примѣчательное свойство уравненія $x = u\,.\,F'(u) : F(u)$, обусловливаемое свойствами женератрисъ. Видоизмѣненіе формулъ §§ 31 и 32 для случая зависимыхъ перемѣнныхъ.

I. Такъ какъ вѣроятности различныхъ значеній перемѣнныхъ ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ суть положительныя величины, то женератрисы $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots$, $\varphi_m(u)$ этихъ вѣроятностей представляются рядами съ положительными коэффиціентами ихъ членовъ, расположенныхъ по степенямъ u. Произведеніе этихъ женератрисъ, т. е. функція $F(u)$, обладаетъ такимъ же свойствомъ, т. е. представляется подъ формой:

$$F(u) = \Sigma\Delta v_x\,.\,u^x,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (1)$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ значенія итога $x = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon$ и Δv_x есть положительный коэффиціентъ, совпадающій (какъ увидимъ во II части) съ вѣроятностью ΔP_x, *если только перем.* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *независимы.*

Въ томъ же случаѣ, когда перемѣнныя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ суть *зависимыя* перемѣнныя, женератриса $F(u)$ вѣроятности ΔP_x суммы $x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$ всетаки существуетъ и представляется подъ формой (1), но она уже не представляется произведеніемъ женератрисъ $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u)$ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. Тѣмъ не менѣе возможно

высказывать иногда общія сужденія, относящіяся къ случаю какъ независимыхъ, такъ и зависимыхъ перемѣнныхъ ε_1, ε_2, ..., ε_m.

Замѣтивъ это, докажемъ слѣдующую общую теорему.

При возрастаніи положительнаго перемѣннаго u, его функція x, опредѣляемая уравненіемъ

$$x = \frac{uF'(u)}{F(u)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

также постоянно возрастаетъ.

Теорема эта вытекаетъ изъ уравненія:

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}\left\{\frac{uF'(u)}{F(u)}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

изъ равенства (1) и изъ примѣчательнаго тождества:

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{d}{du}\left\{\frac{u\,.\,F'(u)}{F(u)}\right\} = \Sigma\,\frac{\Delta v_x\,.\,u^x}{F(u)}\cdot\left\{x - \frac{uF'(u)}{F(u)}\right\}^2, \quad \ldots\ldots (3)$$

вторая часть котораго, очевидно, положительная величина.

Если сумма Σ, входящая въ равенства (1) и (3), содержитъ безконечное число слагаемыхъ, то положительное перемѣнное u должно, конечно, содержаться въ предѣлахъ *сходимости* этого безконечнаго ряда дѣйствій. Въ этихъ предѣлахъ вторая часть равенства (2′) положительна, что и доказываетъ теорему. Эта теорема примѣчательна, такъ какъ уравненіе (2) играетъ большую роль въ законѣ большихъ чиселъ для случая какъ независимыхъ, такъ и зависимыхъ перемѣнныхъ ε_1, ε_2, ...

II. Формулы §§ 31 и 32 требуютъ лишь незначительнаго видоизмѣненія, чтобы сдѣлать ихъ подходящими къ распространенію закона большихъ чиселъ отъ его основной *классической* формулы, соотвѣтствующей независимости перемѣнныхъ ε_1, ε_2, ..., къ интереснымъ и важнымъ для статистики формуламъ, соотвѣтствующимъ зависимости перемѣнныхъ ε_1, ε_2, ... Такое видоизмѣненіе съ формальной стороны кажется даже упрощеніемъ, ибо желаемыя видоизмѣненныя формулы получаются изъ формулъ §§ 31 и 32 *отстраненіемъ* представленія женератрисы $F(u)$ чрезъ $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, ... по формулѣ (1″) § 31 и сохраненіемъ лишь выраженій x, $g(u)$ и $T(x)$, въ кои $F(u)$ входитъ неразложеннымъ на множители.

Такъ, равенства (1) — (2) § 31 сохраняютъ полную силу при разсматриваемой метаморфозѣ понятій; но второе изъ равенствъ (1″) отбрасывается, какъ ложное. Къ сожалѣнію, среднеарифметическія функціи, входящія во множество формулъ классическаго случая, какъ вторая формула (8) § 31, выражающая функцію $g(u)$, при разсматриваемой метаморфозѣ перестаютъ служить точкой опоры для мысли, отбрасываются.

Часть II.

Элементы математической теоріи вѣроятностей.

ГЛАВА I.

Опредѣленія.

---

§ 1. Случайныя явленія. Вѣроятности случайныхъ явленій.

Прежде чѣмъ наблюдать и исчислять повторяющіяся явленія въ связи съ ихъ происхожденіемъ, мы должны формально опредѣлять обсуждаемыя явленія въ порядкѣ ограниченія пространствомъ, временемъ и признаками, болѣе или менѣе ясными. Даже смутно представляющіяся явленія должны быть очерчены формально нѣсколькими ясными достовѣрными признаками.

Всякое явленіе имѣетъ свои причины или основанія и нѣтъ дѣйствія безъ основаній; это положеніе есть основное правило нашего мышленія. Часто мы не въ состояніи открыть причинъ какого-либо явленія и ошибаемся въ опредѣленіи ихъ, но это обстоятельство не въ состояніи поколебать нашего убѣжденія въ томъ, что явленіе это есть слѣдствіе вызвавшихъ его причинъ, т. е. другихъ предшествовавшихъ и предстоящихъ (какъ цѣль) явленій, обусловливающихъ его осуществленіе.

Задача наукъ—отыскивать эту связь явленій, указывать законы, по которымъ явленіе совершается. Но задача эта столь трудна и обширна, что умъ человѣческій въ состояніи обнять только самую ничтожную долю наиболѣе простыхъ законовъ. Поэтому мы на каждомъ шагу встрѣчаемся съ такими явленіями, причины которыхъ, отъ насъ независящія, намъ или вовсе неизвѣстны или извѣстны лишь въ самой незначетнльной степени.

Пусть, напримѣръ, наудачу брошена монета, и вскрылся орелъ. Мы убѣждены въ существованіи причинъ этого явленія. Но каковы эти при-

чины? Если будемъ разбирать ближайшія изъ нихъ: импульсъ, сообщившій движеніе монетѣ, и препятствія, которыя, встрѣтивъ монету, заставили ее остановиться, то затеряемся въ безконечномъ разнообразіи всевозможныхъ импульсовъ и всевозможныхъ препятствій, не зная, какой именно импульсъ и какія именно препятствія способствовали вскрытію орла. Въ безконечномъ разнообразіи этихъ всевозможныхъ обстоятельствъ существуютъ и тѣ, которыя были причиною вскрытія орла, но какія именно обстоятельства послужили причиною этого явленія, остается для насъ неопредѣленнымъ.

Съ такого рода неопредѣленностью въ изысканіи причинъ явленій мы встрѣчаемся на каждомъ шагу, и если явленія произошли или имѣютъ произойти въ будущемъ подъ дѣйствіемъ причинъ, носящихъ указанный характеръ неопредѣленности, то такія явленія называются въ теоріи вѣроятностей *случайными*. Случайное явленіе можетъ иногда произойти, иногда не произойти. Если случайное явленіе не было наблюдаемо, а только ожидается, то оно называется *вѣроятнымъ*.

Случайныя явленія бываютъ свойственны *данному процессу*, характеризуемому опредѣленными достовѣрными признаками. Этотъ процессъ можетъ быть естественнымъ (напр., жизнь человѣка) или искусственнымъ (напр., бросаніе монеты). Искусственный процессъ, которому свойственна опредѣленная группа случайныхъ явленій, называется *испытаніемъ* или *опытомъ*.

Предметъ теоріи вѣроятностей есть изученіе явленій случайныхъ, неопредѣленныхъ въ отношеніи ихъ причинъ; такимъ образомъ теорія вѣроятностей рѣзко отличается отъ тѣхъ наукъ, которыя изслѣдуютъ явленія по мѣсту въ геометрически неразрывной послѣдовательности движенія и по времени въ извѣстной неразрывной причинной зависимости.

Эта неразрывность рушится въ біологическихъ явленіяхъ и въ функціяхъ физико-химіи (физики частичныхъ силъ), а также въ явленіяхъ частно-правоваго характера, развертывающихся въ нѣдрахъ общественной среды между отдѣльными единицами (юридическими лицами).

Имѣя дѣло съ вихрями и бурями, съ игрою жизненныхъ случайностей, съ ударами житейскихъ волнъ, съ экономическими кризисами у населенія странъ, съ погрѣшностями и ироніей судьбы, — однимъ словомъ съ *пертурбаціями*, положительными и отрицательными, теорія вѣроятностей стремится: 1) частію *обратить* явленія къ общимъ твердымъ (достовѣрнымъ) положительнымъ формамъ *мірового порядка*, какъ противоположенія отрицательныхъ, патологическихъ пертурбацій; 2) частію *обезпечиться*, застраховаться отъ послѣдствій непобѣжденныхъ отрицательныхъ пертурбацій запасами противоядій.

Математическая вѣроятность отличается достоинствомъ своего освѣ-

щенія вопросовъ отъ субъективной вѣроятности, учитываемой въ темнотѣ совершенно неосвѣдомленныхъ существъ, и враждебна учетамъ спекулирующихъ на счетъ этой темноты.

Вѣроятное явленіе можетъ быть вѣроятнымъ въ большей или меньшей степени, а также два событія могутъ быть равновѣроятными.

Вообразимъ урну, содержащую два черныхъ и десять бѣлыхъ шаровъ одинаковой величины. Шары эти тщательно перемѣшаны, и изъ урны наудачу извлекается одинъ шаръ; возможно появленіе какъ чернаго, такъ и бѣлаго шара. При этихъ условіяхъ вѣроятнѣе ожидать появленія бѣлаго шара, чѣмъ чернаго. Если бы число бѣлыхъ шаровъ было равно числу черныхъ, то появленіе бѣлаго и появленіе чернаго шара были бы въ данномъ опытѣ событіями равновѣроятными. Итакъ, можно различать степени вѣроятія, или, иначе, вѣроятности явленій. Слѣдовательно, вѣроятность явленія можно разсматривать, какъ величину, и выражать ее числомъ.

Посмотримъ, что нужно знать, чтобы выразить математическую вѣроятность ожидаемаго событія E числомъ. Будемъ называть обстоятельства, осуществленіе которыхъ неизбѣжно ведетъ къ осуществленію даннаго событія E, *статочностями*, *благопріятствующими* этому событію;—обстоятельства же, осуществленіе которыхъ ведетъ къ неосуществленію даннаго событія E, *статочностями неблагопріятствующими* этому событію. Чтобы выразить числомъ вѣроятность даннаго событія E, нужно опредѣлить статочности, какъ благопріятствующія, такъ и неблагопріятствующія этому событію; причемъ достаточно, чтобы всѣ эти статочности удовлетворяли слѣдующимъ тремъ условіямъ:

1) чтобы онѣ были *равновѣроятны*, или, какъ принято выражаться, равновозможны;

2) чтобы статочности эти были *несовмѣстимы*, т. е. чтобы при осуществленіи одной статочности было невозможно осуществленіе въ томъ же испытаніи какой-либо изъ остальныхъ статочностей;

3) чтобы статочности эти были *всевозможны* въ томъ смыслѣ, что при данномъ опытѣ одна изъ этихъ статочностей непремѣнно должна осуществиться.

Пусть n будетъ число всѣхъ возможныхъ, удовлетворяющихъ тремъ вышеуказаннымъ требованіямъ, статочностей, а m пусть будетъ число статочностей, благопріятствующихъ данному событію; при этихъ условіяхъ вѣроятность даннаго явленія принято опредѣлять числомъ:

$$p = \frac{m}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Итакъ: *вѣроятность явленія есть отношеніе числа статочностей,*

благопріятствующихъ данному событію, къ числу всѣхъ статочностей, причемъ статочности эти должны быть выбраны такъ, чтобы онѣ были равновозможными, несовмѣстимыми и всевозможными.

Примѣръ. *Изъ урны, содержащей 6 бѣлыхъ и 10 черныхъ шаровъ, наудачу извлекается шаръ. Какова вѣроятность появленія чернаго шара?*

При этомъ опытѣ возможно извлеченіе каждаго изъ 16 шаровъ, и каждое изъ этихъ обстоятельствъ можно принять за статочность. Слѣдовательно, всѣхъ статочностей будетъ 16; всѣ онѣ, очевидно, несовмѣстимы; ибо появленіе одного шара исключаетъ возможность появленія каждаго изъ остальныхъ 15 шаровъ. При одинаковой формѣ шаровъ эти статочности равновозможны. Статочностей, благопріятствующихъ появленію чернаго шара, будетъ 10; вѣроятность извлеченія чернаго шара выразится числомъ:

$$p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

Числовая величина вѣроятности есть, по самому своему опредѣленію, правильная дробь и лишь въ предѣлѣ обращается въ 1 или 0.

Если $m = n$, т. е. всѣ статочности благопріятствуютъ событію, то вѣроятность его будетъ $p = 1$, причемъ событіе должно *достовѣрно* произойти. Слѣдовательно, единица есть символъ достовѣрности того, что событіе совершится. Если $m = 0$, т. е. всѣ статочности неблагопріятствуютъ событію, то вѣроятность его выразится числомъ $p = 0$, причемъ событіе достовѣрно не произойдетъ. Слѣдовательно, нуль есть символъ достовѣрности того, что событіе не произойдетъ.

Различіе учетно-смѣтнаго порядка отъ контрольно-ревизіоннаго порядка при изслѣдованіи явленій.

Не смотря на то, что теорія вѣроятностей занимается явленіями, осуществленіе которыхъ носитъ случайный неопредѣленный характеръ, она приводитъ къ достовѣрнымъ выводамъ относительно совокупностей такихъ явленій, — къ выводамъ имѣющимъ весьма важное значеніе, какъ теоретическое, такъ и практическое.

Таковъ естественный законъ, извѣстный въ теоріи вѣроятностей и статистикѣ подъ именемъ *закона большихъ чиселъ*, подмѣчиваемаго изъ массовыхъ наблюденій научными методами изслѣдованія.

Если производить въ большомъ количествѣ одинъ и тотъ же опытъ и отмѣчать, какія изъ свойственныхъ этому опыту явленій осуществляются каждый разъ, то мы увидимъ, что числа осуществленій различныхъ явленій *почти* пропорціональны ихъ вѣроятностямъ. Иначе говоря, отношеніе

наблюденнаго числа повтореній явленія E къ числу опытовъ, называемое въ статистикѣ *частостью* явленія E, бываетъ при большомъ числѣ опытовъ *почти* равно вѣроятности явленія. Этотъ законъ можно провѣрить эмпирически; такъ Бюффонъ произвелъ 4040 бросаній монеты, причемъ орелъ вскрылся 1992 раза, а рѣшетка 2048 разъ. Сообразивъ вѣроятности появленія орла и рѣшетки, видимъ, что отношеніе 1992 : 2048 числа вскрытій орла къ числу вскрытій рѣшетки, почти равно отношенію этихъ вѣроятностей.

Тѣмъ, кто имѣетъ дѣло съ статистикой общественной жизни, очень часто приходится замѣчать эмпирическое подтвержденіе этого закона. Повторяющіяся изъ года въ годъ съ ничтожными колебаніями одни и тѣ же числа рожденій, смертей, преступленій въ извѣстной странѣ—служатъ выраженіемъ вышесказаннаго закона. Законъ большихъ чиселъ до конца XVII вѣка принимался, какъ эмпирическій, но при настоящемъ состояніи «Теоріи Вѣроятностей» онъ, при извѣстныхъ ограниченіяхъ, можетъ быть доказанъ теоретически; впервые въ частной формѣ его обнаружилъ *Яковъ Бернулли* и далѣе въ болѣе общей *Пуассонъ* и *Чебышовъ*. При этомъ обсужденіе числа ожидаемыхъ *будущихъ* явленій соотвѣтствуетъ *учетному смѣтному* (*бюджетному и страховому*) *порядку*, забѣгающему мысленнымъ соображеніемъ впередъ фактовъ.

Исчисленіе же явленій *заднимъ числомъ* соотвѣтствуетъ контрольному *ревизіонному порядку*, разсматривающему уже совершившіеся факты и сличающему по уставамъ и записямъ фактовъ теоретическое ожиданіе съ оказавшеюся дѣйствительностью, учитывая *отклоненіе* отъ даннаго положенія на дѣлѣ, предвидимое теоретически въ болѣе или менѣе узкихъ предѣлахъ. Это отклоненіе называютъ статистическимъ, а въ хозяйственной бухгалтеріи техническимъ балансомъ. Будучи то ниже, то выше, эти колебанія въ рядѣ лѣтъ повторяющейся *исторіи* имѣютъ тенденцію уравновѣшиваться относительно историко-статистическаго средняго. Рядъ техническихъ балансовъ, взятый въ исторической перспективѣ, представляетъ интересъ въ управленіи, въ историко-статистическомъ методѣ, въ *урокахъ исторіи* на будущее время и въ выработкѣ законовъ обмѣна, наслѣдованія, завѣщанія, долгосрочной аренды и пр.

Курсы довѣрія къ обязательствамъ. Паритетъ и отклоненіе отъ паритета.

Права однихъ въ обществѣ суть долги или обязательства другихъ и наоборотъ. Въ обществѣ правовыя лица связаны другъ съ другомъ, какъ кредиторы и дебиторы; причемъ слову «кредитъ» мы даемъ широкій смыслъ, относящійся къ духовнымъ и матеріальнымъ цѣнностямъ.

Колебанія довѣрія измѣряются *курсомъ*, который есть въ сущности вѣроятность, перемѣнная въ нашемъ воззрѣніи, судя по фактамъ. Поясникъ это понятіе на финансовомъ кредитѣ, о которомъ Д. И. Менделѣевъ сказалъ: «капиталъ есть не золото, а довѣріе».

Если группа лицъ A владѣетъ возложенными на среду (на множество) лицъ B обязательствами уплатить по золотому рублю за каждое отдѣльное обязательство, то числовую вѣроятность p исполненія наудачу взятаго обязательства назовемъ *курсомъ* p довѣрія къ обсуждаемой совокупности обязательствъ и къ фактической власти лицъ A надъ мысленными, по обязательствамъ, золотыми рублями, взыскиваемыми съ лицъ B.

Подобные курсы учитываетъ рынокъ (биржа), покупающій и продающій цѣнныя бумажныя обязательства однихъ лицъ передъ другими лицами, когда обязательства возникаютъ на почвѣ размѣна за деньги предметовъ народнаго хозяйства, считая не только товары и частныя имущества, но и наемный трудъ въ числѣ таковыхъ предметовъ.

Единицу, какъ предѣлъ курса p довѣрія къ обязательствамъ, назовемъ *паритетомъ*, т. е. равенствомъ между ожиданіемъ (возможнымъ владѣніемъ), вытекающимъ изъ обязательствъ, и осуществленіемъ обязательствъ при наступленіи обозначенныхъ въ обязательствѣ обстоятельствъ. Разность же $1 - p$ назовемъ отклоненіемъ курса p довѣрія отъ паритета 1.

Если въ силу обстоятельствъ разность $1 - p$ увеличивается, то это числовое явленіе будетъ соотвѣтствовать ухудшенію видовъ на исполненіе обязательствъ и паденію курса p довѣрія къ обязательствамъ.

Нормальныя колебанія курсовъ должны зависѣть отъ объективныхъ, неподдѣльныхъ обстоятельствъ промышленнаго движенія. Если, напримѣръ, дебиторы B суть хлѣбопроизводители, то сами они зависятъ, съ одной стороны, отъ случайностей климата и урожая хлѣбовъ, а, съ другой стороны, отъ капризовъ мѣстнаго и міроваго рынка, устанавливающаго цѣны на продуктъ ихъ творчества. Поэтому, курсы ихъ обязательствъ могутъ падать и подниматься отъ естественныхъ обстоятельствъ времени, отъ объективныхъ, закономѣрно проявленныхъ причинъ и открытыхъ цѣлей промышленнаго творчества и товарообмѣна.

Научное изслѣдованіе оцѣниваетъ и курсы *нравственнаго* довѣрія къ судебнымъ рѣшеніямъ, свидѣтельствамъ, мѣрамъ для цѣли.

§ 2. Примѣры непосредственнаго вычисленія вѣроятностей.

Примѣръ 1. *Урна содержитъ α бѣлыхъ шаровъ, β черныхъ и γ красныхъ. Всѣ шары одинаковой величины и тщательно перемѣшаны; наудачу вынимается одинъ шаръ. Опредѣлить вѣроятность извлеченія бѣлаго, чернаго и краснаго шара.*

Если появленіе каждаго шара принимать за статочность, то число всѣхъ равновозможныхъ, несовмѣстимыхъ и всевозможныхъ статочностей будетъ $\alpha + \beta + \gamma$; изъ нихъ α статочностей благопріятствуютъ появленію бѣлаго шара, β статочностей благопріятствуютъ появленію чернаго шара и γ — краснаго шара. Вѣроятности ожидаемыхъ событій будутъ соотвѣтственно:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Замѣтимъ мимоходомъ, что пояснительные опыты (примѣры) съ урнами и другіе простѣйшіе эксперименты съ событіями случайнаго характера ниже приводятся какъ аналогіи дѣйствительности, правда, сказочныя и каррикатурныя. Тѣмъ не менѣе эти «каррикатуры» на дѣйствительность и «сказки» поучительны, важны и необходимы въ образованіи *основныхъ понятій* и *методологическихъ концепцій* исчисленія вѣроятностей.

Между прочимъ, перемѣшиваніе шаровъ въ урнѣ соотвѣтствуетъ логическому закону «замѣщенія подобныхъ» (см. часть I, § 4, стр. 20) и алгебраической теоріи соединеній, перемѣщеній и сочетаній.

Примѣръ 2. *Опредѣлить вѣроятность того, что при двукратномъ бросаніи монеты по крайней мѣрѣ одинъ разъ вскроется орелъ.*

Испытаніе состоитъ въ бросаніи два раза монеты; событіе состоитъ въ появленіи орла по крайней мѣрѣ одинъ разъ; при опытѣ возможны слѣдующія обстоятельства:

1) сначала вскроется рѣшетка, потомъ орелъ;
2) » » рѣшетка, » рѣшетка;
3) » » орелъ, » рѣшетка;
4) » » орелъ, » орелъ.

Случаи эти будутъ представлять равновозможныя статочности, число которыхъ 4. Число статочностей, благопріятствующихъ вскрытію орла, будетъ 3 (1-й, 3-й и 4-й случаи), и вѣроятность вскрытія орла при двухъ бросаніяхъ монеты будетъ $^3/_4$.

Примѣръ 3. *Изъ колоды картъ (полной въ 52 карты) наудачу вынимается карта. Опредѣлить вѣроятность появленія туза.*

Каждая карта колоды одинаково можетъ быть вынута; если появленіе каждой карты принимать за статочность, то всѣхъ статочностей 52. Въ колодѣ заключается 4 туза, а потому статочностей, благопріятствующихъ появленію туза, будетъ 4. Искомая вѣроятность будетъ:

$$p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Примѣръ 4. *Опредѣлить вѣроятность того, что двѣ брошенныя кости вскроются на такихъ нумерахъ, сумма которыхъ будетъ не менѣе 4* *).

Возможно вскрытіе каждаго нумера первой кости съ каждымъ нумеромъ второй кости. Случай вскрытія нумера n первой кости съ нумеромъ m второй кости обозначимъ символомъ (n, m). Тогда всевозможные случаи этого рода можно изобразить такъ:

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	.	.	.	.	.
(1,4)	.	.	.	.	.
(1,5)	.	.	.	.	.
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Всевозможныхъ и притомъ равновозможныхъ случаевъ или статочностей этого рода будетъ 36. Благопріятствующихъ статочностей будетъ 33, и вѣроятность вскрытія нумеровъ, сумма которыхъ не менѣе 4, будетъ:

$$p = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

Примѣръ 5. *Изъ урны, содержащей α бѣлыхъ шаровъ и β черныхъ, наудачу вынимается a шаровъ. Опредѣлить вѣроятность того, что всѣ вынутые шары будутъ бѣлыми, полагая $a \leqq \alpha$.*

Вообразимъ изъ шаровъ, содержащихся въ урнѣ, всевозможныя сочетанія по a шаровъ въ каждомъ сочетаніи. Вынутая группа шаровъ будетъ представлять какое-либо изъ этихъ сочетаній; всѣ эти равновозможные случаи мы и примемъ за статочности. Число ихъ, равное числу сочетаній изъ $\alpha + \beta$ элементовъ по a, будетъ:

$$C^a_{\alpha+\beta} = \frac{(\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta-1)\,(\alpha+\beta-2)\ldots(\alpha+\beta-a+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots a}.$$

Если теперь изъ α бѣлыхъ шаровъ мы вообразимъ сочетанія по a шаровъ въ каждомъ, то каждому изъ этихъ сочетаній будетъ соотвѣтствовать статочность, благопріятствующая извлеченію a бѣлыхъ шаровъ. Число этихъ статочностей будетъ:

$$C^a_\alpha = \frac{\alpha\,.\,(\alpha-1)\;(\alpha-2)\ldots(\alpha-a+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots a}.$$

*) Кости предполагаются кубической формы, правильно отшлифованныя и совершенно однороднаго матеріальнаго состава; шесть граней ихъ занумерованы числами: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Слѣдовательно искомая вѣроятность будетъ:

$$p = C^a_\alpha : C^a_{\alpha+\beta} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-a+1)}{(\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta-1)\ldots(\alpha+\beta-a+1)}.$$

Примѣчаніе. Этимъ примѣромъ воспользуемся для того, чтобы еще съ одной стороны пояснить понятіе о статочностяхъ.

Часто основная группа статочностей, необходимыхъ для опредѣленія вѣроятности, можетъ быть подбираема различными способами. Такъ въ примѣрѣ 5-мъ можно избрать другую группировку статочностей. Вообразимъ всевозможныя переложенія или размѣщенія изъ $\alpha + \beta$ элементовъ по a. Число этихъ переложеній будетъ:

$$A^a_{\alpha+\beta} = (\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta-1)\,(\alpha+\beta-2)\ldots(\alpha+\beta-a+1).$$

Извлеченіе группы шаровъ, представляющихъ каждое изъ этихъ переложеній, будемъ считать за статочность; число ихъ будетъ $A^a_{\alpha+\beta}$; число статочностей, благопріятствующихъ извлеченію a бѣлыхъ шаровъ, выразится числомъ всевозможныхъ переложеній изъ α элементовъ по a, которое будетъ:

$$A^a_\alpha = \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ldots(\alpha-a+1).$$

Вѣроятность представится дробью:

$$p = A^a_\alpha : A^a_{\alpha+\beta} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ldots(\alpha-a+1)}{(\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta-1)\ldots(\alpha+\beta-a+1)}.$$

Слѣдовательно при новой группировкѣ статочностей число ихъ оказывается бо̀льшимъ: каждой статочности 1-й группировки соотвѣтствуютъ $1\,.\,2\,.\,3\ldots a$ статочностей при второй группировкѣ.

Примѣръ 6. *Изъ урны, содержащей α бѣлыхъ шаровъ и β черныхъ, наудачу извлекается $(a+b)$ шаровъ. Опредѣлить вѣроятность того, что вынется a бѣлыхъ шаровъ и b черныхъ ($a \leqq \alpha$ и $b \leqq \beta$).*

Вообразимъ всевозможныя сочетанія изъ $(\alpha+\beta)$ шаровъ по $(a+b)$ въ каждомъ. Вынутые $a+b$ шаровъ могутъ представлять каждое изъ такихъ сочетаній; случаи этого рода примемъ за основныя статочности, которыхъ будетъ $C^{a+b}_{\alpha+\beta}$. Далѣе количество статочностей, благопріятствующихъ появленію a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ, будетъ соотвѣтствовать количеству такихъ сочетаній, которыя содержатъ по a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ. Съ цѣлью получить такія сочетанія вообразимъ сначала всевозможныя сочетанія изъ α бѣлыхъ шаровъ по a въ каждомъ, а затѣмъ всевозможныя сочетанія изъ β черныхъ шаровъ по b въ каждомъ; далѣе,

каждое изъ сочетаній перваго рода соединимъ съ каждымъизъ сочетаній второго рода; такимъ образомъ получимъ $C_\alpha^a . C_\beta^b$ сочетаній требуемаго характера. Слѣдовательно всѣхъ благопріятствующихъ статочностей будетъ $n = C_\alpha^a . C_\beta^b$, а вѣроятность появленія изъ урны a бѣлыхъ шаровъ и b черныхъ выразится такъ:

$$p = \frac{C_\alpha^a . C_\beta^b}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}.$$

Примѣръ 7. *Изъ урны, содержащей α бѣлыхъ, β черныхъ и γ красныхъ шаровъ, наудачу вынимается $a + b + c$ шаровъ. Опредѣлить вѣроятность того, что вынутся a бѣлыхъ, b черныхъ и c красныхъ шаровъ, причемъ $a \leqq \alpha$, $b \leqq \beta$ и $c \leqq \gamma$.*

Разсуждая, какъ въ двухъ предшествовавшихъ примѣрахъ, легко увидѣть, что искомая вѣроятность выразится такъ:

$$p = \frac{C_\alpha^a . C_\beta^b . C_\gamma^c}{C_{\alpha+\beta+\gamma}^{a+b+c}}.$$

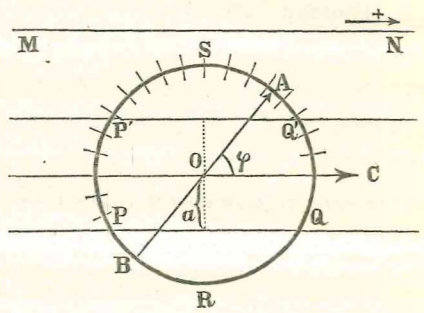
При опредѣленіи вѣроятностей на основаніи разсмотрѣнія статочностей легко впасть въ ошибку, принимая неравновозможныя статочности за равновозможныя. Въ такую ошибку впадаютъ то отъ неосмотрительности, то по неизбѣжности. Подраздѣленіе всѣхъ случаевъ, которые могутъ быть при испытаніи, на равновозможныя статочности легко дѣлается только въ простѣйшихъ и притомъ идеальныхъ случаяхъ; вообще же эта задача принадлежитъ къ числу трудныхъ, требующихъ высшаго и сложнаго анализа для рѣшенія. Если, напримѣръ, бросается кость идеальная, правильной формы и совершенно однороднаго матеріальнаго состава, то вѣроятность вскрытія опредѣленнаго нумера будетъ $\frac{1}{6}$. Кости же, употребляемыя въ играхъ, никогда не обладаютъ столь точнымъ устройствомъ, и вѣроятность вскрытія такой кости извѣстнымъ нумеромъ вычисляется сложнымъ анализомъ.

§ 3. Случай безконечно большого числа статочностей. Нравственная или относительная достовѣрность. Порогъ чувствующаго сознанія.

До сихъ поръ въ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ число всевозможныхъ статочностей было конечнымъ. Но во множествѣ случаевъ бываетъ необходимо разсматривать безконечно большое число статочностей. Примѣръ этого рода представляется слѣдующею задачею.

Задача. *На горизонтальную плоскость бросается игла длиною $2l$. Опредѣлить вѣроятность того, что игла эта, остановившись, встрѣтитъ на протяженіи своей длины линію, проведенную въ той же плоскости въ данномъ направленіи на данномъ разстояніи a отъ средины O иглы. (Предполагается, что $a \leqq l$, такъ какъ въ противномъ случаѣ искомая вѣроятность $p = 0$).*

Будемъ опредѣленную сторону даннаго направленія MN (отмѣченную на фиг. 11 стрѣлкою) считать положительной; точно также опредѣленную сторону иглы AB будемъ считать положительной. Обозначимъ черезъ φ уголъ AOC между положительными сторонами даннаго направленія OC и иглы AB, отсчитываемый отъ линіи OC противъ стрѣлки часовъ. Уголъ этотъ, очевидно, можетъ получить любое значеніе въ предѣлахъ отъ 0 до 2π, и каждое изъ такихъ значеній можетъ быть принято за статочность. Число всѣхъ этихъ статочностей будетъ безконечно велико. Такъ какъ съ безконечно большими числами надо производить дѣйствія съ осмотрительностью, то въ видахъ предосторожности воспользуемся способомъ предѣловъ, измѣнивъ задачу такъ, чтобы число статочностей сначала было конечнымъ и только въ предѣлѣ дѣлалось безконечно-большимъ и чтобы измѣненная задача въ предѣлѣ обращалась въ данную. Съ этой цѣлью предположимъ сначала что уголъ φ способенъ принимать только значенія:



Фиг. 11.

$$0,\ \Delta\varphi,\ 2\Delta\varphi,\ \ldots,\ (n-1)\,\Delta\varphi,$$

гдѣ $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Этимъ значеніямъ угла φ будутъ соотвѣтствовать n статочностей, причемъ положенія конца A иглы, соотвѣтствующія указаннымъ значеніямъ угла φ, раздѣлятъ окружность, описанную изъ средины O иглы, какъ изъ центра, радіусомъ l, на n равныхъ частей. Пусть m есть число тѣхъ изъ указанныхъ n статочностей, кои благопріятствуютъ пересѣченію иглы съ линіями PQ и $P'Q'$, проведенными въ данномъ направленіи на разстояніи a отъ средины O иглы. Очевидно, эти благопріятствующія статочности соотвѣтствуютъ такому положенію иглы AB, когда ея конецъ A падаетъ на одну изъ дугъ PRQ и $Q'SP'$. Въ предѣлѣ, когда n обратится въ безконечность, измѣненная задача обратится въ данную и искомая вѣроятность представится такъ:

$$p = Lim\left(\frac{m}{n}\right),$$

причемъ предѣлъ отношенія $\frac{m}{n}$ будетъ равенъ отношенію дуги PRQ къ полуокружности радіуса l. Слѣдовательно

$$p = \frac{2\,arccos\,\frac{a}{l}}{\pi}.$$

Полученное нами выраженіе искомой вѣроятности можетъ оказаться ирраціональнымъ, каковой результатъ возможенъ только при безконечно большомъ числѣ статочностей.

Случай безконечно большого числа статочностей представляетъ одну весьма важную особенность: въ этомъ случаѣ оказывается, что единица не всегда есть символъ *абсолютной достовѣрности*, и часто событіе, не имѣющее абсолютной достовѣрности, можетъ имѣть вѣроятность, равную единицѣ. События этого рода называются въ теоріи вѣроятностей *нравственно или относительно достовѣрными*.

Пояснимъ понятіе о нравственной достовѣрности примѣромъ. Пусть на горизонтальную плоскость бросается безконечно-тонкая игла AB. Опредѣлить вѣроятность того, что игла эта, остановившись, приметъ направленіе, непараллельное данной линіи MN. Уголъ между положительными сторонами линіи MN и иглы AB, отсчитываемой отъ MN противъ стрѣлки часовъ, обозначимъ чрезъ φ. Предположимъ сначала, что уголъ этотъ способенъ принимать только $2n$ значеній:

$$0,\ \Delta\varphi,\ 2\Delta\varphi,\ \ldots\ (2n-1)\ \Delta\varphi,$$

гдѣ $\Delta\varphi = \frac{\pi}{n}$. Этимъ значеніямъ угла φ будутъ соотвѣтствовать $2n$ статочностей; притомъ, чтобы перейти къ данной задачѣ, должно разсматривать предѣльный случай, когда $n = \infty$. Изъ указанныхъ статочностей только двѣ (при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \pi$) не благопріятствуютъ разсматриваемому событію; остальныя же $2n - 2$ статочностей благопріятствуютъ ему. Поэтому искомая вѣроятность будетъ

$$p = lim\left(\frac{2n-2}{2n}\right)_{n=\infty} = 1.$$

Тѣмъ не менѣе нельзя считать абсолютно достовѣрнымъ того, что разсматриваемое событіе осуществится, т. е. что игла AB ляжетъ непараллельно MN. Событіе это *нравственно достовѣрно*. Можно держать какое-угодно пари за осуществленіе этого событія съ надеждой почти на вѣрный выигрышъ, но нельзя абсолютно утверждать, что событіе это непремѣнно осуществится.

Хотя отклоненіе $1 - p$ отъ 1, равное въ обсуждаемомъ примѣрѣ

дроби $\frac{1}{n}$, уходящей изъ области всякаго ощущенія, т. е. за *порогъ* чувствующаго сознанія, въ предѣлѣ неограниченно приближается къ нулю; однако же оно всетаки существуетъ. Этимъ элементомъ природа относительной или нравственной достовѣрности *существенно* отличается отъ природы абсолютной достовѣрности.

Перейдемъ отъ этого примѣра къ жизненнымъ событіямъ. Въ средѣ общественной, гдѣ имѣютъ силу большіе ряды обязательствъ однихъ группъ общества передъ другими въ разныхъ областяхъ довѣрія, совокупность нечувствительныхъ и мало чувствительныхъ отклоненій курсовъ довѣрія (см. выше) отъ паритета представляетъ уже значительный итогъ толчковъ отрицанія обязательствъ, который дѣлается уже весьма чувствительнымъ физически и нравственно и сказывается гдѣ-либо не за порогомъ сознанія, а въ чертѣ ясности сознанія и патологическаго переживанія.

Эта невидимая и видимая связь общественныхъ событій устанавливаетъ жизненную необходимость не юридическихъ только, но и нравственныхъ обязанностей однихъ группъ относительно другихъ.

Въ важнѣйшихъ приложеніяхъ теоріи вѣроятностей приходится имѣть дѣло съ относительными достовѣрностями.

ГЛАВА II.

Теоремы сложенія и умноженія вѣроятностей. Гипотезы и полныя вѣроятности.

§ 4. Теорема сложенія вѣроятностей.

Если явленіе E можетъ осуществиться въ нѣсколькихъ несовмѣстимыхъ видахъ E_1, E_2, E_3, . . . , то вѣроятность явленія E равна суммѣ вѣроятностей всѣхъ такихъ видовъ.

Пусть n есть число всевозможныхъ, несовмѣстимыхъ и равновозможныхъ статочностей, которыя могутъ имѣть мѣсто при данномъ испытаніи. Пусть

событію E_1 благопріятствуетъ m_1 статочностей,
» E_2 » m_2 »
» E_3 » m_3 »
. . . . . .

Статочности, благопріятствующія событіямъ E_1, E_2, E_3 . . ., непремѣнно благопріятствуютъ и событію E, такъ какъ E_1, E_2, E_3 . . ., суть виды событія E. Если при этомъ E_1, E_2, E_3, . . . суть всевозможные несовмѣстимые виды событія E (всевозможные въ томъ смыслѣ, что событіе E осуществляется не иначе, какъ въ одномъ изъ этихъ видовъ), то сумма $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ представить полное число статочностей, благопріятствующихъ явленію E, и вѣроятность p этого явленія выразится такъ:

$$p = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}{n},$$

или

$$p = \frac{n_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \frac{m_3}{n} + \ldots,$$

что и требовалось доказать (такъ какъ $\frac{m_1}{n}$, $\frac{m_2}{n}$, $\frac{m_3}{n}$, . . . суть вѣроятности видовъ E_1, E_2, E_3, . . . явленія E).

Второе выраженіе теоремы сложенія: *вѣроятность того, что осуществится одно изъ несовмѣстимыхъ событій E_1, E_2, . . ., равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій.* Событія E_1, E_2, . . ., очевидно, можно принять за виды событія E.

Третье выраженіе теоремы сложенія: *если событію E благопріятствуютъ несовмѣстимыя статочности E_1, E_2, . . ., то вѣроятность событія E равна суммѣ вѣроятностей всѣхъ такихъ статочностей.*

Это выраженіе показываетъ, какъ вычислить вѣроятность въ томъ случаѣ, если удалось получить группу неравновозможныхъ статочностей.

§ 5. Противоположныя явленія. Группа всевозможныхъ несовмѣстимыхъ явленій.

Два несовмѣстимыхъ явленія A и B, изъ которыхъ одно непремѣнно должно случиться, называются *противоположными.*

Осуществленіе одного изъ противоположныхъ явленій равносильно неосуществленію другого. Если случится событіе A, то это значитъ, что не случится B; если не случится событіе A, то это значитъ, что случится B. Утвержденіе событія A есть отрицаніе событія B и отрицаніе событія A есть утвержденіе событія B. Не—A есть событіе B и не—B есть событіе A. Примѣромъ противоположныхъ явленій могутъ служить вскрытіе орла и вскрытіе рѣшетки при бросаніи монеты.

Имѣемъ два противоложныя явленія A и B. Пусть p вѣрояность событія A и q вѣроятность событія B. Вѣроятности эти обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ:

$$p + q = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по второму выраженію теоремы сложенія вѣроятностей, вѣроятность того, что случится одно изъ явленій A и B, есть $p + q$. Съ другой стороны по самому опредѣленію противоположныхъ событій та же вѣроятность есть достовѣрность, т. е. выражается числомъ 1. Поэтому $p + q = 1$, т. е. *сумма вѣроятностей двухъ противоположныхъ явленій равна единицѣ.*

Обобщимъ это заключеніе. Вообразимъ рядъ несовмѣстимыхъ явленій A_1, A_2, A_3, . . . , A_k. Пусть событія эти выбраны такъ, что одно изъ нихъ непремѣнно должно осуществиться. Такой рядъ событій будемъ называть *полной группой несовмѣстимыхъ событій или группой всевозможныхъ несовмѣстимыхъ событій.* Пусть p_1, p_2, . . ., p_k будутъ вѣроятности этихъ событій. Вѣроятности эти обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по второму выраженію теоремы сложенія вѣроятно-

стей, вѣроятность того, что случится одно изъ этихъ событій, есть $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$; съ другой стороны одно изъ нихъ непремѣнно случится. Слѣдовательно,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$$

§ 6. Сложное событіе. Понятіе объ условной вѣроятности. Теорема умноженія вѣроятностей.

Событіе, состоящее въ совпаденіи при данномъ испытаніи двухъ или нѣсколькихъ совмѣстимыхъ событій, называется *сложнымъ событіемъ*, причемъ совпадающія событія, составляющія это сложное событіе, называются *простыми*.

Условимся сложное событіе, состоящее изъ совпаденія простыхъ событій E_1 и E_2, обозначать символомъ (E_1E_2); въ болѣе общемъ случаѣ сложное событіе, состоящее въ совпаденіи простыхъ событій E_1, $E_2, \ldots, E_k$, будемъ обозначать символомъ $(E_1E_2 \ldots E_k)$. Кромѣ того, вѣроятность событія E условимся обозначать символомъ p_E. Символъ этотъ распространимъ и на сложныя событія, такъ что $p_{(E_1E_2 \ldots E_k)}$ есть вѣроятность сложнаго событія $(E_1E_2 \ldots E_k)$.

Въ связи съ понятіемъ о совмѣстимыхъ и сложныхъ событіяхъ находится весьма важное понятіе объ относительныхъ или условныхъ вѣроятностяхъ явленій.

Если вѣроятности явленій, свойственныхъ данному опыту, вычисляются въ предположеніи, что опытъ относится къ будущему времени, то вѣроятности эти называются *абсолютными* или *безусловными*. Вѣроятности явленій называются также *абсолютными* или *безусловными* и тогда, когда явленія эти относятся къ прошедшему опыту, если только теченіе явленій этого опыта осталось для насъ совершенно неизвѣстнымъ.

Но предположимъ теперь, что опытъ начался или прошелъ вполнѣ, причемъ удостовѣрено, что событіе E_2 произошло, что все остальное теченіе событій при данномъ опытѣ осталось вполнѣ неизвѣстнымъ, а слѣдовательно, осталось неизвѣстнымъ и то, имѣло-ли мѣсто при этомъ опытѣ событіе E_1, совмѣстимое съ событіемъ E_2. При этихъ предположеніяхъ можно говорить о вѣроятности событія E_1, но эта вѣроятность будетъ, вообще говоря, отличной отъ абсолютной вѣроятности того же явленія и называется *относительной* или *условной* вѣроятностью явленія E_1, найденною въ предположеніи, что событіе E_2 имѣло мѣсто.

Условную или относительную вѣроятность явленія E_1, найденную въ предположеніи, что событіе E_2 имѣло мѣсто, будемъ обозначать символомъ p_{E_1,E_2}. Символъ этотъ будемъ распространять и на сложныя событія, такъ что $p_{(E_1E_2 \ldots E_k),\ (L_1L_2 \ldots L_s)}$ есть условная вѣроятность сложнаго событія $(E_1E_2 \ldots E_k)$, найденная въ предположеніи, что состоялось сложное событіе $(L_1L_2 \ldots L_s)$.

Чтобы яснѣе представить различіе между абсолютными и условными вѣроятностями, разсмотримъ способъ вычисленія тѣхъ и другихъ вѣроятностей. Пусть E_1 и E_2 будутъ два совмѣстимыхъ событія, которыя могутъ имѣть мѣсто при данномъ испытаніи. Обозначимъ черезъ F_1 событіе, противоположное событію E_1, и черезъ F_2—противоложное E_2. Въ нашемъ испытаніи могутъ произойти слѣдующіе четыре случая:

1) произойдутъ оба событія E_1 и E_2;
2) событіе E_1 произойдетъ, а событіе E_2 не произойдетъ;
3) событіе E_1 не произойдетъ, а событіе E_2 произойдетъ;
4) не произойдетъ ни одного изъ событій E_1 и E_2.

Эти четыре случая представляютъ собою четыре несовмѣстимыхъ сложныхъ событія (E_1E_2), (E_1F_2), (F_1E_2), (F_1F_2), составляющихъ полную группу (см. § 5). Пусть n есть число всевозможныхъ, несовмѣстимыхъ и равновозможныхъ статочностей, которыя могутъ имѣть мѣсто при данномъ испытаніи. Всѣ эти статочности можно раздѣлить на четыре группы, соотвѣтственно благопріятствующія событіямъ (E_1E_2), (E_1F_2), (F_1E_2) и (F_1F_2).

Пусть α статочностей благопріятствуетъ событію (E_1E_2),
β » » » (E_1F_2),
γ » » » (F_1E_2),
δ » » » (F_1F_2),

причемъ, очевидно, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = n$.

Зная числа α, β, γ и δ, легко вычислить абсолютныя вѣроятности событій E_1 и F_1, E_2 и F_2. Статочности, благопріятствующія сложнымъ событіямъ (E_1E_2) и (E_1F_1), очевидно, благопріятствуютъ и событію E_1; остальныя же статочности не благопріятствуютъ событію E_1. Поэтому абсолютная вѣроятность событія E_1 будетъ:

$$p_{E_1} = \frac{\alpha + \beta}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Подобнымъ образомъ находимъ слѣдующія абсолютныя вѣроятности:

$$p_{F_1} = \frac{\gamma + \delta}{n},\ p_{E_2} = \frac{\alpha + \gamma}{n},\ p_{F_2} = \frac{\beta + \delta}{n} \quad \ldots\ldots (2)$$

Вычислимъ теперь условную вѣроятность событія E_2 въ предположеніи, что событіе E_1 состоялось. Если событіе E_1 совершилось, то

статочности, неблагопріятствующія ему, не могли имѣть мѣста, а потому число всевозможныхъ статочностей при разсматриваемыхъ условіяхъ равно числу статочностей, благопріятствующихъ событію E_1, т. е. равно $\alpha + \beta$. Изъ этихъ статочностей событію E_2 благопріятствуютъ только α статочностей. Слѣдовательно, искомая условная вѣроятность событія E_2 будетъ:

$$p_{E_2,\ E_1} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Подобнымъ образомъ находимъ слѣдующія условныя вѣроятности:

$$p_{E_1,\ E_2} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},\ p_{E_1,\ F_2} = \frac{\beta}{\beta + \delta},\ p_{E_2,F_1} = \frac{\gamma}{\gamma + \delta},\ \text{и т. д.}$$

Вышеуказанное распредѣленіе статочностей на четыре группы, соотвѣтственно благопріятствующихъ сложнымъ событіямъ (E_1E_2), (E_1F_2), (F_1E_2), и (F_1F_2), даетъ возможность получить вѣроятность каждаго изъ этихъ сложныхъ событій. Такъ вѣроятность $p_{(E_1E_2)}$ сложнаго событія (E_1E_2) выразится слѣдующимъ образомъ:

$$p_{(E_1E_2)} = \frac{\alpha}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Перемножая равенства (1) и (3) и сопоставляя результатъ этого перемноженія съ равенствомъ (5), убѣждаемся, что

$$p_{(E_1E_2)} = p_{E_1} \cdot p_{E_2,E_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Подобнымъ образомъ легко убѣдиться въ вѣрности слѣдующаго равенства:

$$p_{(E_1E_2)} = p_{E_2} \cdot p_{E_1,E_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Каждое изъ равенствъ (6) и (7) приводитъ насъ къ теоремѣ о вѣроятностяхъ сложныхъ событій, извѣстной также подъ именемъ теоремы умноженія вѣроятностей.

Теорема умноженія вѣроятностей: *вѣроятность сложнаго событія, состоящаго въ совпаденіи двухъ простыхъ событій E_1 и E_2, равна произведенію абсолютной вѣроятности одного изъ этихъ событій на условную вѣроятность другого событія, найденную въ предположеніи, что первое событіе имѣло мѣсто.*

Теорему умноженія легко обобщить. Въ обобщенномъ видѣ она выразится такъ: *вѣроятность сложнаго событія, состоящаго въ совпаденіи нѣсколькихъ простыхъ событій, равна произведенію абсолютной вѣроятности одного изъ этихъ событій на условную вѣроятность другого, найденную въ предположеніи, что первое событіе состоялось, далѣе на условную вѣроятность третьяго событія, найденную въ предположеніи, что первыя два событія состоялись, и т. д., и, наконецъ, на условную вѣроятность послѣдняго событія, найденную въ предположеніи, что всѣ остальныя событія состоялись.*

Если предположимъ, что сложное событіе состоитъ изъ простыхъ событій A_1, A_2, …, A_k, то обобщенная теорема умноженія выразится равенствомъ:

$$p_{(A_1A_2\ldots A_k)} = p_{A_1} \cdot p_{A_2,\ A_1} \cdot p_{A_3,\ (A_1A_2)} \cdots p_{A_k,\ (A_1A_2\ldots A_{k-1})} \quad \ldots (8)$$

Правильность обобщенной теоремы умноженія легко обнаруживается заключеніемъ отъ k къ $k+1$, называемымъ также *математическою индукціей.*

Въ самомъ дѣлѣ вообразимъ $k+1$ явленій A_1, A_2 …, A_k A_{k+1}. Сложное событіе: $(A_1A_2\ldots A_kA_{k+1})$, очевидно, можно разсматривать какъ совпаденіе двухъ событій: $(A_1A_2\ldots A_k)$ и A_{k+1}, причемъ на основаніи доказанной для двухъ событій теоремы умноженія будемъ имѣть:

$$p_{(A_1A_2\ldots A_kA_{k+1})} = p_{(A_1A_2\ldots A_k)} \cdot p_{A_{k+1},\ (A_1A_2\ldots A_k)} \quad \ldots\ldots (9)$$

Допуская затѣмъ теорему умноженія для k событій, т. е. допуская равенство (8), замѣчаемъ, что равенство (9) приводится къ виду:

$$p_{(A_1A_2\ldots A_{k+1})} = p_{A_1} \cdot p_{A_2,\ A_1} \cdot p_{A_3,\ (A_1A_2)} \cdots p_{A_{k+1},\ (A_1A_2\ldots A_k)} \quad \ldots (10)$$

Результатъ этотъ показываетъ, что если теорема умноженія имѣетъ силу для k явленій, то она должна имѣть силу для $k+1$ явленій. Но теорема умноженія вѣрна для двухъ явленій; слѣдовательно, она вѣрна для трехъ, четырехъ и т. д. явленій.

Примѣръ. *Изъ урны, содержащей α бѣлыхъ шаровъ и β черныхъ, послѣдовательно вынимаютъ a шаровъ, откладывая каждый вынутый шаръ въ сторону. Опредѣлить вѣроятность того, что всѣ вынутые шары будутъ бѣлыми* ($a \leqq \alpha$).

Событіе, вѣроятность котораго ищется, можетъ считаться сложнымъ, состоящимъ изъ совпаденія слѣдующихъ a простыхъ событій:

1) 1-й шаръ будетъ бѣлый,
2) 2-й шаръ будетъ бѣлый,
3) 3-й шаръ будетъ бѣлый,
4) 4-й шаръ будетъ бѣлый,
. . . . . .

Вѣроятность того, что первый шаръ будетъ бѣлый есть $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

Условная вѣроятность того, что второй шаръ будетъ бѣлый, найденная въ предположеніи, что первый вынутый изъ урны шаръ былъ бѣлый, равна $\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}$.

Условная вѣроятность того, что третій шаръ будетъ также бѣлый, найденная въ предположеніи, что первые два шара, вынутые изъ урны, были бѣлые, есть $\frac{\alpha-2}{\alpha+\beta-2}$; и т. д.

Перемноживъ эти вѣроятности, получимъ искомую вѣроятность p того, что всѣ a шаровъ вынутся бѣлые, а именно:

$$p=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}\cdot\frac{\alpha-2}{\alpha+\beta-2}\cdots\frac{\alpha-a+1}{\alpha+\beta-a+1}.$$

Результатъ этотъ согласенъ съ найденнымъ выше при помощи сочетаній (см. § 2, примѣръ 5).

§ 7. Независимыя событія; ихъ значеніе въ вопросахъ самостоятельнаго творчества и общественнаго сложенія отдѣльныхъ силъ. Вѣроятностная мѣра неполной зависимости событій другъ отъ друга. Теорема умноженія въ случаѣ совершенно независимыхъ событій.

I. Два совмѣстимыхъ событія A и A_1 называются *независимыми*, если безусловная вѣроятность одного изъ нихъ равна условной вѣроятности его, вычисленной въ предположеніи, что другое событіе имѣло мѣсто. Говоря иначе, два событія A и A_1 называются независимыми тогда, когда вѣроятность одного изъ нихъ не измѣняется отъ того, имѣло ли мѣсто другое событіе, или нѣтъ.

Пояснимъ понятіе о независимыхъ и зависимыхъ событіяхъ, примѣрами.

Вообразимъ двѣ урны: одна содержитъ a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ, другая a_1 бѣлыхъ и b_1 черныхъ шаровъ. Изъ каждой урны вынимается по шару. Очевидно, появленіе бѣлаго шара изъ первой урны и появленіе бѣлаго шара изъ второй урны будутъ независимыми событіями, ибо появленіе или непоявленіе бѣлаго шара изъ 1-й урны не вліяетъ на вѣроятность появленія бѣлаго шара изъ 2-й урны.

Вообразимъ тѣ же двѣ урны; но предположимъ, что опытъ производится такъ: изъ 1-й урны вынимается шаръ и перекладывается во вторую урну, гдѣ перемѣшивается съ остальными шарами; затѣмъ изъ второй урны вынимается шаръ. При этихъ данныхъ извлеченіе бѣлаго шара изъ первой урны и извлеченіе бѣлаго шара изъ второй урны будутъ зависимыми событіями. Вѣроятность извлеченія бѣлаго шара изъ второй урны въ предположеніи, что первый шаръ вынулся бѣлый, будетъ

$$\frac{a_1+1}{a_1+b_1+1};$$

вѣроятность же извлеченія бѣлаго шара изъ второй урны, въ предположеніи, что первый шаръ вынулся черный, будетъ иная, именно:

$$\frac{a_1}{a_1+b_1+1}.$$

Вообразимъ далѣе, что изъ урны, содержащей α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, два раза предполагаютъ вынуть по шару, причемъ шаръ, вынутый въ первый разъ, передъ вторымъ извлеченіемъ возвращается въ урну и смѣшивается съ остальными шарами. При этихъ условіяхъ вѣроятность извлеченія бѣлаго или чернаго шара при второмъ опытѣ не зависитъ отъ того, какого цвѣта шаръ былъ вынутъ при первомъ опытѣ, такъ что извлеченіе въ первый разъ, наприм., бѣлаго шара и во второй—чернаго при указанныхъ условіяхъ суть явленія независимыя.

Предположимъ теперь, что условія опыта съ урной, содержащей α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, измѣнились такъ: вынутый шаръ не возвращается въ урну, а откладывается въ сторону. При этихъ условіяхъ вѣроятность вынуть во второй разъ черный шаръ, въ предположеніи, что первый вынутый шаръ есть бѣлый, будетъ:

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta-1},$$

а вѣроятность вынуть во второй разъ черный шаръ въ предположеніи, что первый вынутый шаръ есть также черный, будетъ:

$$\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}.$$

Вѣроятности эти различны между собою; при разсмотрѣнныхъ условіяхъ появленіе бѣлаго или чернаго шара въ первый разъ и появленіе бѣлаго или чернаго шара во второй разъ будутъ событіями зависящими.

II. Если взять въ разсчетъ обозначенія, принятыя въ выраженіи законовъ достаточныхъ основаній (см. часть I, § 4, законы 3, 4 и 5), то будемъ имѣть для абсолютной вѣроятности p явленія A, совмѣстимаго съ A_1, варіацію $\delta p=p'-p$, гдѣ p' есть *переучтенная* вѣроятность явленія A, взятая по наступленіи явленія A_1. При *крѣпостной* или *неразрывной* (полной) зависимости явленія A отъ A_1 имѣемъ $p'=1$ и $\delta p=1-p$ (это случай положительной крѣпостной зависимости); либо $p'=0$ и $\delta p=0-p$ (это случай отрицательной крѣпостной завмсимости); при *свободной* зависимости либо $0<\delta p<1-p$, либо $0>\delta p>0-p$; при независимости совмѣстимыхъ фактовъ A и A_1 варіація δp вѣроятности p явленія A, возникающая подъ впечатлѣніемъ явленія A_1, есть *абсолютный* нуль; а при зависимости, наоборотъ, варіація δp не есть

нуль. Приблизительная (относительная) независимость совмѣстимыхъ явленій A и A_1 характеризуется тѣмъ, что δp хотя и не есть нуль, но оказывается ничтожною, пренебрегаемою (безъ чувствительности, безъ патологіи въ чувствахъ) величиною.

Варіацію δp можно принять за мѣру неполной зависимости связанныхъ явленій *).

Восходя отъ независимыхъ ожидаемыхъ совмѣстимыхъ фактовъ A и A_1 къ ихъ творческимъ основаніямъ (разумнымъ факторамъ) O и O_1, замѣтимъ, что творческій факторъ O явленія A и факторъ O_1 явленія A_1 должны каждый имѣть *самостоятельность* въ моментъ функціонированія.

Каждый индивидуумъ O въ данномъ классѣ O_1, O_2, O_3,... личныхъ факторовъ, имѣющемъ свою творческую идею и силы совершенія, обладаетъ, при независимости совмѣстимыхъ слѣдствій A_1, A_2, A_3,... творчества, соотвѣтствующею самостоятельностью, отдѣльностью; тутъ дана неслитность, невозможность смѣшенія или же по закону недопустимость смѣшенія, соглашенія, заговора, стачки. Но совмѣстимость результатовъ A_1, A_2, A_3,... творчества, т. е. совмѣстимость независимыхъ фактовъ A_1, A_2, A_3,... даетъ поводъ къ соединенію выгоды отъ этихъ явленій въ сложное итожное явленіе и къ соединенію между собою, относительно этого интереса, личныхъ простыхъ факторовъ O_1, O_2, O_3,... въ кооперативный союзъ, въ коллективное юридическое лицо.

Если же факторы O_1, O_2, O_3,... представляютъ собою группу безличныхъ, безправныхъ членовъ природы, служащихъ на потребу людямъ, какъ усвоенное хозяиномъ стадо домашнихъ животныхъ, усвоенная совокупность деревьевъ въ саду, въ лѣсу, усвоенная и воздѣланная нива колосьевъ, совокупность веретенъ бумагопрядильной фабрики и пр.; то эта безправная кооперація факторовъ, рабовъ человѣка, составляетъ тотъ предметъ мысленнаго владѣнія, который называется народнымъ богатствомъ и капиталомъ, если эти цѣнности выкупаемы и, слѣдовательно, переводимы на денежную валюту.

Въ дикомъ, неусвоенномъ за частнымъ хозяиномъ видѣ, подобныя совокупности естественныхъ факторовъ, производящихъ полезные факты, но неисчерпанныхъ народнымъ хозяйствомъ, составляютъ числящееся за государствомъ богатство природы земли, учитываемое въ качествѣ неиспользованныхъ запасовъ для будущихъ приростовъ народонаселенія.

Теорема о сложныхъ вѣроятностныхъ явленіяхъ, представляющихъ совокупности независимыхъ явленій, происходящихъ отъ совокупностей соотвѣтственныхъ самостоятельныхъ и неслитныхъ факторовъ, имѣетъ

*) Въ книгѣ: «Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности» мы приводили и другія мѣрила.

важное регулирующее и инструктивное значеніе въ естествознаніи, въ постановкѣ труда мысли и мускуловъ съ правами на его продукты, въ гражданскомъ опредѣленіи простыхъ и коллективныхъ правовыхъ лицъ, въ культурѣ, народной экономіи и общей политикѣ.

III. Пусть A и B будутъ противоположныя явленія и пусть A_1 и A будутъ независимыми событіями. Держась обозначеній предыдущаго параграфа, замѣчаемъ, что по самому опредѣленію независимыхъ событій для нихъ должны имѣть силу равенства:

$$p_{A_1} = p_{A_1, A} = p_{A_1, B}.$$

Вѣроятности сложныхъ событій, состоящихъ изъ совпаденія независимыхъ событій, обладаютъ болѣе простыми свойствами, чѣмъ вѣроятности сложныхъ событій, состоящихъ въ совпаденіи событій зависимыхъ. Теорема о вѣроятности сложныхъ событій въ случаѣ независимыхъ событій имѣетъ слѣдующее выраженіе.

Вѣроятность сложнаго событія, состоящаго изъ совпаденія нѣсколькихъ простыхъ независимыхъ событій, равна произведенію абсолютныхъ вѣроятностей этихъ простыхъ событій.

Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ независимыхъ событій, условныя вѣроятности ихъ совпадаютъ съ абсолютными; поэтому равенство (8) получаетъ видъ:

$$p_{(A_1 A_2 \ldots A_k)} = p_{A_1} \cdot p_{A_2} \cdot p_{A_3} \cdots p_{A_k}$$

Для лучшаго разъясненія теоремы умноженія въ случаяхъ независимыхъ и зависимыхъ событій приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1. *Изъ урны, содержащей a бѣлыхъ, b черныхъ и c красныхъ шаровъ, три раза вынимаютъ по шару, причемъ вынутый шаръ въ урну не возвращается. Опредѣлить вѣроятность трехкратнаго извлеченія бѣлаго тара.*

Вѣроятность извлеченія бѣлаго шара въ первый разъ есть:

$$\frac{a}{a + b + c}.$$

Вѣроятность извлеченія бѣлаго шара во второй разъ, найденная въ предположеніи, что въ первый разъ вынулся бѣлый шаръ, есть:

$$\frac{a - 1}{a + b + c - 1}.$$

Вѣроятность извлеченія бѣлаго шара при третьемъ опытѣ, если при двухъ первыхъ имѣло мѣсто каждый разъ извлеченіе бѣлаго шара, есть:

$$\frac{a - 2}{a + b + c - 2}.$$

Слѣдовательно, по формулѣ (8) искомая вѣроятность p выразится такъ:

$$p = \frac{a\,(a-1)\,(a-2)}{(a+b+c)\,(a+b+c-1)\,(a+b+c-2)}.$$

Если условія предыдущей задачи измѣнимъ, предположивъ, что вынутый шаръ возвращается въ урну, то вѣроятность p троекратнаго извлеченія бѣлаго шара найдется по формулѣ (11) для независимыхъ событій:

$$p = \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^3.$$

Примѣръ 2. *Урна содержитъ a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ; изъ нея наудачу извлекаютъ послѣдовательно три раза по одному шару, причемъ каждый вынутый шаръ передъ слѣдующимъ извлеченіемъ возвращается въ урну. Опредѣлить вѣроятность того, что первый шаръ окажется бѣлымъ, а остальные два черными.*

Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ сложнымъ событіемъ, состоящимъ изъ совпаденія трехъ простыхъ *независимыхъ событій.*

Вѣроятность появленія въ 1-й разъ бѣлаго шара есть:

$$\frac{a}{a+b}.$$

Вѣроятность появленія во 2-й разъ чернаго шара есть:

$$\frac{b}{a+b}.$$

Вѣроятность появленія въ 3-й разъ чернаго шара есть:

$$\frac{b}{a+b}.$$

Слѣдовательно, по формулѣ (11) искомая вѣроятность выразится такъ:

$$p = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{ab^2}{(a+b)^3}.$$

Положимъ теперь, что условія предыдущей задачи измѣнены, именно: первый и второй шары не возвращаются въ урну, а откладываются въ сторону. Здѣсь будемъ имѣть дѣло съ сложнымъ событіемъ, состоящимъ изъ трехъ простыхъ зависимыхъ явленій.

Вѣроятность появленія въ первый разъ чернаго шара есть:

$$\frac{a}{a+b}.$$

Условная вѣроятность появленія во второй разъ чернаго шара, найденная въ предположеніи, что въ первый разъ вынулся бѣлый шаръ, есть:

$$\frac{b}{a+b-1}.$$

Условная вѣроятность появленія въ третій разъ чернаго шара, найденная въ предположеніи, что въ первый разъ появился бѣлый, а во второй черный шаръ, есть:

$$\frac{b-1}{a+b-2}.$$

Вѣроятность p появленія въ первый разъ бѣлаго шара, а во второй и третій разъ чернаго шара, по формулѣ (8), выразится такъ:

$$p = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}\cdot\frac{b-1}{a+b-2}.$$

Примѣръ 3. *Имѣется α урнъ: первая урна содержитъ a_1 бѣлыхъ и b_1 черныхъ шаровъ, вторая a_2 бѣлыхъ и b_2 черныхъ шаровъ и т. д. Изъ каждой урны предполагается вынуть по одному шару. Опредѣлить вѣроятность того, что всѣ вынутые шары будутъ бѣлые.*

Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ сложнымъ событіемъ, состоящимъ въ совпаденіи α *независимыхъ* простыхъ событій. Вѣроятность появленія бѣлаго шара изъ n-ой урны будетъ вообще:

$$\frac{a_n}{a_n+b_n}.$$

Искомая вѣроятность будетъ:

$$p = \frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{a_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{a_\alpha}{a_\alpha+b_\alpha}.$$

§ 8. Примѣры на вычисленіе вѣроятностей при помощи совмѣстнаго примѣненія теоремъ сложенія и умноженія.

Если данное явленіе приведено къ такимъ несовмѣстимымъ видамъ, изъ которыхъ каждый есть сложное событіе, то вѣроятность этого явленія вычисляется при посредствѣ теоремъ умноженія и сложенія. Пояснимъ этотъ способъ вычисленія вѣроятностей примѣрами.

Примѣръ 1. *Въ урнѣ a бѣлыхъ, b черныхъ и c красныхъ шаровъ. Изъ нея послѣдовательно вынимаютъ по одному шару, откладывая ка-*

ждый вынутый шаръ въ сторону. Опредѣлить вѣроятность того, что при этомъ опытѣ бѣлый шаръ явится раньше чернаго.

Чтобы рѣшить эту задачу при помощи теоремъ сложенія и умноженія, посмотримъ, въ какихъ несовмѣстимыхъ видахъ можетъ осуществляться появленіе бѣлаго шара раньше чернаго.

Первый видъ: первый шаръ окажется бѣлымъ.

Второй видъ: первый шаръ окажется краснымъ, а второй бѣлымъ.

Третій видъ: два первыхъ шара окажутся красными, а третій бѣлымъ; и т. д.

Послѣдній видъ: c первыхъ шаровъ окажутся красными, а $(c+1)$-ый шаръ бѣлымъ.

Всѣхъ видовъ будетъ $c+1$. Всѣ эти виды несовмѣстимы.

Полагая $a+b+c=n$, найдемъ вѣроятность осуществленія 1-го вида:

$$p_1 = \frac{a}{n}.$$

Далѣе, на основаніи теоремы умноженія въ случаѣ зависимыхъ явленій, вѣроятности 2-го, 3-го, ... , $(c+1)$-го видовъ выразятся соотвѣтственно такъ:

$$p_2 = \frac{c}{n}\cdot\frac{a}{n-1},$$

$$p_3 = \frac{c}{n}\cdot\frac{c-1}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2},$$

. . . . . .

$$p_{c+1} = \frac{c}{n}\cdot\frac{c-1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-c+1}\cdot\frac{a}{n-c}.$$

Искомая вѣроятность P появленія бѣлаго шара раньше чернаго по теоремѣ сложенія равна суммѣ вѣроятностей всѣхъ несовмѣстимыхъ видовъ этого событія, т. е.

$$P = \frac{a}{n} + \frac{c.a}{n(n-1)} + \frac{c(c-1)a}{n(n-1)(n-2)} + \ldots +$$

$$+\frac{c(c-1)\ldots(c-k)a}{n(n-1)\ldots(n-k-1)} + \ldots + \frac{c(c-1)\ldots 3.2.1.a}{n(n-1)\ldots(n-c)}.$$

Выраженіе это можетъ быть значительно упрощено. Замѣтимъ, что вѣроятность Q противоположнаго событія, т. е. появленія чернаго шара

раньше бѣлаго, вычисляется аналогичнымъ пріемомъ и получается изъ предыдущей формулы замѣной a черезъ b. Итакъ, будемъ имѣть:

$$Q = \frac{b}{n} + \frac{c.b}{n(n-1)} + \ldots + \frac{c(c-1)\ldots 2.1.b}{n(n-1)\ldots(n-c)}.$$

Складывая это равенство съ предыдущимъ и помня, что $P+Q=1$, находимъ:

$$1 = (a+b)\left[\frac{1}{n} + \frac{c}{n(n-1)} + \frac{c(c-1)}{n(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{c(c-1)\ldots 2.1}{n(n-1)\ldots(n-c)}\right];$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\left[\frac{1}{n} + \frac{c}{n(n-1)} + \frac{c.(c-1)}{n(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{c(c-1)\ldots 2.1}{n(n-1)\ldots(n-c)}\right] = \frac{1}{a+b}.$$

Теперь легко сообразить, что

$$P = \frac{a}{a+b}.$$

Результатъ этотъ можно было бы найти другимъ путемъ. Замѣтимъ, что въ данномъ опытѣ всѣ красные шары выбрасываются, пока не появится бѣлый или черный шаръ, и слѣдовательно шары эти можно не принимать въ разсчетъ при вычисленіи искомой вѣроятности. Такимъ образомъ въ счетѣ останутся только $a+b$ бѣлыхъ и черныхъ шаровъ, и искомая вѣроятность P выразится какъ вѣроятность появленія бѣлаго шара.

Примѣръ 2. *Урна содержитъ a бѣлыхъ, b черныхъ и c красныхъ шаровъ. Изъ нея вынимаютъ шары одинъ за другимъ, причемъ каждый вынутый шаръ прежде извлеченія слѣдующаго шара возвращается обратно въ урну и перемѣшивается съ остальными шарами. Опредѣлить вѣроятность того, что бѣлый шаръ вынется раньше чернаго.*

Опредѣлимъ виды, въ какихъ можетъ осуществиться появленіе бѣлаго шара раньше чернаго и напишемъ ихъ вѣроятности, полагая $a+b+c=n$.

Первый видъ: первый вынутый шаръ окажется бѣлымъ; вѣроятность этого вида будетъ $p_1 = \frac{a}{n}$.

Второй видъ: первый шаръ окажется краснымъ, а второй—бѣлымъ; вѣроятность этого вида будетъ:

$$p_2 = \frac{c}{n}\cdot\frac{a}{n}.$$

Третій видъ: первые два шара окажутся красными, а третій — бѣлымъ; вѣроятность этого вида будетъ $p_3 = \left(\frac{c}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n}$. И т. д.

Всѣхъ несовмѣстимыхъ видовъ разсматриваемаго событія будетъ безчисленное множество.

По теоремѣ сложенія искомая вѣроятность P будетъ:

$$P = \frac{a}{n} + \frac{c}{n} \cdot \frac{n}{a} + \left(\frac{c}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n} + \ldots + \left(\frac{c}{n}\right)^k \cdot \frac{a}{n} + \ldots$$

Выраженіе это представляетъ собою сумму безконечно-убывающей прогрессіи. Вычисливъ эту сумму, найдемъ:

$$P = \frac{a}{n-c} = \frac{a}{a+b}.$$

Примѣръ 3. *Два игрока A и B кидаютъ поочередно монету. Опредѣлить вѣроятность того, что игрокъ A, начинающій игру, вскроетъ орелъ раньше игрока B.*

Опредѣлимъ виды, въ которыхъ можетъ состояться вскрытіе орла у игрока A раньше, чѣмъ у игрока B.

Первый видъ: при первомъ бросаніи вскроется орелъ.

Второй видъ: при первыхъ двухъ бросаніяхъ вскроется рѣшетка, а при третьемъ орелъ.

Третій видъ: при первыхъ четырехъ бросаніяхъ вскроется рѣшетка, а при пятомъ бросаніи орелъ; и т. д.

Всѣхъ несовмѣстимыхъ видовъ разсматриваемаго событія будетъ безчисленное множество.

Вѣроятность 1-го вида $p_1 = \frac{1}{2}$,

» 2-го » $p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$,

» 3-го » $p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$,

. . . . . .

» $n+1$ » $p_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$,

. . . . . .

Искомая вѣроятность P по теоремѣ сложенія представится такъ:

$$P = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \ldots,$$

или иначе:

$$P = \frac{2}{3}.$$

Вѣроятность Q того, что у игрока B орелъ вскроется раньше, чѣмъ у игрока A, какъ вѣроятность противоположнаго событія, представится такъ:

$$Q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Примѣръ 4. *Урна содержитъ a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ. Изъ нея Иванъ и Петръ вынимаютъ поочередно шары, откладывая каждый шаръ въ сторону. Опредѣлить вѣроятность того, что Иванъ, начинающій игру, вынетъ бѣлый шаръ раньше Петра.*

Пусть β есть цѣлая часть числа $\frac{b}{2}$. Событіе, вѣроятность котораго ищется, должно состояться въ одномъ изъ слѣдующихъ $\beta+1$ несовмѣстимыхъ видовъ.

Первый видъ: при первомъ извлеченіи вынется бѣлый жаръ.

Второй видъ: при первыхъ двухъ извлеченіяхъ вынутся черные шары, а при третьемъ—бѣлый шаръ; и т. д.

Послѣдній видъ: при первыхъ 2β извлеченіяхъ вынутся черные шары, а при $(2\beta+1)$-омъ извлеченіи вынется бѣлый шаръ.

Вѣроятность 1-го вида будетъ:

$$p_1 = \frac{a}{a+b}.$$

Вѣроятности дальнѣйшихъ видовъ, найденныя по формулѣ (8), выразятся соотвѣтственно слѣдующимъ образомъ:

$$p_2 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b-2},$$

. . . . . .

$$p_{\beta+1} = \frac{b\,(b-1)\,(b-2)\,\ldots\,(b-2\beta+1).a}{(a+b)\,(a+b-1))\,\ldots\,(a+b-2\beta)}.$$

Искомая вѣроятность P будетъ:

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b-2} + \ldots +$$
$$+ \frac{d\,(b-1)\,(b-2)\,\ldots\,(b-2\beta+1).a}{(a+b)\,(a+b-1)\,\ldots\,(a+b-2\beta)}.$$

Измѣнимъ условія задачи въ томъ смыслѣ, что каждый вынутый шаръ предъ слѣдующимъ извлеченіемъ возвращается въ урну. Тогда всѣхъ видовъ событія, аналогичныхъ указаннымъ сейчасъ видамъ, будетъ безконечное число и они будутъ представлять собою сложныя событія, состоящія въ совпаденіи независимыхъ событій.

Вѣроятности этихъ видовъ выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$p_1 = \frac{a}{a+b}\,,\ p_2 = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \frac{a}{a+b}\,,\ p_3 = \left(\frac{b}{a+b}\right)^4 \cdot \frac{a}{a+b}\,,\ \ldots\ldots,$$

$$p_{n+1} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n} \cdot \frac{a}{a+b}, \ldots\ldots$$

Искомая вѣроятность P будетъ:

$$P = \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^4 \frac{a}{a+b} + \ldots\ldots +$$

$$\ldots\ldots + \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n} \frac{a}{a+b} + \ldots\ldots = \frac{a+b}{a+2b}\,.$$

§ 9. Гипотезы и идеи. Теорема о полныхъ вѣроятностяхъ.

Вѣроятное предположеніе называется *гипотезой*, а вѣроятность осуществленія этого предположенія называется вѣроятностью гипотезы.

Особый интересъ имѣютъ гипотезы, связанныя съ ученіями, цѣлями, воззрѣніями—вообще идеями, содержимыми въ умѣ отдѣльныхъ лицъ и общества и символизуемыми посредствомъ матеріальныхъ (личныхъ и безличныхъ) обозначеній (см. выше, часть I, §§ 18_2, 19_2 пунктъ III и 23_2), играющихъ роль для освѣдомленія публики и ея отдѣльныхъ членовъ.

Если двѣ гипотезы таковы, что осуществленіе одной исключаетъ возможность осуществленія другой, то гипотезы будемъ называть *несовмѣстимыми*. Несовмѣстимыя гипотезы соотвѣтствуютъ несовмѣстимымъ идеямъ. Допуская одну изъ несовмѣстимыхъ гипотезъ, нельзя допускать другой.

Условившись въ указанныхъ названіяхъ, докажемъ слѣдующую теорему, извѣстную подъ именемъ теоремы *о полныхъ вѣроятностяхъ*.

Теорема. *Пусть C_1, C_2,...., C_i будутъ несовмѣстимыя и притомъ всевозможныя гипотезы, свойственныя данному испытанію. Вѣроятности этихъ гипотезъ пусть будутъ: q_1, q_2,..., q_i, а условныя вѣроятности событія E при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ пусть будутъ p_1, p_2,...., p_i. Полная вѣроятность P событія E выразится такъ*: $P = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots\ldots + p_iq_i$.

Доказательство. Вообразимъ слѣдующій рядъ сложныхъ событій: $(C_1\ E)$, $(C_2\ E)$,...., $(C_i\ E)$, гдѣ вообще $(C_k\ E)$ есть сложное событіе,

состоящее въ совпаденіи осуществленія гипотезы C_k и событія E. Эти сложныя событія можно разсматривать какъ разные виды событія E. Виды эти *несовмѣстимы* благодаря несовмѣстимости гипотезъ C_1 C_2,....,C_i; далѣе виды эти суть *всевозможные*, такъ какъ гипотезы C_1, C_2,.... C_i составляютъ полную группу ($q_1 + q_2 + \ldots + q_i = 1$) и, слѣдовательно, если событіе E совершится, то непремѣнно въ совпаденіи съ одною изъ указанныхъ гипотезъ, т. е. въ одномъ изъ указанныхъ видовъ.

Вѣроятность каждаго вида опредѣляется на основаніи теоремы умноженія. Такимъ образомъ находимъ:

вѣроятность вида $(C_1\ E) = q_1\ p_1$,

» » $(C_2\ E) = q_2\ p_2$,

. . . . . .

» » $(C_i\ E) = q_i\ p_i$.

Имѣя вѣроятность каждаго изъ несовмѣстимыхъ видовъ событія E, на основаніи теоремы сложенія получимъ полную вѣроятность событія E въ слѣдующій формѣ:

$$P = q_1\,p_1 + q_2\,p_2 \ldots + q_i\,p_i.$$

Разсмотримъ *другое доказательство* теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ.

Пусть m есть число всѣхъ равновозможныхъ и несовмѣстимыхъ статочностей, которые могутъ представляться при данномъ испытаніи. Всѣ эти статочности можно раздѣлить на группы по гипотезамъ такимъ образомъ: къ 1-й группѣ отнесемъ статочности, благопріятствующія гипотезѣ C_1 (пусть ихъ будетъ m_1); ко 2-й группѣ отнесемъ статочности, благопріятствующія гипотезѣ C_2 (пусть ихъ будетъ m_2), и т. д.; наконецъ, къ послѣдней группѣ отнесемъ статочности, благопріятствующія гипотезѣ C_i (пусть ихъ будетъ m_i).

Сумма всѣхъ этихъ статочностей равна m, т. е.

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_i = m.$$

Каждую изъ указанныхъ i группъ статочностей, соотвѣтственно благопріятствующихъ гипотезамъ C_1, C_2, C_3,..., C_i, распредѣлимъ на двѣ подгруппы, относя къ одной подгруппѣ статочности данной группы, благопріятствующія событію E, а къ другой подгруппѣ статочности той же группы, неблагопріятствующія событію E. Такимъ образомъ пусть вообще

группа m_k статочностей, благопріятствующихъ гипотезѣ C_k, разбивается на n_k статочностей, благопріятствующихъ событію E_1, и $m_k - n_k$ статочностей, неблагопріятствующихъ событію E. Очевидно, полное число статочностей, благопріятствующихъ событію E, будетъ: $n_1 + n_2 + \ldots + n_i$.

Искомая вѣроятность событія E, по основному понятію о вѣроятностяхъ, выразится такъ:

$$P = \frac{n_1}{m} + \frac{n_2}{m} + \ldots + \frac{n_i}{m},$$

иначе:

$$P = \frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{m_1}{m} + \frac{n_2}{m_2} \cdot \frac{n_2}{m} + \ldots + \frac{n_i}{m_i} \cdot \frac{m}{m}.$$

Очевидно далѣе что отношенія $\frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \ldots, \frac{m_i}{m}$ суть ничто иное, какъ вѣроятности $q_1, q_2, \ldots, q_i$ гипотезъ $C_1, C_2, \ldots, C_i$, а отношенія $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \ldots, \frac{n_i}{m_i}$ суть условныя вѣроятности $p_1, p_2, \ldots, p_i$ событія E при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ. Поэтому будемъ имѣть:

$$P = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + \ldots + p_iq_i,$$

что́ и требовалось доказать.

Доказанная теорема, какъ не трудно замѣтить, есть слѣдствіе теоремъ сложенія и умноженія въ связи съ понятіемъ о гипотезахъ, играющемъ важную роль въ законахъ мышленія и въ ученіи о вѣроятностяхъ *à posteriori*.

§ 10. Примѣры на примѣненіе теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ.

Примѣръ 1. *Имѣются три группы урнъ съ черными и бѣлыми шарами: къ 1-й группѣ принадлежатъ n_1 урнъ, причемъ въ каждой урнѣ находится a_1 бѣлыхъ и b_1 черныхъ шаровъ; ко 2-й группѣ принадлежатъ n_2 урнъ, причемъ въ каждой урнѣ находится a_2 бѣлыхъ и b_2 черныхъ шаровъ; къ 3-й группѣ принадлежатъ n_3 урнъ, причемъ въ каждой находится a_3 бѣлыхъ и b_3 черныхъ шаровъ. Урны эти имѣютъ одинаковый наружный видъ и перемѣшаны между собою. Изъ всѣхъ урнъ на удачу предполагаютъ взять одну урну и изъ нея на удачу вынуть одинъ шаръ. Опредѣлить вѣроятность того, что вынется бѣлый шаръ.*

Примѣняя къ рѣшенію этой задачи теорему о полныхъ вѣроятностяхъ, будемъ разсматривать три гипотезы:

1) вынется урна, принадлежащая 1-й группѣ,
2) » » » 2-й »
3) » » » 3-й »

Гипотезы эти несовмѣстимыя и всевозможныя.

Если $n_1 + n_2 + n_3 = n$, то вѣроятности этихъ гипотезъ выразятся соотвѣтственно слѣдующимъ образомъ:

$$q_1 = \frac{n_1}{n}, q_2 = \frac{n_2}{n}, q_3 = \frac{n_3}{n}.$$

Условная вѣроятность появленія бѣлаго шара при допущеніи 1-й гипотезы будетъ

$$p_1 = \frac{a_1}{a_1 + b_1};$$

условная вѣроятность того же событія при допущеніи 2-й гипотезы будетъ:

$$p_2 = \frac{a_2}{a_2 + b_2};$$

наконецъ, условная вѣроятность того же событія при допущеніи 3-й гипотезы будетъ.

$$p_3 = \frac{a_3}{a_3 + b_3}.$$

Слѣдовательно, полная вѣроятность того, что вынутый шаръ окажется бѣлымъ, будетъ:

$$p = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{n_2}{n} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2} + \frac{n_3}{n} \cdot \frac{a_3}{a_3 + b_3}.$$

Примѣръ 2. *Имѣются двѣ урны изъ которыхъ 1-я содержитъ a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ, а 2-я a_1 бѣлыхъ и b_1 черныхъ шаровъ. Предполагается изъ первой урны вынуть на удачу α шаровъ и перемѣшать ихъ съ шарами второй урны, затѣмъ изъ второй урны наудачу вынуть одинъ шаръ. Опредѣлить вѣроятность того, что этотъ послѣдній шаръ окажется бѣлымъ.*

Относительно разсматриваемаго опыта будемъ имѣть слѣдующую группу несовмѣстимыхъ и всевозможныхъ гипотезъ:

1) въ числѣ переложенныхъ шаровъ окажется 0 бѣлыхъ и α черныхъ шаровъ;

2) въ числѣ переложенныхъ шаровъ окажется 1 бѣлый и $\alpha-1$ черныхъ шаровъ;

. . . . . .

$\alpha+1$) въ числѣ переложенныхъ шаровъ окажется α бѣлыхъ и 0 черныхъ шаровъ.

Разсмотримъ тотъ только случай, когда $\alpha \leqq a$ и $\alpha \leqq b$. Вѣроятности вышеуказанныхъ гипотезъ легко вычисляются способомъ, изложеннымъ при рѣшеніи 6-й задачи въ § 2.

Вѣроятности этихъ гипотезъ выразятся соотвѣтственно слѣдующимъ образомъ:

$$q_1 = \frac{C_b^{\alpha}}{C_{a+b}^{\alpha}},\ q_2 = \frac{C_a^1\, C_b^{\alpha-1}}{C_{a+b}^{\alpha}},\ \ldots,\ q_{k+1} = \frac{C_a^k\, C_b^{\alpha-k}}{C_{a+b}^{\alpha}},\ \ldots$$

$$\ldots,\ q_{\alpha+1} = \frac{C_a^{\alpha}}{C_{a+b}^{\alpha}}.$$

Условныя вѣроятности того, что изъ 2-й урны вынется бѣлый шаръ, при допущеніи указанныхъ гипотезъ, пусть соотвѣтственно будутъ: $p_1,\ p_2,\ldots,p_{\alpha+1}$. Вѣроятности эти вообще выражаются такъ:

$$p_{k+1} = \frac{\alpha_1 + k}{a_1 + b_1 + \alpha},$$

гдѣ $k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \alpha$.

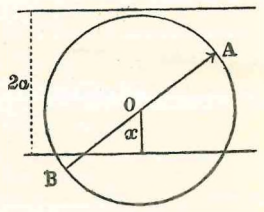
Полная вѣроятность будетъ:

$$P = \sum_{k=0}^{k=\alpha} p_{k+1}\, q_{k+1} = \frac{\sum_{k=0}^{\alpha} (a_1 + k)\, .\, C_a^k\, C_b^{\alpha-k}}{(a_1 + b_1 + \alpha)\, C_{a+b}^{\alpha}}.$$

Примѣръ 3. *Горизонтальная плоскость разграфлена параллельными линіями, отстоящими одна отъ другой на разстояніи 2a; на эту плоскость бросается на удачу безконечно тонкая игла AB длиною 2l. Опредѣлить вѣроятность того, что игла эта, остановившись на плоскости, пересѣчетъ на протяженіи своей длины одну изъ указанныхъ параллелей.*

Попробуемъ составить группу всевозможныхъ несовмѣстимыхъ гипотезъ. Пусть O будетъ середина иглы AB и x разстояніе O до ближайшей параллели (см. фиг. 12). Очевидно, x можетъ принять каждое изъ значеній отъ 0 до a, а потому относительно x можно сдѣлать безконечное число всевозможныхъ и несовмѣстимыхъ гипотезъ.

Положимъ, что x можетъ принимать только значенія $0,\ \Delta x,\ 2\Delta x,\ldots,\ (n-1)\,\Delta x$, причемъ пусть $\Delta x = \frac{a}{n}$. Измѣненная такимъ образомъ задача перейдетъ въ данную въ предѣлѣ, когда n стремится къ безконечности.



Фиг. 12.

Рѣшимъ задачу въ измѣненномъ видѣ (при конечномъ n), а затѣмъ перейдемъ къ предѣлу, когда $n = \infty$. Теперь у насъ будетъ n несовмѣстимыхъ и всевозможныхъ гипотезъ $C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1}$, причемъ гипотеза C_k состоитъ въ предположеніи, что $x = k\Delta x = \frac{ka}{n}$. Гипотезы эти будемъ считать равновѣроятными и обозначимъ вѣроятность каждой гипотезы чрезъ q. Легко найти величину этой вѣроятности q; дѣйствительно сумма вѣроятностей всѣхъ разсматриваемыхъ гипотезъ равна единицѣ, т. е. $nq = 1$. Отсюда имѣемъ:

$$q = \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{a}.$$

Условныя вѣроятности пересѣченія параллели иглою, при допущеніи каждой изъ вышеуказанныхъ гипотезъ, обозначимъ соотвѣтственно черезъ $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_k,\ \ldots,\ p_{n-1}$.

Въ послѣдующемъ будемъ различать два случая: 1) когда $l > a$ и 2) когда $l < a$.

Разсмотримъ сначала первый случай, т. е. предположимъ, что $l > a$. Въ этомъ случаѣ условная вѣроятность p_k пересѣченія иглы съ параллелью (при допущеніи гипотезы C_k, т. е. въ предположеніи, что $x = k\,.\,\Delta x$) вычисляется тѣмъ способомъ, какимъ рѣшена задача въ § 3, и выражается такъ:

$$p_k = \frac{2}{\pi}\, arc\ cos\, \frac{x}{l}.$$

Поэтому искомая полная вѣроятность P пересѣченія иглы съ параллелью представится такъ:

$$P = \sum \frac{2}{\pi a}\, arc\ cos\, \frac{x}{l}\, \Delta x,$$

гдѣ суммованіе распространяется на значенія x, заключающіяся въ слѣдующемъ ряду:

$$0,\ \Delta x,\ 2\Delta x,\ \ldots,\ (n-1)\,\Delta x.$$

Переходя къ предѣлу, когда $n=\infty$, найдемъ:

$$P=\frac{2}{\pi a}\int_0^a arc\ cos\frac{x}{l}\,dx.$$

Выполнивъ интеграцію, найдемъ, что искомая вѣроятность P представится такъ:

$$P=\frac{2}{\pi}\left(arc\ cos\frac{a}{l}+\frac{l}{a}-\sqrt{\frac{l^2}{a^2}-1}\right).$$

Разсмотримъ второй случай, когда $l<a$. Здѣсь условная вѣроятность пересѣченія иглы съ параллелью при допущеніи гипотезы C_k можетъ выразиться двоякимъ образомъ:

1) если $x=k\Delta x\leqq l$, то $p_k=\frac{2}{\pi}\,arc\,cos\frac{x}{l}$;

2) если же $x=k\Delta x>l$, то $p_k=0$, ибо при $x>l$ игла не можетъ на своемъ протяженіи встрѣтить параллели. Искомая полная вѣроятность P пересѣченія иглы съ параллелью представится при этихъ условіяхъ такъ:

$$P=\sum\frac{2}{\pi a}\,arc\ cos\frac{x}{l}\,\Delta x,$$

гдѣ суммованіе распространяется не на всѣ значенія x, написанныя въ ряду:

$$0,\ \Delta x,\ 2\Delta x,\ \ldots,\ (n-1)\,\Delta x,$$

а только на тѣ, для которыхъ $x=k\Delta x\leqq l$. Переходя къ предѣлу, когда $n=\infty$, найдемъ:

$$P=\frac{2}{\pi a}\int_0^l arc\ cos\frac{x}{l}\,dx=\frac{2l}{\pi a}.$$

ГЛАВА III.

О вѣроятностяхъ сложныхъ событій при многократномъ повтореніи простого опыта.

§ 11. Повторяемость событій. Случаи, когда вѣроятности событій E и F при повтореніи опыта не измѣняются.

I. Многое интересное подъ солнцемъ и луною повторяется, правда не въ точной копіи, а съ большими или меньшими модификаціями.

О повтореніяхъ интереса, измѣряемаго болѣе сложными ожиданіями, какъ символическими мѣрами, рѣчь будетъ идти на протяженіи главы V. Первыя же понятія составляются на повтореніяхъ, требующихъ наиболѣе простого ариѳметическаго счета явленій. На этихъ простѣйшихъ повтореніяхъ остановимъ вниманіе въ настоящей главѣ.

II. Пусть данному опыту свойственны два противоположныхъ явленія E и F. Вѣроятности ихъ пусть будутъ p и q. Этотъ опытъ, какъ *практическое дѣйствіе* даннаго *субъекта*, преслѣдующаго данный интересъ, *чисто научный* (познавательный) или же *промышленный*, назовемъ *операціей*. Это простѣйшая изъ операцій, кои мы ниже будемъ изслѣдовать.

Опытъ этотъ предполагается воспроизвести s разъ при одинаковыхъ условіяхъ, вслѣдствіе чего вѣроятности явленій E и F остаются при повтореніяхъ этого опыта неизмѣнными. Въ такомъ сложномъ опытѣ, состоящемъ изъ s отдѣльныхъ испытаній, возможны различныя совпаденія простыхъ событій, т. е. различныя сложныя событія. Опредѣленіемъ вѣроятностей ихъ мы и займемся, но сначала условимся въ нѣкоторыхъ обозначеніяхъ.

Условимся явленія E и F въ опытѣ k обозначать полнѣе черезъ E_k и F_k. При этихъ обозначеніяхъ символъ E будетъ общимъ обозначеніемъ частныхъ символовъ $E_1, E_2, \ldots, E_s$, а символъ F будетъ общимъ обозначеніемъ частныхъ символовъ $F_1, F_2, \ldots, F_s$. Далѣе предполагая, что

$$a+b+c+\ldots=s,$$

будемъ обозначать символомъ

$$(E_1E_2\ldots E_aF_{a+1}\ldots F_{a+b}E_{a+b+1}\ldots E_{a+b+c}\ldots)$$

сложное событіе, состоящее въ томъ, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ сначала a разъ состоится событіе E, потомъ b разъ событіе F, далѣе c разъ событіе E и т. д.

Переходя къ разсмотрѣнію ряда основныхъ вопросовъ, относящихся къ разсматриваемому ряду s испытаній, замѣтимъ еще, что событія E и F въ одномъ изъ опытовъ должны считаться независимыми по отношенію къ таковымъ же событіямъ въ другомъ опытѣ.

Задача 1. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ, которымъ свойственны противоположныя явленія E и F, событія эти, слѣдуя другъ за другомъ въ данномъ порядкѣ, состоятся первое α разъ и второе $s-\alpha$ разъ.*

Предположимъ, что данный порядокъ, въ которомъ при s предполагаемыхъ испытаніяхъ могутъ состояться явленія E и F, есть слѣдующій: сначала a разъ состоится событіе E; потомъ b разъ событіе F, затѣмъ c разъ событіе E и т. д., причемъ:

$$a + c + \ldots = \alpha,$$
$$b + d + \ldots = s - \alpha.$$

Придерживаясь вышеуказаннаго обозначенія, замѣчаемъ, что разсматриваемое сложное событіе, вѣроятность котораго ищется, можно представить символомъ:

$$(E_1 E_2 \ldots E_a F_{a+1} F_{a+2} \ldots E_{a+b+1} \ldots E_{a+b+c} \ldots).$$

Такъ какъ простыя явленія, изъ которыхъ слагается это событіе, суть, какъ сказано выше, независимыя, то здѣсь примѣнима теорема о вѣроятностяхъ сложныхъ событій, выведенная въ § 7. Итакъ искомая вѣроятность P представится слѣдующимъ образомъ:

$$P = pp \ldots pqq \ldots qpp \ldots p \ldots = p^{a+c+\cdots} q^{b+d+\cdots};$$

короче, будемъ имѣть:

$$P = p^\alpha q^{s-\alpha}.$$

Задача 2. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ, противоположныя событія E и F состоятся соотвѣтственно α и $s-\alpha$ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ какомъ бы то ни было порядкѣ.*

Для рѣшенія этой задачи прибѣгаемъ къ теоремѣ сложенія и умноженія. Событіе, вѣроятность котораго ищется, можетъ осуществиться въ нѣсколькихъ несовмѣстимыхъ видахъ; поэтому, для рѣшенія нашего вопроса, надо опредѣлить всѣ эти виды, найти ихъ вѣроятности и сложить ихъ.

Для опредѣленія всѣхъ видовъ разсматриваемаго событія, возьмемъ рядъ чиселъ:

$$1, 2, \ldots, s$$

и сдѣлаемъ изъ этихъ чиселъ всевозможныя сочетанія по α чиселъ въ каждомъ. Всѣхъ такихъ сочетаній будетъ C_s^α. Входящія въ каждое изъ такихъ сочетаній числа припишемъ индексами при буквахъ E, а $s-\alpha$ чиселъ ряда $1, 2, \ldots, s$, которыя не вошли въ соотвѣтственное сочетаніе, припишемъ индексами при буквахъ F. Затѣмъ изъ буквъ E и F съ приписанными къ нимъ указаннымъ способомъ индексами, соотвѣтственно каждому сочетанію, составимъ символы вида:

$$(E_1 E_2 \ldots E_a F_{a+1} F_{a+2} \ldots F_{a+b} E_{a+b+1} \ldots E_{a+b+c} \ldots).$$

Символовъ этихъ будетъ C_s^α; каждый такой символъ выразитъ, согласно установленнымъ ранѣе обозначеніямъ, сложное событіе и представитъ въ то же время видъ событія, вѣроятность котораго ищется. Эти виды несовмѣстимые и всевозможные. Вѣроятность каждаго вида опредѣляется по предшествующей задачѣ, т. е. вѣроятность каждаго вида есть $p^\alpha q^{s-\alpha}$.

Складывая вѣроятности всѣхъ этихъ видовъ, находимъ, что искомая вѣроятность $\Delta P_{s,\alpha}$ представится такъ:

$$\Delta P_{s,\alpha} = C_s^\alpha p^\alpha q^{s-\alpha}.$$

Эта формула сохраняетъ силу и при $\alpha = 0$, если полагать $C_s^0 = 1$.

Имѣемъ:

$$(q + px)^s = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m q^{s-m} x^m.$$

Поэтому можемъ сказать, что найденная вѣроятность $\Delta P_{s,\alpha}$ есть ничто иное, какъ коэффиціентъ при x^α въ разложеніи бинома $(q+px)^s$ по степенямъ x. Биномъ этотъ, по терминологіи, установленной въ части I (стр. 182), есть производящая функція вѣроятностей $\Delta P_{s,\alpha}$ или ихъ женератриса.

Будемъ полагать:

$$P_{s,\alpha} = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1} + \ldots + \Delta P_{s,\alpha-1} \text{ и } P_{s,0} = 0.$$

Задача 3. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ событіе E состоится не менѣе α разъ и не болѣе β разъ ($\alpha < \beta$).*

Искомая вѣроятность есть вѣроятность того, что при s испытаніяхъ

событіе E появится либо α разъ, либо $\alpha + 1$ разъ, либо $\alpha + 2$ разъ, . . . , либо β разъ.

Вѣроятность m — кратнаго проявленія событія E при s испытаніяхъ, выражается, какъ мы нашли, формулой

$$C_s^m p^m q^{s-m}.$$

По теоремѣ сложенія искомая вѣроятность P представится суммой такихъ формулъ для всѣхъ цѣлыхъ значеній m отъ α до β, т. е.

$$P = \sum_{m=\alpha}^{m=\beta} C_s^m p^m q^{s-m}.$$

Задача 4. *Найти наивѣроятнѣйшія числа появленій E и F при s испытаніяхъ.*

Пусть искомыя наивѣроятнѣйшія числа появленій E и F при s предполагаемыхъ испытаніяхъ будутъ α_σ и $s - \alpha_\sigma$. Вѣроятность того, что числа появленій событій E и F будутъ α и $s - \alpha$, представится коэффиціентомъ при x^α въ разложеніи бинома $(q+px)^s$ по степенямъ x, причемъ коэффиціентъ этотъ, соотвѣтствуя наивѣроятнѣйшимъ числамъ появленій E и F при s испытаніяхъ, долженъ быть наибольшимъ. Имѣемъ:

$$(q + px)^s = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m q^{s-m} x^m.$$

Наибольшій коэффиціентъ $C_s^\alpha p^\alpha q^{s-\alpha}$ долженъ быть не меньше коэффиціентовъ смежныхъ съ нимъ членовъ, т. е. должны имѣть силу неравенства:

$$C_s^\alpha p^\alpha q^{s-\alpha} \geqq C_s^{\alpha-1} p^{\alpha-1} q^{s-\alpha+1},$$
$$C_s^\alpha p^\alpha q^{s-\alpha} \geqq C_s^{\alpha+1} p^{\alpha+1} q^{s-\alpha-1}.$$

Упростивъ эти неравенства, получимъ:

$$\frac{(s - \alpha + 1)\, p}{\alpha} \geqq q \quad \text{и} \quad q \geqq \frac{(s - \alpha)\, p}{\alpha + 1}.$$

Рѣшивъ каждое изъ этихъ неравенствъ относительно α, найдемъ:

$$sp - q \leqq \alpha \leqq sp + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Такъ какъ разность предѣловъ $sp - q$ и $sp + p$, въ которыхъ должно заключаться число α, равна $p + q = 1$, то при дробномъ значеніи числа $sp - q$, между предѣлами $ps - p$ и $sp + p$ непремѣнно должно

быть единственное цѣлое число, которое и должно выражать искомое число α_σ. Если же число $sp - q$ окажется цѣлымъ, то искомое число α_σ можно принимать равнымъ по произволу какъ $ps - q$, такъ и $ps + p$.

Во всякомъ случаѣ α_σ опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha_\sigma = sp + \theta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ θ есть дробь, дополняющая число sp до цѣлаго числа и удовлетворяющая условіямъ:

$$-q \leqq \theta \leqq +p.$$

Если воспользоваться символомъ $E_\alpha(x)$, установленнымъ въ I части (§ 16), то можемъ положить:

$$\alpha_\sigma = E_{-p}(sp) \quad \text{и} \quad \theta = E_{-p}(sp) - sp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Далѣе находимъ:

$$s - \alpha_\sigma = s\,(1 - p) - \theta = sq - \theta = s - E_{-p}(sp). \quad . \quad . \quad (3)$$

Изъ равенствъ (2) и (3) находимъ:

$$\frac{\alpha_\sigma}{s - \alpha_\sigma} = \frac{p + \dfrac{\theta}{s}}{q - \dfrac{\theta}{s}}.$$

Если число s значительное, то $\frac{\theta}{s}$ весьма малая дробь, такъ что приблизительно

$$\frac{\alpha_\sigma}{s - \alpha_\sigma} = \frac{p}{q}.$$

Результатъ этотъ можно формулировать какъ *теорему*: наивѣроятнѣйшія числа появленій E и F при большомъ числѣ s испытаній приблизительно пропорціональны вѣроятностямъ этихъ событій.

Для безконечно большаго числа испытаній, т. е. для $s = \infty$, указанная пропорціональность становится вполнѣ строгою.

§ 12. Случаи, когда вѣроятности событій E и F измѣняются при переходѣ отъ одного опыта къ другому.

Вообразимъ, что опытъ, которому свойственны явленія E и F, предполагается воспроизвести s разъ; кромѣ того, пусть вѣроятности событій E и F, при переходѣ отъ одного опыта къ другому, измѣняются, причемъ вѣроятности этихъ событій въ опытѣ k условимся обозначать

черезъ p_k и q_k. Остальныя обозначенія предыдущаго параграфа сохранимъ здѣсь въ силѣ.

Вѣроятности событій E и F при каждомъ опытѣ пусть зависятъ только отъ порядка нумераціи опытовъ и для даннаго нумера опыта имѣютъ вполнѣ опредѣленныя значенія. При этихъ условіяхъ событія E и F одного опыта будутъ независимыми по отношенію къ таковымъ же событіямъ въ другомъ опытѣ.

Задача 1. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ событія E и F состоятся α и $s-\alpha$ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ данномъ порядкѣ.*

Предположимъ, что данный порядокъ, въ которомъ могутъ состояться событія E и F, есть слѣдующій: сначала a разъ состоится событіе E, потомъ b разъ событіе F, затѣмъ c разъ событіе E и т. д.

Слѣдуя установленнымъ выше обозначеніямъ, замѣчаемъ, что событіе, вѣроятность котораго ищется, выражается символомъ

$$(E_1E_2 \ldots E_aF_{a+1} \ldots F_{a+b}E_{a+b+1} \ldots E_{a+b+c} \ldots).$$

Вѣроятность P этого сложнаго событія по теоремѣ умноженія вѣроятностей въ случаѣ независимыхъ событій представится такъ:

$$P = p_1p_2 \ldots p_aq_{a+1} \ldots q_{a+b}p_{a+b+1} \ldots p_{a+b+c} \ldots$$

Задача 2. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ события E и F состоятся соотвѣтственно α разъ и $s-\alpha$, слѣдуя другъ за другомъ въ какомъ бы то ни было порядкѣ.*

Разсмотримъ коэффиціентъ при x^α въ разложеніи производящей функціи $(q_1+p_1x)\ (q_2+p_2x)\ldots(q_s+p_sx)$ по степенямъ x, т. е. въ разложеніи

$$(q_1+p_1x)\ (q_2+p_2x)\ldots(q_s+p_sx) = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1}x + \ldots$$
$$\ldots + \Delta P_{s,\alpha}x^\alpha + \ldots + \Delta P_{s,s}x^s, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ $\Delta P_{s,0}$, $\Delta P_{s,1}$, ... суть коэффиціенты. Опредѣляемый коэффиціентъ есть $\Delta P_{s,\alpha}$.

Слѣдуя правилу умноженія многочленовъ, легко убѣдиться, что коэффиціентъ $\Delta P_{s,\alpha}$ представляется суммой вида:

$$\Delta P_{s,\alpha} = \Sigma p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\ldots p_{\lambda_\alpha}q_{\mu_1}q_{\mu_2}\ldots q_{\mu_{s-\alpha}},$$

гдѣ суммованіе распространяется на всевозможныя величины вида p_{λ_1}, $p_{\lambda_2}, \ldots, p_{\lambda_\alpha}$, q_{μ_1}, q_{μ_2}, $q_{\mu_{s-\alpha}}$, въ которыхъ индексы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\alpha$, $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{s-\alpha}$ берутся изъ ряда чиселъ: $1, 2, \ldots, s$ и вмѣстѣ представляютъ собою весь этотъ рядъ чиселъ, написанныхъ только въ другомъ

порядкѣ. Очевидно, сумма эта представляетъ собою сумму вѣроятностей всѣхъ несовмѣстимыхъ видовъ, въ которыхъ можетъ состояться событіе, вѣроятность котораго ищется. Поэтому указанная сумма, а вмѣстѣ съ нею и коэффиціентъ $\Delta P_{s,\alpha}$, представитъ намъ искомую вѣроятность.

Задача эта есть обобщеніе 2-й задачи § 11, въ которую она и обращается, если принять:

$$p_1 = p_2 = p_3 \ldots = p_s, \quad q_1 = q_2 = q_3 \ldots = q_{s-\alpha}.$$

Будемъ полагать:

$$P_{s,\alpha} = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1} + \ldots + \Delta P_{s,\alpha-1} \quad \text{и} \quad P_{s,0} = 0.$$

Выведемъ затѣмъ по способу Коши интегральное выраженіе вѣроятности $\Delta P_{s,\alpha}$, которымъ воспользовался *Poisson* для приближеннаго ея вычисленія и для доказательства закона большихъ чиселъ *).

Обозначимъ женератрису вѣроятности $\Delta P_{s,\alpha}$, т. е. первую часть равенства (1), черезъ $f(x)$, такъ что будемъ имѣть:

$$f(x) = (q_1+p_1x)\ldots(q_s+p_sx) = \Delta P_{s,0} + \ldots + \Delta P_{s,\alpha}x^\alpha + \ldots \quad (2)$$

Положивъ $x = e^{\varphi i}$, найдемъ:

$$f(e^{\varphi i}) = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1}e^{\varphi i} + \ldots + \Delta P_{s,\alpha}e^{\alpha\varphi i} + \ldots$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на $e^{\alpha\varphi i}$ и помноживъ на $d\varphi$, возьмемъ отъ полученнаго результата интегралъ въ предѣлахъ φ_0 и $\varphi_0 + 2\pi$. Получимъ:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} f(e^{\varphi i})\frac{d\varphi}{e^{\alpha\varphi i}} = \sum_{k=0}^{k=s}\Delta P_{s,k}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{(k-\alpha)\varphi i}d\varphi.$$

Легко видѣть, что $\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{(k-\alpha)\varphi i}\,d\varphi$ есть нуль, если k не равно α, и есть 2π, если $k = \alpha$. Поэтому предыдущее равенство получаетъ видъ:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} f(e^{\varphi i})\frac{d\varphi}{e^{\alpha\varphi i}} = 2\pi\,.\,\Delta P_{s,\alpha}.$$

Отсюда

$$\Delta P_{s,\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} f(e^{\varphi i})\frac{d\varphi}{e^{\alpha\varphi i}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

---

*) См. часть III и см. курсъ Лорана: «Traité du Calcul des probabilités», p. 98—106, и его же книгу: «Statistique Mathématique». Paris, 1909.

§ 13. Пунктирная діаграмма связи между вѣроятностью $P_{s,\alpha}$ и перемѣннымъ α. Деформація этой діаграммы при неограниченномъ возрастаніи числа s. Мѣра устойчивости итога α.

Обозначивъ вышеуказанную вѣроятность $\Delta P_{s,\alpha}$ буквой β, будемъ имѣть уравненіе:

$$\beta = \Delta P_{s,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Для иллюстрированія связи между перемѣнными α и β можемъ построить Декартовскую діаграмму по правиламъ, изложеннымъ выше (часть I, § 14_2, стр. 78). Для этой цѣли перемѣнныя α и β нанесемъ на скалы Ox и Oy, полагая:

$$x = L \,.\, \alpha \text{ и } y = L_1 \,.\, \beta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ L и L_1 суть линейные модули скалъ.

Скала x будетъ имѣть штрихи съ помѣтками 0, 1, 2, . . ., s. Чтобы при весьма большомъ s рисунокъ не вышелъ изъ предѣловъ чертежа, нужно брать модуль L весьма малымъ. При этомъ весьма длинную скалу приходится дѣлить на скалярные интервалы. Если для измѣненій x возьмемъ скалярный интервалъ $(n,\ n+l)$, полагая $n = \alpha' L$, $\alpha' > 0$ и $n + l = \alpha'' L$, $\alpha' < \alpha'' < s$, то можемъ положить въ этомъ интервалѣ:

$$L = \frac{L_0}{\alpha'' - \alpha'},$$

гдѣ L_0 есть размѣръ всей скалы, соотвѣтствующій цыфровому интервалу $(\alpha',\ \alpha'')$ измѣненій цѣлаго числа α и долженствующій умѣщаться на данномъ кускѣ бумаги. При большомъ числѣ $\alpha'' - \alpha'$ модуль L малъ.

Напротивъ, модуль L_1 при весьма большомъ s нужно брать весьма большимъ, чтобы скала функціи $\Delta P_{s,\alpha}$ не оказалась микроскопическою. Ибо даже наибольшее значеніе $\Delta P_{s,\alpha_\sigma}$ числа β стремится къ нулю при возрастаніи s до ∞.

Очевидно, въ интервалѣ $(n,\ n+l)$, соотвѣтствующемъ даже этому наибольшему значенію должно полагать:

$$L_1 = \frac{L_1^{\,0}}{\Delta P_{s,\alpha_\sigma}},$$

гдѣ $L_1^{\,0}$ есть конечный размѣръ этой части скалы Oy, долженствующій умѣщаться въ предѣлахъ чертежа.

При этомъ у статистиковъ установился совершенно вѣрный обычай разсматривать прежде всего *серединный* интервалъ $(\alpha',\ \alpha'')$, въ которомъ

центральное положеніе занимаетъ цѣлое число α_σ, ближайшее къ числу $s\,.\,p = p_1 + p_2 + \ldots + p_s$. Въ этомъ интервалѣ пунктирная діаграмма приблизительно переходитъ въ аналитическую кривую.

Величину L_1 будемъ, напримѣръ, въ дециметрахъ опредѣлять такъ:

$$L_1 = \frac{1^{dm}}{\Delta P_{s,\alpha_\sigma}}, \quad \alpha_\sigma = E_{-p}\,(p_1 + p_2 + \ldots + p_s), \quad \ldots\ldots (6)$$

гдѣ p есть среднее ариѳметическое отъ $p_1, p_2, \ldots, p_s$, а $E_{-p}\,(x)$ есть символъ, установленный въ I части (§ 16).

Математики—статистики (Лексисъ, Борткевичъ, А. А. Чупровъ) изучаютъ зависящую отъ возрастанія числа s *деформацію* пунктирной линіи (5) и приближеннаго къ ней аналитическаго геометрическаго образа, разсматривая эти геометрическія мѣста какъ при большомъ конечномъ s, такъ и въ предѣлѣ, когда s дѣлается безконечно большимъ. Предѣлъ численнаго выраженія $L_1 : \sqrt{s}$ при $s = \infty$ обозначимъ чрезъ k, и при конечномъ s положимъ:

$$M = \frac{k}{\sqrt{s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Количество M называютъ *статистическимъ модулемъ устойчивости итога* α явленій E (см. *А. А. Чупровъ*: «Очерки по теоріи статистики», изд. 2, стр. 252). Терминъ этотъ сдѣлается вполнѣ понятнымъ послѣ вывода «закона большихъ чиселъ». Забѣгая впередъ, замѣтимъ, что число M выражается такъ:

$$M = \sqrt{\frac{2}{s}\,[p_1\,(1-p_1) + p_2\,(1-p_2) + \ldots + p_s\,(1-p_s)]} \quad \ldots\ldots (8)$$

Дѣйствительная устойчивость итога α *убываетъ* при возрастаніи M; *абсолютно твердая устойчивость* бываетъ при $M = 0$, когда всѣ величины $p_1, p_2, \ldots, p_s$ частію единицы, частію нули, т. е. когда достовѣрны въ однихъ испытаніяхъ явленія E, въ другихъ—явленія не—E или F; тутъ процессъ рѣшительно *детерминированъ*, подчиняясь машинѣ логическаго закона *исключеннаго третьяго*. Наимельшая устойчивость бываетъ при наибольшемъ M, т. е. при

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_s = \frac{1}{2}.$$

Мѣры этого рода оправдываются исчисленіемъ вѣроятностей и распространяются на болѣе сложные процессы, въ отношеніи которыхъ разсматриваемыя операціи являются лишь однимъ изъ множества различныхъ совмѣстимыхъ оперативныхъ элементовъ (классовъ).

Замѣтимъ предѣльную связь между уравненіями (6) и (7), т. е. между графическимъ модулемъ L_1 діаграммы и статистическимъ модулемъ M.

ГЛАВА IV.

Простой законъ большихъ чиселъ. Вопросы, рѣшаемые при помощи приблизительной достовѣрности.

§ 14. Элементарный выводъ теоремы Якова Бернулли.

Опредѣлимъ сначала сумму:

$$\sum_{m=0}^{m=s} C_s^m\,(m-sp)^2\,p^m q^{s-m},$$

которую короче обозначимъ черезъ J.

Выведемъ эту сумму, исходя изъ формулы бинома:

$$(q+px)^s = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m q^{s-m} x^m.$$

Помножимъ обѣ части этого равенства на x^{-sp} и результатъ продеф-ференцируемъ. Найдемъ:

$$\frac{d}{dx}\{(q+px)^s\,x^{-sp}\} = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m \,.\, q^{s-m}\,(m-sp)\,x^{m-sp-1}.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на x и опять продифференци-руемъ результатъ. Получимъ:

$$\frac{d}{dx}\left[x\,\frac{d}{dx}\{(q+px)^s\,x^{-sp}\}\right] = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m q^{s-m}\,(m-sp)^2\,x^{m-sp-1}.$$

Положивъ $x=1$, найдемъ:

$$J = \left(\frac{d}{dx}\left\{x\,\frac{d}{dx}\left[(q+px)^s\,x^{-sp}\right]\right\}\right)_{x=1}.$$

По этой формулѣ легко вычислить сумму J. Выполнимъ эти вычи-сленія въ предположеніи, что $p+q=1$. Имѣемъ:

$$log\,[x^{-sp}\,(q+px)^s] = -\,sp\,log\,x + s\,log\,(q+px),$$

откуда:

$$\frac{d}{dx}\,[x^{-sp}\,(q+px)^s] = x^{-sp}\,(q+px)^s\left\{-\frac{sp}{x}+\frac{sp}{q+px}\right\}.$$

Далѣе находимъ:

$$\frac{d}{dx}\left\{x\,\frac{d}{dx}\,[x^{-sp}\,(q+px)^s]\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{x^{-sp}\,(q+px)^s\left[\frac{spx}{q+px}-sp\right]\right\} =$$

$$\left(\frac{sp}{q+px}-\frac{sp}{x}\right)^2 x^{1-sp}\,(q+px)^s + x^{-sp}\,(q+px)^s\,\frac{spq}{(q+px)^2}.$$

При $x=1$ и $p+q=1$, будемъ имѣть:

$$J = spq,$$

или

$$\sum_{m=0}^{m=s} C_s^m\,(m-sp)^2\,p^m q^{s-m} = s\,.\,p\,.\,q\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Тождество это послужитъ намъ, какъ вспомогательное средство для вывода теоремы Бернулли.

Перейдемъ теперь къ выводу самой теоремы Бернулли.

Пусть E и F будутъ противоположныя явленія, свойственныя дан-ному опыту, а p и q ихъ вѣроятности. Опытъ предполагается вос-произвести s разъ при одинаковыхъ условіяхъ; пусть m есть ожидаемое, число появленій событія E при этихъ s предполагаемыхъ испытаніяхъ. Съ нѣкоторою вѣроятностью можемъ ожидать, что число m при про-извольномъ положительномъ числѣ t удовлетворитъ неравенству:

$$\left(\frac{m}{s}-p\right)^2 \leqq t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Вѣроятность того, что неравенство (1) будетъ удовлетворено, пусть будетъ P. Вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что m не удовлетворитъ неравенству (1) и, слѣдовательно, удовлетворитъ нера-венству

$$\left(\frac{m}{s}-p\right)^2 > t^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

будетъ $1-P$.

Вѣроятность $1-P$ неравенства (2) можемъ представить въ другой формѣ.

Сообразимъ, въ какихъ видахъ можетъ осуществиться неравенство (2)

для этого отыщемъ, какія изъ чиселъ ряда 0, 1, 2, . . ., s будутъ удовлетворять неравенству (2). Пусть всѣ эти числа будутъ:

$$m = \alpha', \quad \alpha'', \ldots, \alpha^{(k)}.$$

Видовъ, въ которыхъ можетъ осуществиться неравенство (2), очевидно, столько, сколько всѣхъ вышеуказанныхъ чиселъ α. Виды эти несовмѣстимы. Вѣроятность каждаго изъ этихъ видовъ будетъ:

$$C_s^m p^m q^{s-m},$$

гдѣ $m = \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(k)}$.

Слѣдовательно, искомая полная вѣроятность неравенства (2), по теоремѣ сложенія, представится такъ:

$$1 - P = \overline{\sum} C_s^m p^m q^{s-m}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

гдѣ $\overline{\Sigma}$ обозначаетъ, что суммованіе распространяется на числа $m = \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(k)}$.

Помня, что числа эти удовлетворяютъ неравенству (2), которое приводится къ виду:

$$\left(\frac{m - sp}{st}\right)^2 > 1,$$

нарушимъ равенство (A) умноживъ общій членъ суммы, стоящей во второй части этого равенства, на

$$\left(\frac{m - sp}{st}\right)^2.$$

Получимъ:

$$1 - P < \overline{\sum} C_s^m \frac{(m - sp)^2}{s^2 t^2} \cdot p^m q^{s-m}.$$

Усилимъ еще это неравенство, замѣнивъ сумму $\overline{\Sigma}$, которая распространяется только на нѣкоторыя изъ чиселъ $m = 0, 1, 3, \ldots, s$, суммой, распространенной на всѣ эти числа. Получимъ:

$$1 - P < \frac{1}{s^2 t^2} \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m (m - sp)^2 p^m \cdot q^{s-m}.$$

Принимая во вниманіе выведенное выше вспомогательное тождество (A), получимъ:

$$1 - P < \frac{pq}{st^2}.$$

Слѣдовательно:

$$1 > P > 1 - \frac{pq}{st^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Напишемъ теперь неравенство (1) иначе, именно:

$$-t \leqq \frac{m}{s} - p \leqq +t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Вѣроятность P того, что это неравенство будетъ имѣть силу, удовлетворяетъ условіямъ (3).

Предположимъ, что число s испытаній увеличивается до безконечности. Вообразимъ, что t весьма малая величина, именно: $t = s^{-\nu}$, $0 < \nu < {}^1/_2$. Какъ бы ни было мало t, число st^2 будетъ весьма большимъ, а тогда $\frac{pq}{st^2}$ будетъ весьма мало и $1 - \frac{pq}{st^2}$ будетъ весьма близко къ единицѣ, а, слѣдовательно, и вѣроятность P будетъ весьма мало отлична отъ единицы. Такимъ образомъ въ предѣлѣ при $s = \infty$ вѣроятность P неравенствъ (4) неограниченно приближается къ единицѣ (символу достовѣрности), причемъ t стремится къ нулю.

Это и есть теорема Бернулли, которую окончательно формулируемъ слѣдующимъ образомъ:

Вѣроятность P того, что разность между отношеніемъ ожидаемаго числа появленій событія E къ числу предполагаемыхъ испытаній и вѣроятностью p этого событія по абсолютной величинѣ не превзойдетъ даннаго сколь угодно малаго числа, при большомъ числѣ s предполагаемыхъ независимыхъ испытаній близка къ единицѣ (достовѣрности) и стремится къ единицѣ по мѣрѣ возрастанія s до безконечности.

Изъ теоремы Бернулли слѣдуетъ, что *отношеніе ожидаемаго числа m появленій событія E къ числу s всѣхъ предполагаемыхъ испытаній при возрастаніи s до ∞ стремится съ относительною достовѣрностью къ вѣроятности p событія E.*

Если бросать монету значительное число разъ, то отношеніе числа появленій орла къ числу всѣхъ бросаній, по теоремѣ Бернулли, должно съ достовѣрностью стремиться къ $\frac{1}{2}$.

Пока условія теоремы Я. Бернулли выполняются, до тѣхъ поръ она является важнымъ критеріемъ основательнаго *увѣрованія* въ ея предсказаніе и *предвидѣнія*; она служитъ закономъ надежнаго мышленія, говорящимъ, что съ приблизительною достовѣрностью число m ожидаемыхъ явленій при неограниченно ростущемъ числѣ s *независимыхъ* опытовъ тяготѣетъ къ величинѣ sp и отклоняется отъ нея на незначительное число процентовъ. Нѣкоторая неполнота достовѣрности восполняется запасными основаніями и легкимъ выкупомъ ошибки.

Законъ этотъ есть частный случай закона большихъ чиселъ, болѣе общее выраженіе котораго дано Пуассономъ. Чебышеву мы обязаны элементарнымъ выводомъ этого закона и еще болѣе общимъ его выраженіемъ, относящимся къ совпаденіямъ независимыхъ явленій въ *независимыхъ* испытаніяхъ. Числовыя закономѣрности этого рода устанавливаютъ относительныя достовѣрности сложныхъ явленій, кажущихся поверхностному взгляду *неустойчивыми* и *безпорядочными*.

§ 15. Теорема Пуассона. Значеніе ея въ вопросахъ индивидуализаціи.

Для вывода этой теоремы требуется одно вспомогательное равенство, полученіемъ котораго мы и займемся. Пусть, согласно обозначеніямъ § 12,

$$f(x) = (q_1 + p_1 x)(q_2 + p_2 x) \ldots (q_s + p_s x) = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1} x + \ldots + \Delta P_{s,s} x^s = \sum_{m=0}^{m=s} \Delta P_{m,s} x^m.$$

Держась этихъ обозначеній, опредѣлимъ сумму:

$$J = \sum_{m=0}^{m=s} \Delta P_{s,m} (m - sp)^2,$$

гдѣ p есть среднее ариѳметическое изъ $p_1, p_2, \ldots, p_s$, т. е.

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_s}{s}.$$

При этомъ будемъ предполагать, что

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ldots = p_s + q_s = 1.$$

Сумму J можемъ опредѣлить при помощи пріема, аналогичнаго тому, которымъ мы пользовались при выводѣ вспомогательнаго тождества, употребленнаго для доказательства теоремы Бернулли.

Такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{d}{dx}\left\{x \frac{d}{dx}\left[x^{-sp} f(x)\right]\right\} = \sum_{m=0}^{m=s} \Delta P_{s,m} (m - ps)^2 x^{m-ps-1}.$$

Отсюда видно, что выраженіе

$$\frac{d}{dx}\left\{x \frac{d}{dx}\left[x^{-sp} f(x)\right]\right\}$$

при $x = 1$ обращается въ искомую сумму J, т. е.

$$J = \frac{d}{dx}\left\{x \frac{d}{dx}\left[x^{-sp} f(x)\right]\right\}_{x=1}.$$

Имѣемъ:

$$log\left[x^{-sp} f(x)\right] = -sp\, log\, x + \sum_{k=1}^{k=s} log\,(q_k + p_k x).$$

Дифференцируя это равенство, получимъ:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-sp} f(x)\right] = x^{-sp} f(x)\left\{-\frac{sp}{x} + \sum_{k=1}^{k=s} \frac{p_k}{q_k + p_k x}\right\}.$$

Помноживъ это равенство на x и дифференцируя еще разъ, найдемъ:

$$\frac{d}{dx}\left\{x \frac{d}{dx}\left[x^{-sp} f(x)\right]\right\} =$$

$$= x^{-sp} f(x)\left\{\left(-\frac{sp}{x} + \sum_{k=1}^{k=s} \frac{p_k}{q_k + p_k x}\right)^2 x + \sum_{k=1}^{k=s} \frac{p_k q_k}{(q_k + p_k x)^2}\right\}.$$

Полагая здѣсь $x = 1$ и замѣчая, что $f(1) = 1$, находимъ:

$$J = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_s q_s. \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Очевидно, $2J = s \cdot M^2$, гдѣ M есть модуль устойчивости (см. § 13).

Замѣтивъ, что maximum выраженія $p_k q_k$, при условіи $p_k + q_k = 1$, есть $\frac{1}{4}$, находимъ: $p_k q_k \leqq \frac{1}{4}$. Давая здѣсь числу k значенія $1, 2, \ldots, s$ и складывая полученныя неравенства, найдемъ:

$$0 \leqq J \leqq \frac{s}{4}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$J = \frac{s\theta}{4}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A')$$

гдѣ $0 \leqq \theta \leqq 1$.

Перейдемъ теперь къ выводу *теоремы Poisson'a*.

Вообразимъ два противоположныхъ явленія E и F, свойственныхъ данному опыту. Пусть опытъ этотъ предполагается воспроизвести s разъ, но не при одинаковыхъ условіяхъ, такъ что вѣроятности событій E и F

при повтореніяхъ опыта различны. Вѣроятности эти въ опытѣ k будемъ обозначать черезъ p_k и q_k. Далѣе подъ m будемъ разумѣть ожидаемое число появленій событія E при s предполагаемыхъ испытаніяхъ.

Съ нѣкоторою вѣроятностью P можемъ ожидать, что это число m удовлетворитъ неравенству:

$$\left(\frac{m}{s} - p\right)^2 \leqq t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что число m при произвольномъ положительномъ числѣ t удовлетворитъ неравенству:

$$\left(\frac{m}{s} - p\right)^2 > t^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

будетъ $1 - P$.

Опредѣлимъ эту послѣднюю вѣроятность другимъ способомъ.

Въ ряду чиселъ $0, 1, 2, \ldots, s$ отмѣтимъ всѣ числа, удовлетворяющія неравенству (2). Пусть числа эти будутъ: $m = \alpha', \alpha'', \ldots$

Каждому изъ этихъ чиселъ соотвѣтствуетъ видъ, въ которомъ можетъ осуществиться неравенство (2). Вѣроятность каждаго вида будетъ представляться коэффиціентомъ $\Delta P_{s,m}$ при x^m въ разложеніи производящей функціи:

$$f(x) = (q_1 + p_1 x)\ (q_2 + p_2 x) \ldots (q_s + p_s x)$$

по степенямъ x. По теоремѣ сложенія, вѣроятность неравенства (2) выразится такъ:

$$1 - P = \overline{\Sigma}\, \Delta P_{s,m}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ $\overline{\Sigma}$ есть знакъ суммы, распространяемой на значенія $m = \alpha', \alpha'', \ldots$

Помня, что для этихъ значеній m имѣетъ силу неравенство (2), т. е.

$$\left(\frac{m - sp}{st}\right)^2 > 1,$$

нарушимъ равенство (3), умноживъ общій членъ второй его части на $\left(\frac{m-sp}{st}\right)^2$. Получимъ:

$$1 - P < \overline{\sum} \Delta P_{s,m} \left(\frac{m - sp}{st}\right)^2.$$

Неравенство это еще усилимъ, распространяя сумму, стоящую во второй части, на весь рядъ чиселъ $m = 0, 1, 2, \ldots, s$. Будемъ имѣть:

$$1 - P < \frac{1}{s^2 t^2} \sum_{m=0}^{m=s} \Delta P_{m,s} (m - sp)^2.$$

Принимая во вниманіе выведенное выше вспомогательное тождество (A) и его слѣдствіе (A'), получимъ:

$$1 - P < \frac{J}{s^2 t^2} = \frac{\theta}{4st^2},$$

гдѣ $0 < \theta < 1$. Слѣдовательно:

$$1 > P > 1 - \frac{J}{s^2 t^2} = 1 - \frac{\theta}{4st^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Напишемъ теперь неравенство (1) иначе, именно:

$$-t \leqq \frac{m}{s} - p \leqq +t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Вѣроятность P этихъ неравенствъ удовлетворяетъ неравенствамъ (4).

Пусть число s испытаній увеличивается до безконечности. Положимъ, что t имѣетъ весьма малое значеніе: $t = s^{-\nu}$, $0 < \nu < {}^1/_2$. Какъ бы ни было мало t, число st^2 будетъ весьма большимъ; а тогда $\frac{\theta}{4st^2}$ будетъ весьма малымъ и величина $1 - \frac{\theta}{4st^2}$ будетъ весьма близка къ 1, причемъ и P будетъ весьма мало отличаться отъ единицы. Въ предѣлѣ при возрастаніи s до ∞ вѣроятность P неравенства (5) обратится въ единицу, а t въ безконечно малое число. Результатъ этотъ представляетъ теорему Пуассона, которая формулируется такъ:

Вѣроятность P того, что разность между отношеніемъ ожидаемаго числа появленій событія E къ числу всѣхъ предполагаемыхъ испытаній и среднимъ ариѳметическимъ изъ вѣроятностей событія E при тѣхъ же испытаніяхъ не превзойдетъ по абсолютной величинѣ даннаго сколь угодно малаго числа, при большомъ числѣ s испытаній близка къ единицѣ (достовѣрности) и стремится къ 1 по мѣрѣ возрастанія s до ∞.

Изъ теоремы Пауссона слѣдуетъ, что отношеніе $\frac{m}{s}$ при неограниченномъ возрастаніи s стремится (съ нравственной достовѣрностью) къ среднему ариѳметическому p вѣроятностей $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Пока условія теоремы Пуассона выполняются, до тѣхъ поръ она является важнымъ критеріемъ основательнаго увѣрованія въ ея выводъ и предвидѣнія. Она, обобщая теорему Я. Бернулли, служитъ закономъ расширеннаго по кругозору надежнаго мышленія, говорящимъ о рядѣ испытаній или операцій и о томъ, что съ приблизительною достовѣрностью число m ожидаемыхъ явленій при неограниченно растущемъ числѣ s опытовъ тяготѣетъ къ итогу $p_1 + p_2 + \ldots + p_s$ и отклоняется отъ этого итога на незначительное число процентовъ.

Теорема Пуассона извѣстна подъ именемъ закона большихъ чиселъ

и обнимаетъ теорему Якова Бернулли, какъ частный случай. Предшествующее доказательство теоремы Пуассона и всѣ другія извѣстныя доказательства ея ограничены условіемъ независимости разсматриваемыхъ совмѣстимыхъ явленій. Эта независимость имѣетъ причину въ *индивидуальности*; въ общинѣ она далеко не всегда осуществляется. Поэтому явленія, происходящія лишь подъ флагомъ независимости (а не по ея существу), могутъ уклоняться отъ теоремы Пуассона болѣе или менѣе, смотря по характеру нарушенія условія независимости совмѣстимыхъ явленій. Существуютъ обстоятельства, когда наоборотъ законы зависимости бываютъ велики и ниспровергаютъ законы независимости, ставя на ихъ мѣсто другія закономѣрности и другіе разсчеты. Эпидеміи, политическія и экономическія войны, паника биржъ, вліяніе общественныхъ волненій и страстей, вліяніе мыслей изобрѣтателей и законодателей, соглашенія вмѣсто конкурренціи и т. д., — всѣ эти обстоятельства часто оказываютъ могущественное слитное дѣйствіе, нарушающее условіе независимости совмѣстимыхъ явленій, подлежащихъ счету.

Однако же за исключеніемъ всѣхъ этихъ вліяній сказывается самостоятельная природа *индивидуальностей*, какъ несливающихся единицъ (частныхъ «я») общественной дѣятельной среды («мы»), обезпечивая осуществленіе условій теоремы Пуассона въ вопросахъ частнаго права, частной экономіи и частнаго знанія и умѣнія.

То же самое (но въ служебномъ смыслѣ, ограниченномъ удобствами представленій) нужно сказать объ отдѣльныхъ частицахъ, молекулахъ и частичныхъ силахъ неорганическаго вещества, а также о единицахъ труда, товара, денегъ и о недѣлимыхъ организмахъ въ царствахъ растеній и животныхъ, какъ *рабовъ* укрѣпляемыхъ за людьми.

Важно замѣтить, что здѣсь, благодаря независимости испытаній и явленій, мы встрѣчаемся съ примѣромъ свободной причинности. Тѣмъ не менѣе надъ независимыми индивидуальностями и надъ атомизмомъ природы à priori возводятся общественныя закономѣрности, числовыя (въ формѣ теоремъ Пуассона и Бернулли съ ихъ нижеуказаннымъ обобщеніемъ) и графическія (въ формѣ діаграммы вѣроятности $\Delta P_{s,n}$). О сближеніи этихъ номографическихъ элементовъ à posteriori съ дѣйствительностію и необходимостію рѣчь будетъ ниже (§ 26). Пока же разъяснился первый шагъ въ примиреніи индивидуализма и общественности.

Факты и вѣроятностныя теоріи взаимно контролируютъ другъ друга въ нѣдрахъ среды, къ которой прилагаются эти методы и принципы. Этотъ взаимный контроль *сличеніемъ* (сравнительнымъ методомъ ожиданія съ дѣйствительностью) устанавливаетъ цѣльную (синтетическую) достовѣрность, какъ цѣнный результатъ, выведенный изъ закона большихъ чиселъ.

§ 16. Значеніе теоремы Пуассона въ вопросахъ о построеніи сѣти оберегающихъ банковъ въ странѣ и о стоимости отпусковъ краткосрочнаго кредита индивидуумамъ въ мелкія промышленныя дѣла. Резервы для укрѣпленія прочности банкирскихъ предпріятій по краткосрочнымъ операціямъ, исчисляемые при помощи приблизительныхъ достовѣрностей.

. . . . . .

Пока не будемъ принимать въ соображеніе, кромѣ теоремы Пуассона, другіе виды закона большихъ чиселъ, кои ниже приведены.

Вообразимъ, что при индивидуализаціи хозяйствъ на стражѣ общихъ интересовъ стоитъ въ данной странѣ сѣть банковъ, систематически содѣйствующая народной экономіи и народному труду.

Теорема Пауссона устанавливаетъ надежную теоретическую почву для сужденій по вопросу о множествѣ отдѣльныхъ отпусковъ изъ сѣти банковъ кредита въ размѣрѣ каждый разъ суммы N на данный срокъ въ большую среду отдѣльныхъ дебиторовъ, занятыхъ мелкимъ (кустарнымъ) промышленнымъ творчествомъ; — кредита, погашеніе котораго индивидуумами названной среды вѣроятно, но не абсолютно достовѣрно. Теорема Пуассона устанавливаетъ математическій способъ исчислять стоимость этого кредита, обезпечивая, на почвѣ относительной (приблизительной) достовѣрности, прочное существованіе банка и соразмѣряя эту стоимость съ среднею исправностью погашеній дебиторами своихъ обязательствъ.

Эта стоимость берется банкомъ въ видѣ $^0/_0{}^0/_0$ на кредитуемый капиталъ одинаково со всѣхъ индивидуумовъ, пользующихся кредитомъ. Въ эту стоимость включаются ожидаемый средній недоборъ погашенія и резервъ, какъ защитная мѣра, укрѣпляющая прочность положенія или устойчивость банка, отстаивающаго и общее благо, и свое существованіе.

Въ банкахъ по сбереженію и страхованію противъ кризисовъ задача нѣсколько видоизмѣняется. Для накопленія соотвѣтствующихъ средствъ частныя хозяйства могутъ объединяться въ кооперативные союзы, учреждающіе банкъ на страховыхъ началахъ взаимности, чтобы отстаивать самихъ себя; такъ какъ «одинъ въ полѣ не воинъ». Какъ земледѣльцы, бросающіе въ землю трудъ и сѣмена въ надеждѣ, что расходуемое покроется съ прибылью, такъ и люди, измышляющіе наилучшій способъ отпустить капиталъ въ работу и выгодный производительный оборотъ, рискуютъ, что отпущенныя въ дѣло издержки могутъ, при неблагопріятномъ стеченіи обстоятельствъ, не вернуться и поставить дѣло въ положеніе несостоятельности. Противъ такого неблагопріятнаго оборота дѣлъ законъ дозволяетъ учреждать кооперативные и торговые союзы съ банками, стоящими на стражѣ общихъ интересовъ.

Банкирскій способъ опредѣлять умѣренные резервы и средній недоборъ погашенія ссудъ или же, наоборотъ, среднюю исправность погашенія находится въ связи съ условнымъ опредѣленіемъ *приблизительной достовѣрности*.

Будемъ принимать числовую вѣроятность P за приблизительную достовѣрность, если имѣетъ силу *условное* неравенство:

$$1 > P \geqq 0{,}99 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Условіе это дирижеръ можетъ, конечно, измѣнить, взявъ вмѣсто дроби 0,99 другую правильную дробь, болѣе или менѣе близкую къ 1; но мы хотимъ здѣсь для наглядности держаться примѣрнаго опредѣленія приблизительной достовѣрности при помощи неравенства (6), имѣя въ виду выяснить идею.

Условившись въ терминѣ: «приблизительная достовѣрность», можемъ свести къ теоремѣ Пуассона и къ ея обобщеніямъ (см. ниже теорему Чебышева) рѣшеніе множества вопросовъ объ умѣренныхъ резервахъ прочности банкирскихъ предпріятій. Возьмемъ упрощенные примѣры, умалчивая пока о пертурбаціяхъ и считая эти примѣры *самоопредѣленія по взаимному довѣрію* наиболѣе элементарными яркими схемами дѣла.

Примѣръ 1. Пусть въ составъ кооперації входятъ s отдѣльныхъ сельскихъ хозяйствъ, почти одинаковыхъ по количеству обработываемой земли, по способамъ обработки, по климату и почвѣ. Пусть нормальная средняя урожайность покрываетъ всѣ издержки и прибыль этихъ хозяйствъ; но такъ какъ урожай бываетъ иногда ниже *себѣстоимости* и создаетъ для отдѣльнаго хозяйства затруднительное, критическое положеніе, то пусть кооперативный банкъ за умѣренный страховой взносъ b обязывается выдавать потерпѣвшимъ хозяйствамъ субсидію опредѣленнаго размѣра a. Если p есть средняя вѣроятность нормальнаго урожая для разсматриваемой группы s хозяйствъ, то возможно вычислить справедливый размѣръ b страховаго взноса въ банкъ съ умѣреннымъ резервомъ для подкрѣпленія прочности банка, какъ сберегательно-страховаго общественнаго предпріятія. Въ самомъ дѣлѣ, валовая годовая сумма $s\,.\,b$, накопляемая въ банкѣ изъ страховыхъ взносовъ всѣхъ хозяйствъ, должна съ приблизительною достовѣрностью покрывать въ концѣ года всѣ страховыя выдачи, валовой итогъ которыхъ будетъ $(s-n)\,.\,a$, при чемъ $s-n$ есть общее ожидаемое число такихъ хозяйствъ, урожай которыхъ окажется ниже данной нормы. Остатокъ (прибыль) S, послѣ покрытія страховыхъ выдачъ, будетъ:

$$S = na + s\,.\,(b-a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Обозначимъ чрезъ $P\,(l)$ вѣроятность, что число n хозяйствъ съ нормальнымъ урожаемъ удовлетворитъ неравенствамъ:

$$-l < n - sp < +l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Выберемъ числовую грань l такъ, чтобы имѣло силу приблизительное уравненіе:

$$P\,(l) = 0{,}99 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Эту величину l назовемъ «корнемъ» приблизительнаго уравненія (9).

Наименьшее значеніе n, удовлетворяющее неравенствамъ (8), приблизительно будетъ $n = sp - l$; оно будетъ соотвѣтствовать *неурожайному форсмажеру*. Резервъ, заключенный въ страховомъ взносѣ b, приносимомъ въ жертву банку, будетъ по надежности достаточенъ, если даже при $n = sp - l$ прибыль S банка не будетъ отрицательною величиною,

$$(sp - l)\,.\,a + s\,.\,(b-a) \geqq 0.$$

Отсюда наименьшее значеніе b опредѣлится такъ:

$$b = a\left(1 - p + \frac{l}{s}\right) = a\left(q + \frac{l}{s}\right), \quad \ldots\ldots (10)$$

гдѣ l есть «корень» числового уравненія (9). Это уравненіе назовемъ *уравненіемъ надежныхъ резервовъ*, сводящихся къ величинѣ $al : s$.

Точнѣйшія рѣшенія числового уравненія (9) основаны на хорошемъ приближенномъ вычисленіи вѣроятности $P\,(l)$; о подобныхъ исчисленіяхъ будетъ рѣчь въ III части настоящей книги.

Довольствуясь пока грубымъ приближеннымъ рѣшеніемъ, положимъ въ неравенствахъ (4) и (5) § 15:

$$t = \frac{5}{\sqrt{s}}\,.$$

Тогда изъ неравенствъ (4) находимъ: $P > 0{,}99$. Слѣдовательно,

$$\frac{l}{s} < t \quad \text{или} \quad \frac{l}{s} < \frac{5}{\sqrt{s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Изъ этихъ слѣдствій теоремы Пуассона и изъ равенства (10) находимъ:

$$a\,.\,q < b < a\,.\left(q + \frac{5}{\sqrt{s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Вторая часть второго неравенства, которую обозначимъ чрезъ b', представить нѣсколько форсированный, но все еще умѣренный размѣръ страховаго взноса b' съ *весьма малымъ* резервомъ $5a : \sqrt{s}$, обезпечивающимъ прочность банка:

$$b' = a \cdot \left(q + \frac{5}{\sqrt{s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Въ этой *малости резерва* при большомъ s заключается *благодѣтельность* подобныхъ учрежденій для мелкой кустарной промышленности.

Очевидно, отношеніе $\frac{l}{s}$ стремится къ нулю при неограниченномъ возрастаніи s, а премія b убываетъ до предѣла $a \cdot q$. Умѣренный налогъ $b—aq$ на кліентовъ банка, слѣдовательно, тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе ихъ число s.

Отсюда видно, что большіе кооперативы могутъ дать больше льготы своимъ кліентамъ.

Нѣсколько форсированный налогъ $\frac{5a}{\sqrt{s}}$, содержащійся во взносѣ b', долженъ въ рядѣ лѣтъ накоплять форсированный запасъ банка, служащій отчасти на покрытіе его собственныхъ необходимыхъ издержекъ дѣлопроизводства и *на борьбу съ пертурбаціями*, а затѣмъ на образованіе *обратнаго* теченія пользы (изъ банка къ членамъ союза) подъ видомъ дивиденда и подъ видомъ такихъ прочныхъ общихъ хозяйственныхъ мелiорацій, кои радикально подрываютъ общія стихійныя причины хозяйственныхъ кризисовъ, кроющіяся въ почвѣ, климатѣ, подборѣ сѣмянъ и племенныхъ породъ, подборѣ машинъ и въ ремесленномъ народномъ образованіи.

Примѣръ 2. Пусть среда s мелочныхъ предпринимателей нуждается въ кредитѣ по N рублей на предстоящую промышленную компанію. Пусть индивидуумы этой среды исправно погашаютъ ссуду при нормальномъ размѣрѣ предстоящей промышленной выручки; если же выручка нѣкоторыхъ индивидуумовъ окажется ниже низшей нормы, то они являются несостоятельными въ погашеніи ссуды. Черезъ p обозначимъ вѣроятность для отдѣльнаго индивидуума заработать выручку не ниже нормы и погасить ссуду. Банкъ, дающій ссуду средѣ въ количествѣ $N \cdot s$ рублей, защищается отъ убытковъ, обусловленныхъ частичными несостоятельностями среды, особымъ процентомъ i, обезпечивающимъ умѣренные резервы, подкрѣпляющіе устойчивость самого банка. Каковъ долженъ быть этотъ процентъ i, соразмѣряемый съ доступностью кредита для среды и съ возможностью неблагопріятнаго поступленія погашеній по истеченіи данной краткосрочной торговой компаніи?

Вопросъ этотъ опять рѣшается на основаніи приблизительной достовѣрности и при помощи теоремы Пуассона. Пусть n есть ожидаемое число погашеній и $s — n$ соотвѣтствующее ожидаемое число непогашенныхъ кредитовъ, покрываемое за счетъ особыхъ процентныхъ удержаній, представляемыхъ, при данныхъ условіяхъ вопроса, итогомъ $\frac{s \cdot N \cdot i}{100}$. Остатокъ (прибыль) M банка по покрытіи непогашенныхъ ссудъ ожидается

$$M = \frac{s \cdot Ni}{100} - (s - n) \cdot N = n \cdot N - sN\left(1 - \frac{i}{100}\right).$$

Обозначимъ чрезъ $P(l)$ вѣроятность, что ожидаемое число n удовлетворитъ неравенствамъ: $-l \leqq n - sp \leqq +l$, гдѣ l приблизительно удовлетворяетъ уравненію: $P(l) = 0{,}99$. Наименьшее значеніе n, удовлетворяющее указаннымъ сейчасъ неравенствамъ, приблизительно будетъ: $n = sp - l$; оно будетъ соотвѣтствовать неблагопріятному для промышленной среды форсмажеру. Прибыль M банка даже и при этомъ пусть не будетъ отрицательною;

$$(sp - l) \cdot N - s \cdot N \cdot \left(1 - \frac{i}{100}\right) \geqq 0.$$

Наименьшее значеніе числа i, удовлетворяющее этому условію, будетъ:

$$i = 100\left(1 - p + \frac{l}{s}\right) = 100\left(q + \frac{l}{s}\right).$$

При помощи этого равенства и теоремы Пуассона, дающей неравенство, аналогичное неравенству (11), убѣждаемся, что

$$\frac{l}{s} < \frac{5}{\sqrt{s}}.$$

Точнѣйшее опредѣленіе величины i опять связано съ точнѣйшимъ рѣшеніемъ уравненія (9). Нѣсколько форсированый процентъ i' можно опредѣлить такъ:

$$i' = 100\left(1 - p + \frac{5}{\sqrt{s}}\right).$$

Въ предѣлѣ при $s = \infty$ величины i' и i стремятся къ *наименьшей* величинѣ $100\ (1 — p)$; чѣмъ болѣе s тѣмъ льготнѣе процентъ i, совмѣстимый съ устойчивостью банка.

§ 17. Формула Стирлинга и доказательство теоремы Бернулли по способу Лапласа. Аналитическая діаграмма явленія.

Вышеприведенныя формулы и теоремы (§§ 11 — 15) имѣютъ болѣе полное выраженіе, изслѣдующее эволюцію числа α отъ его средняго значенія α_s и величину вѣроятностей $P_{s,\alpha}$ (см. § 13). Проще

всего этотъ анализъ выполняется для опытовъ теоремы Я. Бернулли. Этотъ анализъ опирается на формулу Стирлинга.

I. Прямое вычисленіе произведенія

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$$

при n большомъ представляетъ много затрудненій. Формула Стирлинга даетъ приближенное значеніе этого произведенія. Она показываетъ, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = \sqrt{2\pi} \cdot n \cdot^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1,$$

гдѣ e есть основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ.

Выведемъ эту формулу.

Начнемъ съ разсмотрѣнія интеграла:

$$\int \sin^m x \, dx.$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int \sin^m x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx,$$

откуда

$$m \int \sin^m x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx.$$

Взявъ интегралы между, предѣлами 0 и $\frac{\pi}{2}$, получимъ:

$$m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \, dx, \quad m > 1 \quad \ldots \quad (1)$$

Положимъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = u_m \quad \ldots \quad (2)$$

Изъ уравненія (1) получимъ:

$$u_m = \frac{m-1}{m} u_{m-2} \quad \ldots \quad (3)$$

Разсмотримъ два случая: когда число m будетъ четнымъ и когда число m будетъ нечетнымъ.

а) Пусть m есть четное число,

$$m = 2n.$$

При помощи равенства (3) находимъ:

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2(n-1)}.$$

Давая въ этомъ равенствѣ числу n значенія: 1, 2, ..., n и перемноживъ полученныя равенства, находимъ:

$$u_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} u_0.$$

Такъ какъ согласно равенству (2)

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

то

$$u_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \ldots \quad (4)$$

б) Пусть m нечетное число,

$$m = 2n + 1.$$

Изъ уравненія (3) имѣемъ:

$$u_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_{2n-1} \quad \ldots \quad (5)$$

Подставляя въ это равенство вмѣсто n числа: 1, 2, ..., n, перемноживъ полученныя равенства и замѣтивъ, что

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left\{ -\cos x \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

находимъ:

$$u_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{2 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)} \quad \ldots \quad (6)$$

Такъ какъ $\sin x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ есть положительная правильная дробь, то будемъ имѣть:

$$\sin^m x < \sin^{m-1} x,$$

и слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \, dx,$$

или $$u_m < u_{m-1}.$$

При помощи этого неравенства, легко убѣдиться, что

$$u_{2n} < u_{2n-1} < u_{2n-2}.$$

Подставивъ въ эти неравенства значенія u_{2n}, u_{2n-1} и u_{2n-2}, найденныя при помощи равенствъ (4) и (6), получимъ:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)} <$$

$$< \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2},$$

откуда находимъ:

$$1 < \frac{2.2.4.4.6.6\ldots(2n-2).(2n-2)}{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2}{\pi} < 1+\frac{1}{2n-1} \quad . \quad (7)$$

Пусть:

$$\Phi(n) = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots(2n-2)}{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-3)}\cdot\frac{(2n-2)}{(2n-1)}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{2}{\pi} \quad . \quad (8)$$

При этомъ обозначеніи неравенства (7) можно представить такъ:

$$1 < \Phi(n) < 1+\frac{1}{2n-1}.$$

Неравенства эти показываютъ, что

$$\Phi(n) = 1+\frac{\delta}{2n-1},$$

гдѣ δ есть положительное число меньшее 1. При помощи послѣдняго равенства не трудно убѣдиться, что

$$Lim\,[\Phi(n)]_{n=\infty} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Изъ этой формулы, между прочимъ, не трудно получить извѣстную формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots$$

Пусть

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3\ldots n}{\sqrt{2\pi}\,.\,e^{-n}\,.\,n^{n+\frac{1}{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

откуда

$$\varphi(2n) = \frac{1.2.3\ldots 2n}{\sqrt{2\pi}\,.\,e^{-2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}.$$

При помощи этихъ равенствъ и равенства (8) не трудно убѣдиться, что

$$\frac{[\varphi(n)]^4}{[\varphi(2n)]^2} = \Phi(n),$$

а равенство (9) показываетъ, что

$$Lim\,\{[\varphi(n)]^4 : [\varphi(2n)]^2\}_{n=\infty} = Lim\,[\Phi(n)]_{n=\infty} = 1 \quad . \quad . \quad (11)$$

При помощи равенства (10) находимъ:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$lg\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Разлагая $lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$ въ рядъ по извѣстной формулѣ, получимъ:

$$lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{m\,.\,n^m}+\ldots$$

Подставляя это значеніе $lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$ въ предыдущую формулу находимъ:

$$lg\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{12n^2}-\frac{1}{12n^3}+\ldots+\frac{(m-1)\,(-1)^m}{2m\,(m+1)\,.\,n^m}+\ldots \quad . \quad (12)$$

Абсолютная величина отношенія послѣдующаго члена къ предыдущему для полученнаго ряда есть:

$$\frac{m^2}{m^2+m-2}\cdot\frac{1}{n}.$$

Начиная съ $m=2$, это отношеніе при $n>1$ есть правильная дробь. Слѣдовательно, члены ряда, стоящаго во второй части равенства (12), съ самаго начала по абсолютной величинѣ убываютъ. А такъ какъ рядъ, представляемый этимъ разложеніемъ, знакоперемѣнный, то, ограничиваясь первымъ (положительнымъ) членомъ, мы получаемъ величину большую, чѣмъ $lg\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}$, т. е.

$$lg\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{\theta_0}{12n^2},$$

гдѣ θ_0 есть положительная правильная дробь, зависящая отъ n.

Переходя отъ логариѳма къ числу имѣемъ:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = e^{\frac{\theta_0}{12n^2}}.$$

Замѣняя въ послѣднемъ равенствѣ n черезъ $n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n-1$ и перемножая полученныя равенства, находимъ:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{\theta_0}{n^2} + \frac{\theta_1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{\theta_{n-1}}{(2n-1)^2}\right\}}.$$

Если въ этомъ выраженіи замѣнимъ всѣ правильныя дроби $\theta_0,\ \theta_1, \ldots$ черезъ 1 и, кромѣ того, каждое изъ чиселъ $(n+1)^2,\ (n+2)^2, \ldots$, входящихъ въ показатель, замѣнимъ черезъ n^2, то, очевидно, получимъ неравенство:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} < e^{\frac{1}{12n}},$$

откуда

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = e^{\frac{\theta}{12n}},$$

гдѣ $0 < \theta < 1$.

Слѣдовательно

$$Lim\left(\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}\right)_{n=\infty} = 1;$$

отсюда заключаемъ, что

$$Lim\left\{\left[\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}\right]^2\right\}_{n=\infty} = 1.$$

А такъ какъ на основаніи равенства (11)

$$Lim\left\{\frac{[\varphi(n)]^4}{[\varphi(2n)]^2}\right\}_{n=\infty} = 1,$$

то

$$Lim\,\{[\varphi(n)]^2\}_{n=\infty} = 1,$$

и слѣдовательно

$$Lim\,[\varphi(n)]_{n=\infty} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Подставивъ въ эту формулу значеніе $\varphi(n)$, получимъ:

$$Lim\left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}}\right]_{n=\infty} = 1.$$

Отсюда и слѣдуетъ, что при большихъ значеніяхъ n приблизительно будемъ имѣть:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Оцѣнимъ степень этого приближенія.

Нетрудно убѣдиться въ справедливости тождества:

$$lg\,\varphi(n) = lg\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} + lg\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)} + lg\frac{\varphi(n+2)}{\varphi(n+3)} +$$

$$+ \ldots + lg\frac{\varphi(n+m)}{\varphi(n+m+1)} + lg\,\varphi(n+m+1), \ldots (14')$$

гдѣ m есть цѣлое число, могущее возрасти до ∞.

При помощи равенства (13) легко убѣдиться, что послѣдній членъ правой части равенства (14′) стремится къ нулю, когда m возрастаетъ до ∞, и слѣдовательно, рядъ, представляемый второю частью равенства (14′), сходящійся. Поэтому можно написать:

$$lg\,\varphi(n) = \sum_{m=0}^{m=\infty} lg\frac{\varphi(n+m)}{\varphi(n+m+1)} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Каждый членъ этой суммы, какъ показываетъ равенство (12), есть величина положительная. Слѣдовательно

$$lg\,\varphi(n) > 0 \quad \text{и} \quad \varphi(n) > 1.$$

Подставивъ въ послѣднее неравенство значеніе $\varphi(n)$, получимъ:

$$n! > \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Умноживъ обѣ части равенства (12) на $(n+1)$, находимъ:

$$(n+1)\,lg\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{120n^3} +$$

$$+ \ldots + (-1)^m \cdot \frac{m-2}{2m(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{n^m} + \ldots\ldots (17)$$

Абсолютная величина отношенія послѣдующаго члена ряда, стоящаго во второй части этого равенства, къ предыдущему такова:

$$\frac{m^2 - m}{m^2 + m - 6} \cdot \frac{1}{n}.$$

Для $m > 3$ отношеніе это есть правильная дробь. Поэтому сумма

$$-\frac{1}{120n^3} + \ldots + (-1)^m \frac{m-2}{2m\,(m+1)\,(m+2)} \cdot \frac{1}{n^m} + \ldots$$

отрицательна.

На основаніи этого замѣчанія и равенства (17) легко убѣдиться, что

$$lg \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} < \frac{1}{12n\,(n+1)},$$

или, замѣнивъ n черезъ $n + m$,

$$lg \frac{\varphi(n+m)}{\varphi(n+m+1)} < \frac{1}{12\,(n+m)\,(n+m+1)}.$$

Принимая во вниманіе это неравенство и равенство (15), а также замѣчая, что

$$\frac{1}{(n+m)\,(n+m+1)} = \frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m-1},$$

заключаемъ, что

$$lg\,\varphi(n) < \frac{1}{12} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m+1} \right) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Такъ какъ

$$\sum_{m=0}^{m=m'} \left(\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m+1} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n+m'} - \frac{1}{n+m'+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m'+1},$$

то

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m+1} \right) = Lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m'+1} \right)_{m'=\infty} = \frac{1}{n}.$$

Подставивъ это значеніе суммы въ неравенство (18), находимъ:

$$lg\,\varphi(n) < \frac{1}{12n};$$

откуда

$$\varphi(n) < e^{\frac{1}{12n}} \quad \text{или} \quad n! < \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{12n}} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Неравенства (16) и (19) даютъ предѣлы, въ которыхъ заключается значеніе $n!$, и показываютъ, что

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{\frac{1}{2}+n} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

гдѣ θ есть правильная положительная дробь, зависящая отъ n.

Равенство (20) даетъ возможность судить о степени точности формулы (14) Стирлинга.

Для n достаточно большаго множитель $e^{\frac{\theta}{12n}}$ весьма близокъ къ единицѣ. Такъ уже при $n = 10$ множитель этотъ отличается отъ единицы менѣе, чѣмъ на 0,01, и, слѣдовательно, погрѣшность формулы Стирлинга менѣе одного процента величины этой формулы.

II. Перейдемъ теперь *къ доказательству теоремы Бернулли по способу Лапласа*, каковое доказательство заслуживаетъ вниманія по той причинѣ, что оно даетъ приближенное выраженіе вѣроятности $\Delta P_{s,\alpha}$ (§ 11) и той вѣроятности P, которая играетъ роль въ сужденіяхъ этой теоремы.

Пусть p есть вѣроятность событія E, q — вѣроятность противоположнаго событія F, такъ что

$$p + q = 1.$$

Пусть далѣе, предполагается произвести s испытаній, причемъ s есть число весьма большое, въ предѣлѣ обращающееся въ ∞. Разумѣя подъ n ожидаемое число появленій событія E при s испытаніяхъ, обозначимъ черезъ P вѣроятность того, что число n удовлетворитъ неравенствамъ:

$$-l \leqq n - ps \leqq +l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Выше мы получили слѣдующія выраженія для наивѣроятнѣйшихъ чиселъ α и β появленій событій E и F при s испытаніяхъ (см. § 11, задача 4):

$$\alpha = E_{-p}(ps) = ps + \theta; \quad \beta = s - \alpha = qs - \theta, \quad \ldots \quad (22)$$

гдѣ $\theta = -ps + E_{-p}(ps)$,

$$-q \leqq \theta \leqq +p.$$

Очевидно α и β суть оба весьма большія числа одного порядка съ s всегда, кромѣ случая абсолютно твердой устойчивости одного изъ явленій E и F (см. § 13), причемъ p есть либо 1, либо 0.

Неравенства (21) могутъ быть представлены такъ:

$$-l - \theta \leqq n - \alpha \leqq +l - \theta,$$

причемъ вѣроятность P этихъ неравенствъ, на основаніи задачи 3 въ § 11, представится такъ:

$$P = \sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu} \Delta P_{s,\,\alpha+i}, \quad \text{гдѣ } \Delta P_{s,\,\alpha+i} = \frac{s!}{(\alpha+i)\,!\,(\beta-i)!}\, p^{\alpha+i} q^{\beta-i}, \quad . \quad (23)$$

λ есть цѣлая часть $l + \theta$ и μ есть цѣлая часть числа $l - \theta$.

Примѣнительно къ обозначенію $E_a(x)$, установленному въ I части § 16, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= E_0(l+\theta) = E_0(l - ps + E_{-p}(sp)), \\ \mu &= E_0(l-\theta) = E_0(l + ps - E_{-p}(sp)) \end{aligned}\right\}. \quad . \quad . \quad (23^I)$$

Будемъ считать l большимъ, но порядка σ низшаго, чѣмъ s, такъ что

$$l = ks^\sigma,$$

гдѣ k есть число, сохраняющее конечное значеніе при $s = \infty$, а σ правильная положительная дробь. Очевидно, λ и μ суть большія числа одного порядка σ съ l.

При указанномъ выборѣ l, числа α и β, опредѣляемыя равенствами (22), будутъ высшаго порядка, чѣмъ число l, и слѣдовательно отношенія $\frac{l}{\alpha}$ и $\frac{l}{\beta}$, а также отношенія $\frac{\lambda}{\alpha}$, $\frac{\lambda}{\beta}$, $\frac{\mu}{\alpha}$ и $\frac{\mu}{\beta}$ будутъ при значительномъ s малыми числами, стремящимися къ нулю при возрастаніи s до ∞.

Вмѣстѣ съ тѣмъ для значеній i въ предѣлахъ суммированія, указаннаго во второй части перваго равенства (23), отношенія

$$\frac{i}{\alpha}, \quad \frac{i}{\beta}$$

также должны быть весьма малыми величинами, стремящимися къ нулю при возрастаніи s до ∞.

При всѣхъ сдѣланныхъ нами ограниченіяхъ, къ произведеніямъ

$$s!, \quad (\alpha+i)!, \quad (\beta-i)!$$

можно приложить формулу (20) Стирлинга, которая даетъ:

$$\begin{aligned} s! &= \sqrt{2\pi s}\,.\,e^{-s} s^s e^{\omega}, \\ (\alpha+i)! &= \sqrt{2\pi(\alpha+i)}\,.\,e^{-\alpha-i}(\alpha+i)^{\alpha+i} e^{\omega_1}, \\ (\beta-i)! &= \sqrt{2\pi(\beta-i)}\,.\,e^{-\beta+i}(\beta-i)^{\beta-i} e^{\omega_2}, \end{aligned}$$

гдѣ ω, ω_1, ω_2 суть весьма малыя величины, стремящіяся къ нулю при возрастаніи s до ∞.

Далѣе находимъ:

$$\frac{s!}{(\alpha+i)!(\beta-i)!} = \sqrt{\frac{s}{2\pi(\alpha+i)(\beta-i)}} \left(\frac{s}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i} \cdot \left(\frac{s}{\beta-i}\right)^{\beta-i} e^{\Omega}, \quad . \quad (23^{II})$$

гдѣ $\Omega = \omega - \omega_1 - \omega_2$.

Подставивъ выраженіе (23^{II}) во второе изъ равенствъ (23) и замѣтивъ, что, какъ показываютъ равенства (22),

$$p = \frac{\alpha}{s} + \frac{\theta}{s} = \frac{\alpha}{s}\left(1 + \frac{\theta}{\alpha}\right),$$

$$q = \frac{\beta}{s} - \frac{\theta}{s} = \frac{\beta}{s}\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right),$$

находимъ:

$$\Delta P_{s,\,\alpha+i} = T(\alpha+i)\,.\,M = \left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i}\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}\,.\,M, \quad . \quad (24)$$

гдѣ

$$M = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+i)(\beta-i)}}\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha+i}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i} e^{\Omega}.$$

Опредѣлимъ предѣлъ, къ которому стремится это выраженіе вѣроятности $\Delta P_{s,\,\alpha+i}$ при возрастаніи s до ∞.

Такъ какъ

$$lg\left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i} = lg\left(\frac{1}{1+\frac{i}{\alpha}}\right)^{\alpha+i} = -(\alpha+i)\,lg\left(1+\frac{i}{\alpha}\right) =$$

$$= -(\alpha+i)\left[\frac{i}{\alpha} - \frac{i^2}{2\alpha^2} + \dots\right] = i\left(-1 - \frac{i}{2\alpha} + \frac{i^2}{6\alpha^2} - \dots\right),$$

$$lg\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i} = lg\left(\frac{1}{1-\frac{i}{\beta}}\right)^{\beta-i} = -(\beta-i)\,lg\left(1-\frac{i}{\beta}\right) =$$

$$= +(\beta-i)\left(\frac{i}{\beta} + \frac{i^2}{2\beta^2} + \dots\right) = +i\left(1 - \frac{i}{2\beta} - \frac{i^2}{6\beta^2} + \dots\right),$$

то

$$lg\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i}\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i}\right] = -\frac{i^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) - i\left[-\frac{i^2}{6\alpha^2} + \frac{i^2}{6\beta^2} - \dots\right].$$

Выберемъ l такъ, чтобы сумма

$$-i\left[-\frac{i^2}{6\alpha^2} + \frac{i^2}{6\beta^2} - \dots\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24^I)$$

была при значительномъ s весьма мала. Для этого достаточно, чтобы члены низшаго порядка, т. е $-\frac{i^3}{6\alpha^2}$ и $\frac{i^3}{6\beta^2}$, были малы даже для наибольшихъ по абсолютной величинѣ значеній i, близкихъ къ $\pm l$. Если σ есть порядокъ величины l относительно s, т. е. $l = ks^\sigma$, гдѣ k сохра-

няетъ конечное значеніе при $s = \infty$, то, замѣчая, что α и β суть весьма большія числа одного порядка съ s, имѣемъ:

$$\frac{l^3}{\alpha^2} = Ks^{3\sigma-2},$$

$$\frac{l^3}{\beta^2} = Ls^{3\sigma-2},$$

гдѣ K и L суть конечные факторы.

Выбравъ σ такъ, что $3\sigma-2<0$, т. е.

$$\sigma < \frac{2}{3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

мы найдемъ, что количества $\frac{l^3}{\alpha^2}$, $\frac{l^3}{\beta^2}$, $\frac{i^3}{\alpha^2}$ и $\frac{i^3}{\beta^2}$ должны быть, при значительномъ s, малыми величинами, и всѣ члены разсматриваемой суммы (24′) при такомъ выборѣ порядка σ числа l будутъ малыми количествами, образующими быстро сходящійся рядъ. Слѣдовательно, и вся сумма будетъ мала.

Означивъ эту сумму черезъ δ, будемъ имѣть:

$$lg\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i}\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i}\right\} = -\frac{i^2}{2}\cdot\frac{s}{\alpha\beta}+\delta.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i}\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i} = e^{-\frac{i^2}{2}\cdot\frac{s}{\alpha\beta}}\cdot e^{\delta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25')$$

причемъ $Lim\ (\delta)_{s=\infty} = 0$.

Представивъ множитель

$$\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+i)(\beta-i)}}$$

въ видѣ

$$\sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{\alpha}\right)\left(1-\frac{i}{\beta}\right)}},$$

мы заключаемъ, что при возрастаніи s онъ стремится къ единицѣ. Поэтому можно положить:

$$\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+i)(\beta-i)}} = e^{\delta'},$$

причемъ $Lim\ (\delta')_{s=\infty} = 0$.

Найдемъ, наконецъ, предѣлъ, къ которому стремится произведеніе

$$\left(1+\frac{\theta}{\beta}\right)^{\alpha+i}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i}$$

при возрастаніи s до ∞.

Такъ какъ

$$lg\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha+i} = (\alpha+i)\left[\frac{\theta}{\alpha}-\frac{\theta^2}{2\alpha^2}+\frac{\theta^3}{3\alpha^3}-\ldots\right] = \theta+h,$$

$$lg\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i} = (\beta-i)\left[-\frac{\theta}{\beta}-\frac{\theta^2}{2\beta^2}-\frac{\theta^3}{3\beta^3}-\ldots\right] = -\theta+h',$$

гдѣ h и h' суть величины, стремящіяся, при выполненіи условія (25), къ нулю по мѣрѣ возрастанія s до ∞, то

$$lg\left[\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha+i}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i}\right] = h'+h'.$$

Положивъ

$$h+h' = \delta'',$$

будемъ имѣть:

$$\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha+i}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i} = e^{\delta''},$$

причемъ $Lim\ (\delta'')_{s=\infty} = 0$. Вмѣстѣ съ тѣмъ находимъ: $M = e^{\delta'+\delta''}$.

Отсюда и изъ равенствъ (24) и (25′) получаемъ:

$$\Delta P_{s,\,\alpha+i} = \varphi(i)\, e^{\delta+\delta'+\delta''+\Omega} = \sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}\cdot e^{-\frac{i^2 s}{2\alpha\beta}+\delta+\delta'+\delta''+\Omega}, \quad . \quad (26)$$

гдѣ при весьма большомъ s величины δ, δ', δ'' и Ω могутъ быть отброшены какъ весьма малыя, пренебрегаемыя погрѣшности. Діаграмма аналитической функціи $\varphi(i)$ называется «кривою вѣроятности», въ Лапласовской формѣ.

При помощи формулъ (23) и (26) мы получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$P = \sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu} e^{-\frac{i^2 s}{2\alpha\beta}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}\, e^{\varepsilon_i},$$

гдѣ $\varepsilon_i = \delta+\delta'+\delta''+\Omega$ и $Lim\ (\varepsilon_i)_{s=\infty} = 0$.

Пусть ζ и ζ_1 будутъ наименьшая и наибольшая изъ величинъ ε_i. Будемъ имѣть:

$$e^{\zeta} \leqq e^{\varepsilon_i} \leqq e^{\zeta_1},$$

и слѣдовательно

$$e^{\zeta}\sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu} e^{-\frac{i^2 s}{2\alpha\beta}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}} < P < e^{\zeta_1}\sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu} e^{-\frac{i^2 s}{2\alpha\beta}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}},$$

причемъ $Lim\ (\zeta)_{s=\infty} = Lim\ (\zeta_1)_{s=\infty} = 0.$

Поэтому

$$Lim\,(P)_{s=\infty} = Lim\,(Q)_{s=\infty}, \quad \ldots\ldots \quad (26')$$

гдѣ

$$Q = \sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu} e^{-\frac{i^2 s}{2\alpha\beta}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Положивъ

$$i\sqrt{\frac{s}{2\alpha\beta}} = x_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27')$$

и замѣтивъ, что при этомъ обозначеніи

$$\sqrt{\frac{s}{2\alpha\beta}} = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i,$$

получимъ для Q слѣдующее выраженіе:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu} e^{-x_i^2}\,\Delta x_i.$$

Такъ какъ эта сумма въ предѣлѣ при $s = \infty$ совпадаетъ съ интеграломъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_{-\lambda}}^{x_\mu} e^{-x^2}\,dx$$

(ибо Δx_i при возрастаніи s стремится къ нулю), то будемъ имѣть *):

$$Lim\,(Q)_{s=\infty} = Lim\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x_{-\lambda}}^{x_\mu} e^{-x^2}dx\right\}_{s=\infty}.$$

*) Формула Эйлера (см. часть I, § 28) можетъ служить для перехода отъ суммы (27) къ интегралу, опредѣляя погрѣшность этого перехода или замѣны одного другимъ при весьма большомъ, но конечномъ числѣ s.

Это равенство и равенство (26′) показываютъ, что

$$Lim\,(P)_{s=\infty} = Lim\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x_{-\lambda}}^{x_\mu} e^{-x^2}\,dx\right\}_{s=\infty}$$

Изъ равенствъ (27′), (22) и (23′) и изъ обозначенія x_i слѣдуетъ:

$$Lim\,x_\mu = -\,Lim\,(x_{-\lambda}) = \frac{l}{\sqrt{2pqs}}.$$

Положивъ для краткости

$$\frac{l}{\sqrt{2pqs}} = g, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

будемъ имѣть:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-g}^{+g} e^{-x^2}\,dx + h = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^g e^{-x^2}\,dx + h, \quad \ldots \quad (29)$$

гдѣ h есть отбрасываемая въ приближенномъ счетѣ малая величина, стремящаяся къ нулю, при возрастаніи s до ∞. По величинѣ интеграла

$$\Theta\,(g) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^g e^{-x^2}\,dx$$

приближенно можно судить о величинѣ P и рѣшать уравненія типа (9) § 16. Существуетъ таблица функціи $\Theta\,(x)$ (см. § 45).

Величина интеграла $\Theta\,(g)$ при возрастаніи g весьма быстро стремится къ единицѣ, предѣльному значенію этого интеграла для $g = \infty$. Приведемъ значенія $\Theta\,(g)$ для нѣсколькихъ частныхъ значеній аргумента g.

$$\Theta\,(0) = 0;\ \Theta\,(1) = 0{,}8385;\ \Theta\,(2) = 0{,}9953;\ \Theta\,(3) = 0{,}99997;\ \Theta\,(\infty) = 1.$$

Взявъ графическіе модули L и L_1, принявъ $L\,.\,N$ за ординату y и $L_1 g$ за абсциссу x и построивъ діаграмму уравненія:

$$N = 1000\,\Theta\,(g),$$

мы получимъ изъ этой діаграммы (ср. часть I, § 14_2, п. V) наглядное представленіе о той быстротѣ, съ которой ордината y стремится къ $1000\,L$, а $\Theta\,(g)$ стремится къ единицѣ при возрастаніи g. Прямая

$$y = 1000\,L,$$

параллельная оси x, служитъ асимптотой этой кривой.

Разсмотримъ, какія значенія можетъ имѣть величина g, если ее опре-

дѣлять при помощи равенства (28) съ соблюденіемъ ранѣе указанныхъ условій относительно l, т. е. полагая

$$l = ks^{\sigma}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29')$$

гдѣ k есть конечный факторъ, $\sigma < \frac{2}{3}$, а s есть число весьма большое. Будемъ имѣть:

$$g = \frac{k}{\sqrt{2pq}} s^{\sigma - \frac{1}{2}}.$$

Для σ, заключеннаго между предѣлами $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$, g представляетъ весьма большую величину.

Такимъ образомъ, не смотря на тѣ ограниченія, которыя мы наложили на l, мы можемъ l выбрать такъ, чтобы g было весьма большой величиной и, слѣдовательно, чтобы выведенное для P выраженіе было весьма близко къ единицѣ. Эта величина P есть вѣроятность того, что ожидаемое число n появленій событія E удовлетворитъ неравенствамъ: (21), а слѣдовательно и неравенствамъ:

$$-\frac{l}{s} \leqq \frac{n}{s} - p \leqq +\frac{l}{s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Иначе говоря, P есть вѣроятность того, что абсолютная величина разности $\frac{n}{s} - p$ не превзойдетъ числа $\frac{l}{s}$. Это послѣднее число при $^1/_2 < \sigma < {}^2/_3$ весьма мало и при возрастаніи s стремится къ нулю, причемъ вѣроятность P весьма близка къ 1 и стремится къ 1 или достовѣрности.

Результатъ этотъ и составляетъ теорему Якова Бернулли.

Изложенный выводъ теоремы Бернулли имѣетъ то преимущество, что онъ даетъ приближенныя выраженія вѣроятности $\Delta P_{s,\,\alpha+i}$ и вѣроятности P того, что n удовлетворитъ неравенствамъ (30), которыя при помощи равенства (28) приводятся къ виду:

$$-g\sqrt{\frac{2pq}{s}} \leqq \frac{n}{s} - p \leqq +g\sqrt{\frac{2pq}{s}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Приближенное выраженіе вѣроятности P будетъ:

$$P = \Theta(g) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^g e^{-x^2}\, dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

III. *Оцѣнка эволюціи итога явленій съ помощію аналитической діаграммы.* По § 11 величина $\Delta P_{s,\,\alpha+i}$, опредѣляемая вторымъ равенствомъ (23), есть вѣроятность, что при s испытаніяхъ явленіе E повторится $\alpha + i$ разъ. Вышеизложенное доказательство важно по тому, что оно приводитъ къ аналитическимъ приближеннымъ выраженіямъ $T(\alpha + i)$ и $\varphi(i)$ вѣроятности $\Delta P_{s,\,\alpha+i}$ съ помощію формулъ (24) и (26).

Безъ выраженій этого рода, вычисленіе вѣроятности $\Delta P_{s,\,\alpha+i}$ съ помощію абсолютно точнаго выраженія по формулѣ (23), при весьма большихъ значеніяхъ s, $\alpha + i$ и $s - \alpha - i$, не возможно по неприступности этого выраженія для практическаго вычисленія. Приближенная же вѣроятность $T(\alpha + i)$ или $\varphi(i)$ выводитъ изъ этого затрудненія.

Подобная приближенная оцѣнка вѣроятности $\Delta P_{s,\,\alpha+i}$, какъ функціи гадательнаго итога $\alpha + i$ явленій E, взвѣшиваетъ возможныя колебанія итога явленій и приносимыхъ ими предметовъ владѣнія и интереса. Эти колебанія назовемъ эволюціей итога явленій.

Оцѣнка эволюціи итога явленій имѣетъ значеніе потому, что законъ большихъ чиселъ въ формѣ теоремы Я. Бернулли имѣетъ извѣстную ничтожную *неустойчивость*, и притомъ теорема эта открываетъ лишь приблизительныя достовѣрности. Порокъ или изъянъ этихъ исчисленій необходимо запомнить вообще, ибо теорема Я. Бернулли, какъ увидимъ, имѣетъ безчисленныя примѣненія, и ничтожныя ея пороки суммируются въ опасные валовые итоги погрѣшности и неустойчивости.

Эволюцію, какъ измѣнчивость и неустойчивость, нужно изучать: 1) по ея матеріальной скалѣ $n = \alpha + i$ и 2) въ ея отношеніи къ устойчивости, какъ приблизительной достовѣрности, что колебаніе числа n не уйдетъ изъ данныхъ тѣсныхъ границъ, опредѣляемыхъ неравенствами типа (30).

Опредѣляемый неравенствами (30) такой кусокъ скалы $n = \alpha + i$, на которомъ формула $\varphi(i)$ годна въ качествѣ приближенной къ вѣроятности $\Delta P_{s,\,\alpha+i}$, отсѣкается равенствомъ (29′) и неравенствомъ (25); внѣ этого куска формула $\varphi(i)$ бываетъ подозрительною и негодною. Этотъ кусокъ тѣснѣе того, въ которомъ бываетъ годною формула $T(\alpha + i)$ и который отсѣкается равенствомъ (29′) и неравенствомъ: $\sigma < 1$.

Укажемъ еще особенный случай непригодности формулъ $\varphi(i)$ и $T(\alpha + i)$. Этотъ изъянъ бываетъ тогда, когда вѣроятность p явленія E есть либо 1, либо 0, т. е. когда число $\alpha + i$ получаетъ абсолютно непоколебимое значеніе, равное либо s, либо 0; въ этихъ случаяхъ самая эволюція числа $\alpha + i$ не существуетъ, и функціи $T(\alpha + i)$ и $\varphi(i)$ перемѣннаго i теряютъ смыслъ. Формулы $\varphi(i)$ и $T(\alpha + i)$ неопредѣленны и неточны также вблизи этого особеннаго случая, когда вѣроятность p весьма близка либо къ 1, либо къ 0, а число s хотя и весьма большое, но не безконечное.

ГЛАВА V.

Математическое ожиданіе и его приложеніе къ вопросамъ о дѣятельности, приносящей плоды, и объ играхъ. Оцѣнка цѣнностей въ обмѣнѣ и рискѣ. Обобщеніе простого закона большихъ чиселъ и діагнозъ его устойчивости.

---

§ 18. Опредѣленіе и статистическія свойства математическаго ожиданія. Индуктивныя уравненія и методъ исторіи. Ассоціація идей и фактовъ.

Вообразимъ операцію или опытъ O которому свойственны несовмѣстимыя и всевозможныя дѣйствія $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Вѣроятности этихъ явленій обозначимъ соотвѣтственно черезъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$. При данномъ испытаніи одно изъ указанныхъ явленій непремѣнно осуществится, такъ что

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Пусть x есть перемѣнная въ апріорномъ сужденіи вещественная величина, способная принимать въ концѣ опыта только слѣдующія значенія:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

причемъ пусть x принимаетъ то или другое изъ этихъ значеній, смотря по тому, какое изъ дѣйствій $E_1, E_2, \ldots, E_n$ осуществляется при испытаніи,—именно, если при опытѣ состоится событіе E_k, то пусть x принимаетъ значеніе x_k. При этихъ условіяхъ вѣроятность того, что x получитъ значеніе x_k, очевидно, равняется вѣроятности p_k событія E_k. Поэтому p_k называется, иначе, вѣроятностью значенія x_k перемѣннаго x, приносимаго операціей O.

Выраженіе

$$a = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

называется *математическимъ ожиданіемъ перемѣннаго* x. Согласно этому опредѣленію, *математическое ожиданіе перемѣннаго* x *есть сумма*

произведеній всѣхъ возможныхъ частныхъ значеній перемѣннаго x *на вѣроятности этихъ значеній.*

Это опредѣленіе распространяется и на тотъ случай, когда перемѣнное измѣняется непрерывно, причемъ сумма, выражающая математическое ожиданіе этого перемѣннаго, представится опредѣленнымъ интеграломъ.

Выраженіе

$$b = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2$$

называется математическимъ ожиданіемъ квадрата перемѣннаго x, т. е. *математическое ожиданіе квадрата перемѣннаго* x *есть сумма произведеній квадратовъ всѣхъ возможныхъ частныхъ значеній* x *на вѣроятности этихъ значеній.*

Подобнымъ образомъ опредѣляются математическія ожиданія всѣхъ степеней перемѣннаго x и всѣхъ его функцій.

Математическое ожиданіе a перемѣннаго x будемъ называть также *вѣроятностнымъ* (кредитнымъ) *среднимъ значеніемъ* его, отличая этотъ терминъ отъ «ариѳметическаго средняго» фактическихъ значеній того же перемѣннаго, наблюдаемыхъ *статистикой* при многократномъ повтореніи обсуждаемаго опыта O.

Математическое ожиданіе a перемѣннаго x занимаетъ среднее положеніе въ промежуткѣ между *наименьшимъ* x' и *наибольшимъ* x'' изъ значеній $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$x' < a < x''.$$

Разсмотримъ здѣсь одно важное свойство математическихъ ожиданій, которое находится въ связи съ простымъ закономъ большихъ чиселъ и которое приведетъ насъ къ другому опредѣленію математическаго ожиданія, а именно по *статистическому способу предѣловъ*.

Пусть вышеуказанный опытъ O, теченіемъ котораго опредѣляется то или другое значеніе перемѣннаго x, предполагается воспроизвести s разъ. Каждый разъ опытъ приведетъ въ концѣ къ опредѣленному значенію перемѣннаго x. Сумму всѣхъ этихъ *фактическихъ* значеній x назовемъ *статистической суммой* и обозначимъ черезъ Σx, причемъ среднее ариѳметическое изъ этихъ значеній будетъ $\frac{\Sigma x}{s}$.

Представимъ статистическую сумму Σx въ другой формѣ.

Можно ожидать, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ O перемѣнное x нѣсколько разъ (m_k разъ) приметъ значеніе x_k, иначе говоря, m_k разъ осуществится событіе E_k. Будемъ имѣть:

$$\Sigma x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n,$$

откуда

$$\frac{\Sigma x}{s} = \frac{m_1}{s} x_1 + \frac{m_2}{s} x_2 + \ldots + \frac{m_n}{s} x_n .$$

Отношенія

$$\frac{m_1}{s}, \frac{m_2}{s}, \ldots, \frac{m_n}{s}$$

называются въ статистикѣ *частостями* явленія соотвѣтственныхъ значеній $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перемѣннаго x при s повтореніяхъ опыта.

Предполагая теперь, что число s стремится къ ∞, на основаніи теоремы Я. Бернулли, будемъ имѣть съ нравственною достовѣрностью:

$$Lim \frac{m_1}{s} = p_1, \; Lim \frac{m_2}{s} = p_2, \ldots, \; Lim \frac{m_n}{s} = p_n .$$

Иначе говоря, при *независимости* испытаній вышеупомянутыя частости въ *предѣлѣ* сливаются съ вѣроятностями соотвѣтственныхъ явленій.

Слѣдовательно

$$Lim \frac{\Sigma x}{s} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n ,$$

т. е. *математическое ожиданіе перемѣнно x есть предѣлъ средняго ариѳметическаго изъ частныхъ значеній этого перемѣннаго, соотвѣтствующихъ s независимымъ повтореніямъ даннаго опыта, при возрастаніи s до ∞.*

Понятно, что на практикѣ число s наблюденій, получаемое «индуктивнымъ собираніемъ фактовъ», можетъ быть весьма большимъ, но не безконечнымъ. При этомъ условіи найденныя частости и ариѳметическія середины перемѣнныхъ лишь *приблизительно* представятъ вѣроятности и математическія ожиданія, являющіяся, независимо отъ фактовъ математическими конценціями родовыхъ понятій и общихъ именъ.

Приблизительныя уравненія

$$p_k = \frac{m_k}{s} \quad \text{и} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \frac{\Sigma x}{s} \ldots \quad (A)$$

назовемъ *индуктивными*.

Лѣвыя части этихъ уравненій получаются *дедуктивнымъ* апріорнымъ разсужденіемъ, исходя изъ данныхъ *несовмѣстимыхъ* видовъ или формъ дѣятельности E въ операціи O; правыя части уравненій исчисляются индуктивно послѣ s-кратнаго повторенія операціи O. Если при этомъ фактическую частость $\frac{m_k}{s}$ событія E_k для краткости обозначимъ чрезъ Δv_{x_k}, то будемъ имѣть слѣдующую сличительную таблицу, замѣщающую вышеуказанную индуктивную систему (A) уравненій.

Сличительная таблица.

№ строкн.	Несовм. виды дѣйствія E.	Плодъ x.	Теорет.	Опытн.
			p.	$\frac{m}{s} = \Delta v_x$.
1	E_1	x_1	p_1	Δv_{x_1}
2	E_2	x_2	p_2	Δv_{x_2}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	E_n	x_n	p_n	Δv_{x_n}

Индуктивная система уравненій (A) связываетъ прошедшее съ будущимъ, ибо лѣвыя части ихъ, т. е. вѣроятности и ожиданіе, *смотрятъ въ будущее*, а правыя части выведены изъ учета состоявшихся фактовъ E_k, т. е. *смотрятъ въ прошедшее*. Въ уравненіяхъ (A) содержится элементъ философіи исторіи.

Частости и, съ другой стороны, вѣроятности въ ихъ сближеніи съ помощію теоремы Я. Бернулли сличаютъ теорію съ опытною дѣйствительностію и *образуютъ ассоціацію двухъ міровъ*: міра фактовъ и міра мысли съ ея отвлеченными идеями, повторными вопросами и вѣчными проблемами возрождающейся жизни. Собиранію же фактовъ соотвѣтствуетъ міръ ощущеній факта (третій міръ, эмпирическій), образующій отчетливыя непосредственныя представленія о фактахъ, регистрируемыя въ памяти и въ журналѣ.

Математическое ожиданіе какой либо возможной *реальности* есть *концепція* или *умозрительное значеніе* реальности. Реализмъ утилитарный есть матеріализмъ; реализмъ творческій во имя идеи есть спиритуализмъ, насыщающій умъ и сердце (органъ вѣры), ибо «не однимъ только хлѣбомъ живъ человѣкъ».

Помянутый реализмъ, слѣдовательно, бываетъ въ однихъ случаяхъ матеріалистическимъ, въ другихъ спиритуалистическимъ.

§ 19. Таксологическая проблема статистики и политической экономіи. О цѣнѣ суммъ и выгодъ, подверженныхъ случайностямъ. Аксіома.

I. Куча разнородныхъ предметовъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ можетъ быть приведена въ извѣстность описательнымъ методомъ. Она есть своего рода итогъ $x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$, но не количественный, а описательный или символическій.

Если же элементы разнородной кучи по ихъ смыслу являются цѣлесообразными разнородными цѣнностями, на кои имѣются потребители,

то эту кучу можно разсматривать какъ количественный экономическій итогъ, но не простой, а составной (комплексный), разнородныя слагаемыя котораго имѣютъ общее *символическое* мѣрило, сообразующееся съ вкусомъ потребителей-цѣнителей.

Символическое мѣрило (цѣнные мѣновые знаки) является вспомогательнымъ средствомъ для выкупа благъ; смыслъ этого мѣрила лежитъ не только въ немъ самомъ, но и *внѣ* его, въ той *цѣли*, для которой пригодно это вспомогательное средство. Оно помогаетъ размѣну благами по формулѣ: «избытки охотно вымѣниваются на то, въ чемъ ощущается недостатокъ».

Усложненный способъ обмѣна—посредственный обмѣнъ—необходимъ при слѣдующихъ обстоятельствахъ. Если A желаетъ обмѣнять свое благо на благо B, а послѣдній, не нуждаясь въ благѣ A, отказывается его принять въ обмѣнъ за свое, то A можетъ отдать свое благо третьему лицу C, нуждающемуся въ немъ и желающему обмѣнять его на свое (третье) благо, которое нужно лицу B и которое A возьметъ не для собственнаго потребленія, но въ виду того, что B согласится принять его въ обмѣнъ за то, которое A желаетъ пріобрѣсти отъ B. При такомъ обмѣнѣ цѣнностей, блага A и B *измѣряются* цѣнностью блага C.

Если благо C служитъ общепринятымъ посредствующимъ мѣриломъ цѣнности или средствомъ обмѣна, то его называютъ *деньгами въ широкомъ смыслѣ*. Оно (мѣрило) является *деньгами въ узкомъ смыслѣ*, если признается государствомъ какъ платежное средство при взиманіи односторонникъ платежей (налоговъ, пошлинъ, штрафовъ) и средствомъ сбереженія цѣнностей въ государственныхъ кредитныхъ учрежденіяхъ. Мѣновая цѣнность всѣхъ прочихъ благъ количественно можетъ выражаться въ этомъ благѣ въ зависимости отъ цѣны ω единицы блага на деньги, каковая цѣна или стоимость покрываетъ издержки производства блага и даетъ производству *устойчивость*, а потребителю *дешевизну* (пока не вмѣшалась спекуляція).

Итогъ $x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$, составленный изъ элементовъ вышеуказанной кучи, можетъ представлять либо простое (однородное) вещественное количество, либо составное (разнородное) вещественное количество, полученное въ результатѣ измѣренія всеобщимъ мѣриломъ экономической цѣнности.

Въ послѣднемъ случаѣ слагаемыя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ будутъ представлять финансовыя стоимости разнородныхъ предметовъ, напримѣръ, стоимость сырыхъ продуктовъ земли, стоимость машинъ, обработанныхъ предметовъ потребленія и пр. Пусть эти разнородные предметы, соотвѣтствующіе анализируемымъ слагаемымъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, измѣряются еще каждая *собственною* единицею и, по измѣреніи, представляются соотвѣтственно числами

$y_1, y_2, \ldots, y_m$; финансовыя стоимости соотвѣтственныхъ единицъ пусть будутъ: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$; тогда будемъ имѣть экономическое составное количество:

$$x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 + \ldots + y_m\omega_m. \quad . \quad . \quad (1)$$

Итоги этого рода, опредѣляемые въ зависимости отъ спроса, предложенія, субъективнаго вкуса, нужды и пр., подвержены колебаніямъ по причинѣ неустойчивости цѣнъ ω, обусловленной не только торговыми спекуляціями, а также то частостью, то, наоборотъ, рѣдкостью и недоступностью искомаго блага.

Задача политической экономіи и статистики—по возможности установить объективныя значенія цѣнъ $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ и цѣны $i\,^0/_0$ денежнаго капитала (см. § 16), въ согласіи съ истинными требованіями природы земли, труда, капитала, продовольствія и здоровой жизнеспособности.

Ученіе о составныхъ количествахъ, излагаемое въ математикѣ *), формулой (1) раздвигается въ сторону таксологической проблемы политической экономіи, приводя исчисленіе движимыхъ капиталовъ и продовольственныхъ рентъ къ общему многомѣрному перемѣнному количеству x и къ многомѣрному графическому пространству.

Въ таксологической проблемѣ легко дѣлается ошибка подъ названіемъ circulus vitiosus (ложный кругъ). Такъ, въ «изолированномъ государствѣ» фонъ-Тюнена поднятіе цѣнъ въ интересахъ производителей благъ, повидимому, улучшаетъ ихъ положеніе; но оно на дѣлѣ поднимаетъ потребительскія цѣны, и кажущаяся выгода производителей теряется ими при потребленіи. Выгоду отъ ложныхъ цѣнъ получаетъ лишь лукавая спекуляція всемірнаго капитализма.

Понятіе денегъ въ широкомъ смыслѣ ограничиваетъ власть золота въ «республикѣ» экономическихъ цѣнностей. Хлѣбъ, трудъ и орудія нужнѣе золота. Важна потребительская цѣна денегъ въ хлѣбныхъ единицахъ; ее нужно держать въ устойчивомъ положеніи (Курно).

Ученіе о градаціяхъ устойчивости цѣнныхъ альтернативныхъ явленій, ниже предлагаемое, играетъ важную роль въ опредѣленіи нормальныхъ цѣнъ, со включеніемъ въ нихъ умѣреннаго резерва, какъ необходимой и достаточной гарантіи устойчивости. Понятія стоимости и правдивой цѣны надлежитъ связывать съ понятіемъ и мѣрами всеобщей и частной устойчивости производства благъ, удовлетворяющихъ нуждамъ жизни, начиная съ самыхъ неотложныхъ, какъ хлѣбъ насущный.

Математическое ожиданіе блага, производимаго операціей O, называютъ *выгодой*; эта выгода, согласованная съ удостовѣреніемъ всеобщей устойчивости, является мѣриломъ стоимости при оборотѣ средствъ.

*) *А. В. Васильевъ.* Введеніе въ анализъ. Часть II.

II. Проблема стоимости производной цѣнности есть одна изъ центральныхъ задачъ политической экономіи *). Проблема стоимости предполагаетъ возвратъ издержекъ производства и сверхъ того налогъ или резервъ для выключенія неустойчивости выходовъ цѣннаго плода, получаемаго какъ итогъ массовыхъ явленій, производимыхъ дѣятельностію множества завнсимыхъ и независимыхъ причинъ. Мѣрила устойчивости и неустойчивости ниже получаются съ помощію теоремы Чебышева.

Если въ процессѣ хозяйственной жизни данной страны относительная устойчивость ежегоднаго выхода цѣнныхъ плодовъ обезпечена, то таксологическая проблема рѣшается уже съ помощію легкихъ резервовъ и простѣйшихъ формъ закона большихъ чиселъ.

Теорема Я. Бернулли съ ея дедукціей и индуктивными уравненіями бросаетъ свѣтъ не только въ задачу о резервахъ прочности массива независимыхъ предпріятій, но и въ эту таксологическую проблему, которая сводится къ слѣдующимъ элементарнымъ задачамъ, предполагающимъ приблизительно равныя риски покупающихъ и продающихъ и конкуренцію спроса, какъ и предложенія.

Задача 1. *Нѣкто обладаетъ слѣдующими правами на сумму въ a рублей: если произойдетъ свойственное данному опыту событіе E, то онъ получитъ сполна указанную сумму; въ противномъ случаѣ, т. е. если произойдетъ событіе не—E, онъ ничего не получаетъ изъ этой суммы. Пусть владѣлецъ этихъ правъ хочетъ продать ихъ другому лицу. Спрашивается, какова будетъ безобидная для обѣихъ сторонъ цѣна за передачу этихъ правъ.*

Указанную въ задачѣ сумму въ a рублей, будемъ иначе называть *гадательною суммою*. Оцѣнка этого рода суммъ можетъ быть произведена на основаніи закона большихъ чиселъ. Опираясь на этотъ законъ докажемъ, что искомая въ предложенной задачѣ цѣна продаваемыхъ правъ, т. е. цѣна гадательной суммы a, есть pa, гдѣ p есть вѣроятность событія E.

Необходимо напередъ предположить, что въ продажѣ имѣется большое число s такихъ гадательныхъ суммъ, какова сумма a, указанная въ задачѣ. Лишь при подобныхъ условіяхъ, т. е. при существованіи указаннаго рынка цѣнностей этого рода, можетъ быть правильно опредѣлена цѣна гадательной суммы a.

Положимъ, что стоимость каждой такой суммы есть $pa + \delta$, и докажемъ, что такая оцѣнка не будетъ безобидна либо для класса продавцовъ, либо для класса покупателей, если только величина δ не есть нуль.

*) *H. Laurent:* Statistique Mathématique, *nn°* 55—87, — *А. Мануиловъ*: «Понятіе цѣнностей». Москва. 1901.—Этотъ трудъ принадлежитъ представителю литературной школы, бѣдной точными номографическими конценціями и формулами. — *П. А. Некрасовъ*: «Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты», гл. V и VI.

Покупатели при указанной оцѣнкѣ уплачиваютъ $(pa + \delta) \cdot s$ рублей. Этимъ s суммамъ соотвѣтствуютъ s опытовъ, изъ которыхъ каждому свойственно событіе E, причемъ осуществленіе или неосуществленіе этого событія ведетъ къ полученію или неполученію покупателемъ соотвѣтственной суммы a. Пусть m есть число осуществленій событія E при указанныхъ s опытахъ, такъ что покупатели, затратившіе сумму $s\,(pa + \delta)$, сами пріобрѣтутъ сумму ma. Слѣдовательно потеря покупателей будетъ $\Delta = (pa + \delta)\ s - ma$. Но по теоремѣ Бернулли

$$m = ps + s\omega = s\,(p + \omega),$$

гдѣ ω есть величина, стремящаяся къ нулю при возрастаніи s до ∞. Слѣдовательно вышеуказанная потеря покупателей будетъ:

$$\Delta = (pa + \delta)\ s - (p + \omega)\ sa = s\,(\delta - \omega a).$$

Если величина δ отлична отъ нуля, то вышеуказанная величина Δ при достаточно большомъ s будетъ отлична отъ нуля и будетъ имѣть знакъ величины δ (ибо ωa стремится къ нулю). Если $\delta > 0$, то покупатели понесутъ положительную потерю, близкую къ $s\delta$, и это для нихъ не будетъ безобиднымъ; если же $\delta < 0$, то покупатели понесутъ отрицательную потерю, близкую къ $s\delta$, и будутъ имѣть выгоду на счетъ торговцевъ, что̀ не безобидно для этихъ послѣднихъ. Такимъ образомъ при безобидной для обѣихъ сторонъ цѣнѣ случайной суммы a величина δ не можетъ быть отличною отъ нуля и слѣдовательно $\delta = 0$, причемъ искомая цѣна будетъ pa.

На дѣлѣ обычная нехватка теоретическихъ данныхъ, опредѣляющихъ значенія вѣроятностей p въ разныхъ коллизіяхъ жизни, заставляетъ прибѣгать къ статистикѣ, къ индуктивному собиранію фактовъ и къ замѣнѣ вѣроятности въ таксологической проблемѣ частостью.

Теорія спроса и предложенія выдвигаетъ свой самостоятельный таксологическій методъ: ярморочный и базарный торгъ. Онъ не противорѣчитъ вышеуказанному таксологическому принципу, пока на базарѣ существуетъ множество независимыхъ другъ отъ друга конкуррентовъ какъ спроса, такъ и предложенія. Но торгъ на аукціонѣ или тѣсномъ рынкѣ, гдѣ всѣ перешептались и лишь для проформы возглашаютъ свои цѣны отъ имени будто бы независимыхъ отдѣльныхъ конкуррентовъ, искажаетъ результатъ измѣренія цѣны спросомъ и предложеніемъ. Тутъ умѣстна другая регламентація цѣнъ.

Требуемая независимость чаще осуществляется внѣ тѣсныхъ (по пространству и времени) торговъ, внѣ слишкомъ замкнутыхъ рынковъ и биржъ, гдѣ профессіоналы перешептались полюбовно.

Поэтому независимо отъ полюбовныхъ и покровительственныхъ системъ тѣснаго рынка купли-продажи, гражданское правомѣріе должно,

разрѣшая классовые споры объ оцѣнкѣ массовыхъ независимыхъ правъ въ публичномъ размѣнѣ и сравнивая мысленное владѣніе съ наличнымъ матеріальнымъ обладаніемъ, принимать таксологическую аксіому:

Аксіома. *Мысленное владѣніе, по праву, приходо-расходною вещью A, имѣющею поступить въ распоряженіе субъекта съ вѣроятностью p, обмѣнивается на наличность въ размѣрѣ $B = A.\ p$.*

Нужно помнить, что аксіома эта относится не къ жертвамъ покровительственной или иной системы, а наоборотъ къ безсистемнымъ *независимымъ* вѣроятнымъ явленіямъ и притомъ къ такому ихъ соединенію, когда въ большихъ итогахъ ихъ гарантирована относительная устойчивость, т. е. относительная (приблизительная) достовѣрность, что итогъ этотъ можетъ колебаться лишь *въ тѣсныхъ предѣлахъ*, какъ учатъ теоремы Я. Бернулли и Пуассона.

Къ основамъ таксологической проблемы мы еще вернемся ниже (въ § 28) при обсужденіи *покровительственной* формулы въ случаѣ гнетущихъ кризисовъ, соотвѣтствующихъ парадоксальнымъ положеніямъ.

Задача 2. *Вообразимъ предпріятіе, которому свойственны несовмѣстимыя и всевозможныя событія $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Пусть лицо A получаетъ отъ этого предпріятія одну изъ суммъ: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, смотря по тому, какое изъ событій $E_1, E_2, \ldots, E_n$ состоится (т. е. получаетъ сумму a_k, если состоится событіе E_k). Требуется опредѣлить стоимость правъ на это предпріятіе для лица A, т. е. безобидную для сторонъ сумму, за которую лицо класса A можетъ продавать подобныя свои права на выгоды отъ предпріятія лицу класса B.*

Пусть вѣроятности событій $E_1, E_2, \ldots, E_n$ будутъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Вообразимъ, что права лица A на каждую изъ случайныхъ суммъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ продаются отдѣльно. На основаніи результата, полученнаго при рѣшеніи предшествующей задачи, стоимости этихъ случайныхъ суммъ соотвѣтственно будутъ: $p_1a_1, p_2a_2, p_3a_3, \ldots, p_na_n$. Слѣдовательно, полная искомая стоимость предпріятія будетъ:

$$p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n.$$

Это есть ни что иное, такъ математическое ожиданіе приносимой предпріятіемъ вѣроятной перемѣнной величины $x = a, \ldots, a_n$, на полученіе которой можетъ разсчитывать лицо A.

§ 20. Объ оборотахъ выгоды въ равныхъ или безобидныхъ играхъ.

Игра есть своего рода оборотъ, въ которомъ тотъ или другой игрокъ, смотря по условіямъ и дѣйствіямъ игры, пускаетъ въ ходъ свой капиталъ того или другого рода и либо выигрываетъ, либо проигрываетъ, т. е. получаетъ положительныя или отрицательныя выгоды.

Въ процессѣ, гдѣ дѣйствуетъ множественность причинъ и происходитъ смѣшеніе дѣйствій, интересовъ и правъ, равная игра бываетъ необходимою мѣрою для ликвидацій или развязокъ нѣкоторыхъ гордіевыхъ жизненыхъ узловъ, неразвязываемыхъ съ помощію другихъ безспорныхъ основаній. Въ обычномъ правѣ этому способу рѣшенія соотвѣтствуетъ жребій.

Иногда изъ ставокъ игры образуютъ преміи, поощряющія побѣдителей состязанія въ общеполезномъ спортѣ.

Очевидно, равная или безобидная игра есть такой оборотъ интересовъ между игроками, выгода котораго для каждаго игрока должна быть равною нулю. Слѣдовательно, *безобидная игра должна обладать слѣдующимъ свойствомъ: для каждаго игрока математическое ожиданіе всевозможныхъ (какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ) несовмѣстимыхъ прибылей отъ игры должно равняться нулю.*

Разсмотримъ здѣсь нѣсколько задачъ объ играхъ.

Задача 1. *Предъ началомъ партіи игроки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вносятъ свои частныя ставки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, изъ которыхъ составляется общая ставка $M = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Затѣмъ производится опытъ, которому свойственны несовмѣстимыя всевозможныя событія $E_1, E_2, \ldots, E_n$, E_{n+1}. Если при этомъ опытѣ произойдетъ событіе E_k, гдѣ $k \leqq n$, то всю общую ставку M получаетъ игрокъ A_k; если же при опытѣ произойдетъ событіе E_{n+1}, то происходитъ розыгрышъ, т. е. каждый игрокъ получаетъ обратно свою ставку. Найти условія, при которыхъ эта игра безобидная или равная.*

Обозначивъ черезъ $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ вѣроятности событій $E_1, E_2, \ldots, E_n, E_{n+1}$, разсмотримъ всевозможныя (положительныя, нулевыя и отрицательныя) несовмѣстимыя выгоды игрока A_1. Если произойдетъ событіе E_1, то игрокъ A_1 получитъ прибыль $M - a_1$; если произойдетъ одно изъ событій $E_2, E_3, \ldots, E_n$, то игрокъ A получитъ отрицательную выгоду $-a_1$; наконецъ, если произойдетъ событіе E_{n+1}, то прибыль игрока A_1 будетъ равна нулю. Математическое ожиданіе всѣхъ этихъ выгодъ будетъ:

$$(M - a_1)\ p_1 - a_1\ (p_2 + p_3 + \ldots + p_n).$$

При соблюденіи начала безобидности будемъ имѣть:

$$(M - a_1)\ p_1 - a_1\ (p_2 + p_3 + \ldots + p_n) = 0,$$

откуда

$$a_1 = \frac{Mp_1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{Mp_1}{1 - p_{n+1}}.$$

Примѣняя изложенныя разсужденія къ выгодамъ игрока A_k, найдемъ вообще:

$$a_k = \frac{Mp_k}{1 - p_{n+1}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n = p_1 : p_2 : \ldots : p_n,$$

т. е. разсматриваемая игра безобидна, если частныя ставки игроковъ пропорціональны вѣроятностямъ для этихъ игроковъ выиграть общую ставку.

Задача 2. *Предъ началомъ игры игрокъ A платитъ игроку B ставку a, затѣмъ игрокъ B производитъ опытъ, которому свойственны несовмѣстимыя и всевозможныя событія $E_1, E_2, \ldots, E_n$, причемъ по окончаніи опыта игрокъ B платитъ игроку A одну изъ суммъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, смотря по тому, какое изъ событій $E_1, E_2, \ldots, E_n$ при опытѣ осуществится. При какихъ условіяхъ игра эта безобидная или равная?*

Математическое ожиданіе всевозможныхъ (положительныхъ и отрицательныхъ) прибылей для игрока B будетъ:

$$(a - a_1)\, p_1 + (a - a_2)\, p_2 + \ldots + (a - a_n)\, p_n,$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть вѣроятности событій $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Это математическое ожиданіе для безобидности игры должно равняться нулю, т. е. должно имѣть силу условіе:

$$(a - a_1)\, p_1 + (a - a_2)\, p_2 + \ldots (a - a_n)\, p_n = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$a = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n.$$

Къ роду игръ, разсмотрѣнныхъ въ задачѣ 2, принадлежатъ лотерейныя игры и игры въ штоссъ.

Кромѣ игръ, необходимыхъ какъ уравнительная мѣра для ликвидаціи, и игръ спортивно полезныхъ, бываютъ игры азартныя, тлетворныя. Возьмемъ слѣдующій примѣръ азарта.

Задача 3. *Два игрока A и B, имѣя соотвѣтственно состоянія, цѣнимыя въ M и m рублей, условились играть въ равныя игры до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не выиграетъ состоянія другого. Опредѣлить вѣроятность p того, что игрокъ A выиграетъ состояніе игрока B.*

Указанныя въ задачѣ игры можно разсматривать какъ одну сложную игру, въ результатѣ которой игрокъ A получаетъ либо положительную прибыль m (если выиграетъ все состояніе игрока B), либо отрицательную прибыль $-M$ (если проиграетъ все свое состояніе игроку B). Математическое ожиданіе всѣхъ этихъ прибылей игрока A представится такъ:

$$mp - M\,(1 - p),$$

причемъ на основаніи начала равенства игры будемъ имѣть:

$$mp - M\,(1 - p) = 0.$$

Отсюда искомая вѣроятность того, что игрокъ A побѣдитъ игрока B, представится такъ:

$$p = \frac{M}{M + m}.$$

Подобнымъ образомъ вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что игрокъ B побѣдитъ игрока A, представится такъ:

$$q = \frac{m}{M + m}.$$

Если сумма M велика сравнительно съ m, то вѣроятность p близка къ единицѣ, т. е почти достовѣрно, что богатый игрокъ обыграетъ въ указанной игрѣ бѣднаго.

Очевидно, азартный игрокъ, т. е. алчно и при всякомъ удобномъ случаѣ играющій на большія для его состоянія суммы, подобенъ вышеуказанному бѣдному игроку, такъ какъ онъ имѣетъ своимъ противникомъ въ игрѣ несравненно болѣе богатое коллективное лицо (всѣхъ остальныхъ игроковъ, съ которыми онъ вступаетъ въ борьбу). Поэтому азартному игроку почти съ достовѣрностью можно предсказать гибель. Результатъ этотъ, указывающій на неблагоразуміе азартныхъ игръ, совпадаетъ и съ тѣми правилами морали, которыя осуждаютъ страсть игры, какъ разжигающую алчность и другія низкія страсти.

§ 21. Теорема Чебышева о среднихъ величинахъ.

Основной методъ производящихъ функцій Лапласа и Коши сдѣлалъ исчисленіе вѣроятностей точною наукой, правильно подходящей къ вопросу объ условіяхъ устойчивости такого міропорядка, гдѣ дѣйствуетъ множество бытовыхъ независимыхъ причинныхъ факторовъ, производящихъ плоды и ихъ издерживающихъ. Но приступиться къ этой наукѣ для непосвященныхъ было совершенно невозможно; даже и посвященные затруднялись градуировать *скалу относительной устойчивости* альтернативныхъ итоговъ перемѣнныхъ величинъ и отмѣчать на ней надежныя куски и, наоборотъ, пункты ненадежности и обрыва устойчивости.

Изслѣдованія Чебышева упростили дѣло по главному вопросу, а именно по вопросу о скалѣ устойчивости и объ обрывѣ устойчивости; они дали возможность отдѣлить случай обрыва устойчивости отъ случаевъ когда относительная устойчивость и регулярность (закономѣрность) берутъ силу, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто для альтернативныхъ итоговъ явленій, разсматриваемыхъ закономъ большихъ чиселъ Пуассона. Основное элементарное ученіе предложено въ геніальномъ мемуарѣ Чебышева: «О среднихъ величинахъ».

Чебышевъ основалъ выводъ своей теоремы на нѣкоторыхъ элементарныхъ формулахъ, находящихся въ связи съ понятіемъ о математическихъ ожиданіяхъ, съ индуктивными уравненіями § 18 и съ слѣдующими каноническими обозначеніями. Пусть предполагается произвести m опытовъ $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_m$, которые въ результатахъ даютъ соотвѣтственно m независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, u$. Пусть будутъ

$$x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_\beta$$
$$z_1, z_2, \ldots, z_\gamma$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_1, u_2, \ldots, u_\varepsilon$$

частныя значенія указанныхъ перемѣнныхъ. Обозначимъ соотвѣтственно чрезъ

$$p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$$
$$q_1, q_2, \ldots, q_\beta$$
$$r_1, r_2, \ldots, r_\gamma$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_1, t_2, \ldots, t_\varepsilon$$

вѣроятности этихъ значеній.

Вышеупомянутые m опытовъ назовемъ Чебышевскими операціями $O_1, O_2, \ldots, O_m$, предполагая, что эти операціи составляютъ часть неограниченнаго ряда операцій:

$$O_1, O_2, \ldots, O_k, \ldots.$$

Тогда число m можетъ по велѣнію какихъ либо судебъ измѣняться и неограниченно возрастать. Иначе говоря, можетъ разсматриваться такъ называемый *устанавливающійся* процессъ (феноменъ), которому въ предѣлѣ при $m = \infty$ будетъ соотвѣтствовать *установившійся* процессъ (ноуменъ).

Совокупность простыхъ Чебышевскихъ операцій $O_1, O_2, \ldots, O_m$ на-

зовемъ *очагомъ*, или *кооперацією* Ω, или *фермой* этихъ операцій. Очагъ Ω можетъ въ пространствѣ данной территоріи опять повторяться, размножаться, образуя рядъ $\Omega', \Omega'', \ldots, \Omega^{(s)}, \ldots$ Если явленія большого числа s этихъ очаговъ подвергаются статистическому наблюденію, то вышеуказанныя вѣроятности независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$ могутъ опредѣляться эмпирически, какъ оправдываемыя à priori теоремами Я. Бернулли и Пуассона статистическія *частости* явленій ихъ различныхъ значеній. Замѣтивъ эту *великую* (по количеству наблюденій) индуктивную связь частостей и вѣроятностей явленія значеній перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$, продолжимъ обозначенія, необходимыя для формулированія теоремы Чебышева.

Будемъ предполагать, что частныя значенія каждаго изъ указанныхъ перемѣнныхъ, свойственнаго данному опыту, суть несовмѣстимыя и всевозможныя, такъ что

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} p_\lambda = 1, \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} q_\mu = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} r_\nu = 1, \ \ldots, \quad \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} t_\omega = 1 \quad \ldots \quad (1)$$

Кромѣ того будемъ предполагать, что событія, которыми обусловливаются частныя значенія одного перемѣннаго, не зависятъ отъ событій, обусловливающихъ частныя значенія всѣхъ остальныхъ перемѣнныхъ. При такихъ условіяхъ перемѣнныя $x, y, z, \ldots$ называются *независимыми*; операціи или испытанія $O_1, O_2, O_3, \ldots$ также называются независимыми.

Математическія ожиданія каждой изъ перемѣнныхъ величинъ

$$x, y, z, \ldots, u$$

и математическія ожиданія квадратовъ этихъ перемѣнныхъ представятся соотвѣтственно такъ:

$$a_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} p_\lambda x_\lambda, \ a_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} q_\mu y_\mu, \ a_3 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} r_\nu z_\nu, \ \ldots, \ a_m = \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} t_\omega u_\omega, \quad (2)$$

$$b_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} p_\lambda x^2{}_\lambda, \ b_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} q_\mu y^2{}_\mu, \ b_3 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} r_\nu z^2{}_\nu, \ \ldots, \ b_m = \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} t_\omega u^2{}_\omega. \quad (3)$$

Пусть $F(\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega)$ обозначаетъ функцію величинъ

$$x_\lambda, y_\mu, z_\nu, \ldots, u_\omega, p_\lambda, q_\mu, r_\nu, \ldots, t_\omega.$$

Условимся разумѣть подъ символомъ

$$\mathrm{S}F(\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega)$$

многократную сумму, распространенную на всѣ цѣлыя значенія λ отъ 1 до α, на всѣ цѣлыя значенія μ отъ 1 до β, на всѣ цѣлыя значенія ν

отъ 1 до γ, и т. д. и наконецъ на всѣ цѣлыя значенія ω отъ 1 до ε. Слѣдовательно

$$\mathbf{S}F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega) = \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} \ldots \sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega),$$

причемъ порядокъ суммированія здѣсь можно измѣнять по желанію, ибо предѣлы суммъ постоянны.

Лемма. Если функція $F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega)$ имѣетъ видъ:

$$F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega) = \varphi\ (\lambda)\ \psi\ (\mu)\ \theta\ (\nu) \ldots \chi\ (\omega),$$

то вышеуказанная многократная сумма можетъ быть представлена какъ произведеніе простыхъ суммъ:

$$\mathbf{S}\varphi\ (\lambda)\ \psi\ (\mu)\ \theta\ (\nu) \ldots \chi\ (\omega) =$$

$$= \Big[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} \varphi\ (\lambda)\Big] \cdot \Big[\sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} \varphi\ (\mu)\Big] \cdot \Big[\sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} \theta\ (\nu)\Big] \cdot \ldots \cdot \Big[\sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} \chi\ (\omega)\Big]. \quad (4)$$

Справедливость этой леммы легко обнаружить при помощи правила умноженія многочленовъ, представляемыхъ суммами, стоящими во второй части этого равенства. Въ самомъ дѣлѣ, перемноживъ по извѣстному правилу эти многочлены, получимъ сумму, общій членъ которой будетъ:

$$\varphi\ (\lambda)\ \psi\ (\mu)\ \theta\ (\nu) \ldots \chi\ (\omega)$$

и въ которой суммованія по перемѣннымъ $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega$ распространяются въ предѣлахъ 1 и α, 1 и β, 1 и $\gamma, \ldots,$ 1 и ε, т. е. получимъ сумму, стоящую въ первой части равенства (4). Лемма доказана.

Исходя изъ общей формулы (4) и прибѣгая къ равенствамъ (1), (2) и (3), убѣждаемся въ вѣрности слѣдующихъ тождествъ:

$$\mathbf{S}p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots t_\omega = 1, \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{S}x_\lambda p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega = a_1, \\ &\mathbf{S}y_\mu p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega = a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\mathbf{S}u_\omega p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega = a_m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{S}x_\lambda^{\,2} p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega = b_1, \\ &\mathbf{S}y_\mu^{\,2} p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\mathbf{S}u^2_{\,\omega} p_\lambda p_\mu \ldots t_\omega = b_m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{S}x_\lambda y_\mu p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots t_\omega = a_1 a_2, \\ &\mathbf{S}x_\lambda z_\nu p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots l_\omega = a_1 a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathbf{S}y_\mu z_\lambda p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots t_\omega = a_2 a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

Число равенствъ (8), очевидно, равно числу сочетаній изъ m элементовъ по два.

Разсмотримъ затѣмъ сумму:

$$\mathbf{S}\ (x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - a_1 - a_2 - \ldots - a_m)^2\ p_\lambda\ q_\mu\ r_\nu \ldots t_\omega.$$

Обозначивъ сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ черезъ Σa, найдемъ:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\ &(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2\ p_\lambda\ q_\mu \ldots t_\omega = \\ \mathbf{S}\ &[x^2_\lambda + y^2_\mu + z^2_\nu + \ldots + u^2_\omega + (\Sigma a)^2 \\ &+ 2x_\lambda y_\mu + 2x_\lambda z_\nu + \ldots + 2x_\lambda u_\omega - 2x_\lambda \Sigma a \\ &+ 2y_\mu z_\nu + \ldots + 2y_\mu u_\omega - 2y_\mu \Sigma a \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &- 2u_\omega \Sigma a]\ p_\lambda\ q_\mu \ldots t_\omega. \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами (5), (6), (7) и (8), мы найдемъ:

$$\mathbf{S}\ (x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2\ p_\lambda\ q_\mu \ldots t_\omega = b_1 + b_2 + \ldots + b_m +$$
$$+ (\Sigma a)^2 - 2a_1\ \Sigma a - 2a_2\ \Sigma a - \ldots - 2a_m\ \Sigma a + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + \ldots =$$
$$= \Sigma b - (\Sigma a)^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + \ldots,$$

гдѣ Σb означаетъ сумму $b_1 + b_2 + \ldots b_m$.

Замѣтивъ, что

$$(\Sigma a)^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \ldots + a^2_{\,m} + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + \ldots,$$

будемъ имѣть тождество:

$$\mathbf{S}\ (x_2 + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2\ p_\lambda\ q_\mu \ldots t_\omega = \Sigma b - \Sigma a^2, \quad (9)$$

гдѣ $\Sigma a^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a^2_{\,m}$.

Очевидно, лѣвая часть тождества (9) положительна; слѣдовательно

$$\Sigma b - \Sigma a^2 > 0.$$

Перейдемъ теперь къ выводу *теоремы Чебышева.*
Раздѣливъ обѣ части тождества (9) на $B^2(\Sigma b - \Sigma a^2)$, получимъ:

$$\mathrm{S}\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2(\Sigma b - \Sigma a^2)} p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega = \frac{1}{B^2}. \quad . \quad (10)$$

Члены первой части этого равенства раздѣлимъ на двѣ группы: къ первой отнесемъ члены, для которыхъ удовлетворяется неравенство:

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2(\Sigma b - \Sigma a^2)} \leqq 1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ко второй отнесемъ члены, удовлетворяющіе неравенству:

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2(\Sigma b - \Sigma a^2)} > 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Отбросивъ въ первой части тождества (10) всѣ члены 1-й группы, мы получимъ слѣдующее неравенство:

$$\overline{\mathrm{S}}\frac{(x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2(\Sigma b - \Sigma a^2)} p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega < \frac{1}{B^2},$$

гдѣ подъ $\overline{\mathrm{S}}$ разумѣется сумма, распространенная, только на члены второй группы. Замѣнивъ въ каждомъ изъ членовъ этой суммы единицей величину

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2(\Sigma b - \Sigma a^2)},$$

удовлетворяющую неравенству (12), найдемъ:

$$\overline{\mathrm{S}}\, p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega < \frac{1}{B^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Произведеніе $p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega$ есть вѣроятность сложнаго событія, состоящаго изъ совпаденія слѣдующихъ простыхъ событій: перемѣнныя $x, y, \ldots, t$ при m предполагаемыхъ испытаніяхъ получатъ соотвѣтственныя значенія $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$. Короче, произведеніе $p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega$ можно назвать вѣроятностью системы значеній $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$ разсматриваемыхъ перемѣнныхъ. Сумма же $\overline{\mathrm{S}}\, p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega$ есть вѣроятность того, что осуществится такая система значеній $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$, которая удовлетворитъ неравенству (12). Обозначивъ эту вѣроятность черезъ Q, будемъ имѣть:

$$Q = \overline{\mathrm{S}}\, p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega.$$

Если P выражаетъ вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того,

что будетъ имѣть мѣсто система величинъ $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$, удовлетворяющихъ неравенству (11), то предыдущее равенство получитъ видъ:

$$1 - P = \overline{\mathrm{S}}\, p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega,$$

пречемъ неравенство (13) представится такъ:

$$1 - P < \frac{1}{B^2}.$$

Слѣдовательно, вѣроятность P осуществленія неравенства (11) заключается въ предѣлахъ:

$$1 > P > 1 - \frac{1}{B^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Обратимся къ неравенству (11). Замѣчая, что корень квадратный изъ первой части этого неравенства по абсолютной величинѣ не превосходитъ единицы, можемъ замѣнить это неравенство слѣдующими неравенствами: $B > 0$ и

$$-1 \leqq \frac{x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega - \Sigma a}{B\sqrt{\Sigma b - \Sigma a^2}} \leqq +1,$$

или

$$-\frac{B}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{\Sigma b - \Sigma a^2}{m}} \leqq \frac{x_\lambda + x_\mu + \ldots + u_\omega}{m} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \leqq$$

$$+\frac{B}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{\Sigma b - \Sigma a^2}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Повторимъ, что P есть вѣроятность того, что система величинъ $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$ удовлетворитъ этимъ неравенствамъ, равносильнымъ неравенству (11).

Положивъ $\tau > 0$ и $B = \tau\sqrt{m}$, неравенства (15) и (14) можетъ представить въ такой формѣ:

$$-\tau\sqrt{\frac{\Sigma b - \Sigma a^2}{m}} \leqq \frac{x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega}{m} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \leqq$$

$$+\tau\sqrt{\frac{\Sigma b - \Sigma a^2}{m}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$1 > P > 1 - \frac{1}{m\tau^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16')$$

Неравенствами (16) и (16′), данными въ мемуарѣ Чебышева «О среднихъ величинахъ», обосновывается теорема Чебышева, въ которой фигурируютъ среднія величины.

Теорема I (Чебышева). *Пусть операціи* O_1, $O_2, \ldots,$ O_m *соотвѣтственно производятъ независимыя перемѣнныя величины* $x, y, z, \ldots,$ u. *Вѣроятность* P, *что величины эти удовлетворяютъ неравенствамъ* (16), *всегда должна удовлетворять неравенствамъ* (16′).

Обобщеніе простого закона большихъ чиселъ.

Пусть число m вышеупомянутыхъ операцій O_1, $O_2, \ldots,$ O_m, наблюдаемыхъ въ природѣ или обществѣ, можетъ по данной программѣ возрастать неограниченно.

Установимъ слѣдующіе термины.

Перемѣннымъ среднимъ ξ назовемъ среднее ариѳметическое отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$; оно представится такъ:

$$\xi = \frac{x + y + \ldots + u}{m} = \frac{n}{m};$$

иначе:

$$\xi = \frac{x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega}{m} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

Постояннымъ среднимъ, а также *центральнымъ* или *начальнымъ среднимъ* a назовемъ среднее отъ математическихъ ожиданій перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$, иначе отъ вѣроятностныхъ среднихъ $a_1, a_2, \ldots, a_m$; оно выразится такъ:

$$a = \frac{\Sigma a}{m} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Среднее ариѳметическое отъ m разностей между независимыми перемѣнными $x, y, \ldots, u$ и соотвѣтственными математическими ожиданіями $a_1, a_2, \ldots, a_m$ назовемъ *перемѣннымъ среднимъ отклоненіемъ* отъ нуля; оно выразится такъ:

$$\xi - a = \frac{(x - a_1) + (y - a_2) + \ldots + (u - a_m)}{m} \quad \ldots\ldots (19)$$

Какъ случайное количество, отклоненіе $\xi - a$ отъ нуля можетъ быть и ниже, и выше нуля.

Среднее ариѳметическое отъ m математическихъ ожиданій перемѣнныхъ количествъ $(x - a_1)^2$, $(y - a_2)^2, \ldots,$ $(u - a_m)^2$ назовемъ *среднею*

квадратическою силою g отклоненія величины $\xi - a$ отъ нуля; эта сила представится такъ:

$$g = \frac{(b_1 - a_1^2) + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_m - a_m^2)}{m} = \frac{\Sigma(b - a^2)}{m} \quad \ldots (20)$$

Вліяніе этой силы сказывается въ неравенствахъ (16) и (16′), приводимыхъ къ виду:

$$\left.\begin{aligned} -\tau\sqrt{g} < \xi - a < +\tau\sqrt{g}\,, \\ 1 > P > 1 - \frac{1}{m\tau^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

Чтобы получить съ помощію теоремы Чебышева *обобщенный* законъ большихъ чиселъ, нужно условиться считать за основной признакъ числовой закономѣрности явленія $\xi - a$ относительную (приблизительную) достовѣрность весьма малаго отклоненія разности $\xi - a$ отъ нуля и достовѣрное неограниченное приближеніе этой разности къ нулю при неограниченномъ возрастаніи числа m.

Сила g отклоненія разности $\xi - a$ отъ нуля будетъ совмѣстима съ указаннымъ сейчасъ основнымъ признакомъ закона большихъ чиселъ, если возможно выбрать число τ такъ, чтобы величины

$$\tau\sqrt{g} \text{ и } 1 : (m \cdot \tau^2)$$

совмѣстно были весьма малы и стремились къ нулю при возрастаніи m до ∞. Отсюда при вышеуказанныхъ обозначеніяхъ слѣдуетъ:

Теорема II (обобщенный оперативный законъ большихъ чиселъ). *Если величину* τ, *входящую въ неравенства* (21), *возможно выбрать такъ, чтобы количества* $\tau\sqrt{g}$ *и* $\frac{1}{m \cdot \tau^2}$ *были весьма малы и стремились къ нулю при возрастаніи* m *до* ∞, *то вѣроятность* P *того, что абсолютная величина средняго отклоненія* $\xi - a$ *отъ нуля окажется весьма малымъ количествомъ, не превосходящимъ предѣла* $\tau \cdot \sqrt{g}$, *будетъ болѣе* $1 - \frac{1}{m\tau^2}$ *и будетъ стремиться къ* 1 (*къ относительной достовѣрности*) *при возрастаніи* m *до* ∞.

Выраженный теоремою II числовой законъ назовемъ *оперативнымъ*, такъ какъ въ ней подразумѣваются операціи съ итожною дѣятельностію ΣE, результатомъ коей является перемѣнная средняя величина ξ (или плодъ, или способность, сила и пр., или экономическое благо).

Предположенія теоремы II при *конечномъ* большомъ m осуществимы въ *опытѣ*. Вообще они осуществимы тогда, когда при всѣхъ значеніяхъ неограниченно возрастающаго числа m имѣетъ силу условіе:

$$\sigma < \frac{1}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ числовой порядокъ σ выводится изъ уравненія: $m^{\sigma} = \sqrt{g}$. Въ самомъ дѣлѣ при условіи (22) можемъ количество τ выбрать такъ:

$$\tau = m^{-\nu}, \qquad \sigma < \nu < \frac{1}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

При этомъ осуществятся всѣ предположенія теоремы II, такъ какъ будемъ имѣть стремящіяся къ нулю количества:

$$\tau\sqrt{g} = m^{-(\nu-\sigma)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{m\,\tau^2} = m^{-(1-2\nu)}.$$

Чтобы представить себѣ весьма распространенныя въ практикѣ обстоятельства, при которыхъ всѣ предположенія теоремы II сами собою выполняются, вообразимъ, что математическія ожиданія a_1, a_2, a_3,... перемѣнныхъ x, y, z, ... и математическія ожиданія b_1, b_2, b_3, ... квадратовъ тѣхъ же перемѣнныхъ конечныя (что осуществляется само собою, если всѣ значенія перемѣнныхъ x, y, z, ... конечныя). При этомъ, каково бы ни было число m, величины:

$$\frac{\Sigma a}{m}, \quad \frac{\Sigma a^2}{m}, \quad \frac{\Sigma b}{m} \text{ и } g \text{ или } \frac{\Sigma(b-a^2)}{m},$$

какъ среднія ариѳметическія отъ конечныхъ количествъ, также будутъ конечными величинами. Изъ этого мы заключаемъ, что число σ, выводимое изъ уравненія: $m^{\sigma} = \sqrt{g}$, будетъ весьма малымъ, стремящимся къ нулю при возрастаніи m; т. е. условія (23) и (22), при которыхъ оправдываются всѣ предположенія теоремы II, будутъ осуществляться для большого конечнаго m, а мысленно (т. е. внѣ опыта) и въ предѣлѣ при $m = \infty$.

При подобныхъ обстоятельствахъ и при опредѣленной программѣ развивающейся дѣятельности теорема Чебышева обосновываетъ, на почвѣ теоріи среднихъ и на почвѣ приблизительной достовѣрности, устойчивость перемѣннаго средняго явленія ξ и соотвѣтствующіе *устойчивые* бюджеты и резервы, біологическіе, хозяйственно-производственные и банкирскіе, когда обсуждаемое дѣло касается большой совокупности дѣятельностей и независимыхъ перемѣнныхъ явленій. Рѣчь же о неустойчивости будетъ ниже.

§ 22. Пунктирная діаграмма вѣроятности итога, обсуждаемаго въ теоремѣ Чебышева. Особые случаи въ отношеніи къ итогамъ, имѣющимъ нормальную діаграмму. Отношеніе графической закономѣрности къ числовой закономѣрности.

Изслѣдуя явленіе, трактуемое въ теоремѣ Чебышева (§ 21), нужно разсматривать скалу итога n перемѣнныхъ x, y, ..., u и связь вѣроятности каждаго значенія итога n съ пунктами скалы. Эта связь характеризуется діаграммой, представляющей вѣроятность $\Delta P_{m,n}$ того, что сумма $x + y + \ldots + u$ получитъ то или другое данное значеніе n. Эта вѣроятность, какъ функція перемѣннаго n, можетъ быть представлена на плоскости прямоугольныхъ координатъ n и β геометрическимъ мѣстомъ, опредѣляемымъ помощію уравненія:

$$\beta = \Delta P_{m,n}. \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

Если эта фигура не умѣщается на чертежѣ или становится при весьма большомъ m не отчетливою, то ее можно проявлять при помощи подбора графическихъ модулей L и L_1 (см. часть I, § 14_2).

Діаграмма вѣроятности $\Delta P_{m,n}$ цѣнится статистиками, ибо она, какъ теоретически обоснованная точная форма (графическая закономѣрность) сближается съ дѣйствительностію при помощи системы индуктивныхъ уравненій, указанныхъ въ § 18.

Эта діаграмма деформируется при возрастаніи m до ∞. Она большею частію представляетъ пунктирную линію. Но въ нормальныхъ обстоятельствахъ ее можно бываетъ интерполировать, т. е. замѣнять приближенною аналитическою кривою, форма которой разсмотрѣна выше (см. часть I, § 14_1, пунктъ III, и § 31) и которая будетъ оправдана соображеніями, изложенными въ III части настоящей книги. Эту *аналитическую* кривую мы называемъ нормальною діаграммой сложнаго явленія.

Однако же иногда точная пунктирная діаграмма отклоняется далеко отъ упомянутой сейчасъ аналитической кривой, которая въ такомъ случаѣ перестаетъ приблизительно представлять функцію $\Delta P_{m,n}$. Если имѣемъ дѣло съ подобнымъ обстоятельствомъ, то этого рода случай будемъ вообще называть особымъ случаемъ въ отношеніи къ вѣроятностямъ итоговъ, имѣющимъ нормальную діаграмму.

Эти особые случаи подраздѣляются на нѣсколько категорій.

Иногда послѣдовательныя точки пунктирной діаграммы, будучи соединены прямыми, образуютъ ломанную, осложненную зигзагами.

Къ такому пунктиру вовсе неудобно прилагать интерполированіе помощію аналитической нормальной формулы. Эту категорію особыхъ случаевъ назовемъ особыми перваго рода. Ниже (см. часть III) мы увидимъ, что эти случаи бываютъ въ смежности съ случаями, имѣющими нормальную діаграмму (напримѣръ, съ діаграммой явленій, разсматриваемыхъ въ теоремѣ Пуассона и ея частномъ случаѣ, трактуемомъ въ теоремѣ Я. Бернулли).

Діаграмма уравненія (24) даетъ возможность графически опредѣлять выгоду ΔM_n игрока класса A при обычной ставкѣ на выходъ разности $n - \Sigma a$, ибо эта выгода оцѣнивается такъ:

$$\Delta M_n = (n - \Sigma a)\,\Delta P_{m,n} \quad \ldots\ldots\ldots (24')$$

Выясняя отношеніе обозначенія $\Delta P_{m,n}$ къ теоремѣ Чебышева, предположимъ, что $P(A, B)$ означаетъ вѣроятность того, что будутъ имѣть силу неравенства:

$$A \leqq x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots u_\omega - a_1 - a_2 - \ldots - a_m \leqq B. \quad (25)$$

По теоремѣ сложенія будемъ имѣть:

$$P(A, B) = \sum \Delta P_{m,\, x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega}, \quad (26)$$

гдѣ сумма $\sum$ распространяется на всѣ значенія перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, u$, удовлетворяющія неравенствамъ (25). Эту сумму назовемъ *интегральною* вѣроятностью.

Если положимъ:

$$B = \tau \sqrt{\frac{b_1 - a_1^2 + b_2 - a_2^2 + \ldots + b_m - a_m^2}{m}}, \quad A = -B, \quad (27)$$

то будемъ имѣть:

$$P = P(A, B) \quad (28)$$

гдѣ P есть та вѣроятность, которая трактуется въ теоремѣ Чебышева.

Теорема Чебышева характеризуетъ *интегральную* вѣроятность $P(A, B)$ и помогаетъ открывать числовыя закономѣрности; а *графическая закономѣрность*, представляемая діаграммой уравненія (24), опредѣляетъ *дифференціальную* вѣроятность $\Delta P_{m,n}$, какъ функцію альтернативнаго итога n, и оцѣниваетъ рискъ ставки на выходъ каждаго изъ возможныхъ значеній n. Термины: «числовая закономѣрность» и «графическая закономѣрность» дополняютъ другъ друга и обозначаютъ различныя понятія.

Если бы графическая закономѣрность была дана, то изъ нея интеграціей легко получилось бы выраженіе $P(A, B)$, потомъ подтвержденіе теоремъ I и II. Эта закономѣрность полнѣе измѣряетъ случайности, но получается болѣе сложною вычислительною работою.

§ 23. Парадоксальные курсы и положенія и неустойчивость итога. Аналитическій діагнозъ; жертвы парадоксовъ.

Обобщенный законъ большихъ чиселъ, даваемый теоремою II, § 21, имѣетъ лишь относительную прочность, которая иногда обрывается; при этомъ вышеуказанный основной признакъ числовой закономѣрности долженъ терять силу.

Случаи этого обрыва назовемъ *парадоксальными* и притомъ *сильными* въ отличіе отъ слабыхъ или тихихъ парадоксальныхъ случаевъ, обусловливаемыхъ отдѣльно незамѣтными, но безчисленными пертурбаціями и погрѣшностями, однакоже въ итогѣ опасными.

Сильные парадоксальные надрывы бываютъ тогда, когда указанная въ § 21 средняя квадратическая сила g отклоненія разности $\xi - a$ отъ нуля имѣетъ слишкомъ высокій числовой *поркдокъ* 2σ, опредѣляемый изъ уравненія: $g = m^{2\sigma}$.

Крайніе парадоксальные казусы или ультрапарадоксы, соотвѣтствуютъ предположенію, что выведенная изъ уравненія $m^\sigma = \sqrt{g}$ величина σ стремится къ ∞ при возрастаніи m до ∞.

Менѣе рѣзкіе парадоксальные случаи имѣютъ мѣсто тогда, когда этотъ числовой порядокъ σ при всѣхъ значеніяхъ неограниченно возрастающаго числа m удовлетворяетъ неравенству: $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ и сохраняетъ кочечное значеніе. Учрежденія осмотрительности вызываются къ жизни парадоксами.

Всѣ парадоксальные случаи подраздѣлимъ на двѣ категоріи смотря по тому, стремится ли итогъ математическихъ ожиданій $a_1, a_2, \ldots, a_m$ при неограниченномъ возрастаніи m къ безконечности или же нѣтъ.

Примѣры парадоксовъ той или другой категоріи разсмотримъ ниже (см. §§ 27, 28 и 29), по распространеніи теоремы Чебышева на цѣпи испытаній съ зависимыми перемѣнными $x, y, \ldots, u$.

Аналитическій діагнозъ, проникающій *опросами* (анкетами) и *наблюденіями*, вообще эвристическимъ методомъ § 18, въ дѣятельность наиболѣе мелкихъ операцій съ цѣлями математическаго анализа устойчивости и, наоборотъ, возможности обрывовъ и катаклизмовъ, представляетъ важную часть изслѣдованія числовыхъ и графическихъ закономѣрностей природы и общественной культуры.

Парадоксальности иногда разрѣшаются при помощи именно мелкихъ операцій, т. е. съ помощію возможнаго аналитическаго расчлененія крупныхъ операцій на мелкія въ ихъ сосуществованіи. Такъ, отдѣльныя операціи $O_1, O_2, \ldots, O_m$ иногда сами могутъ быть осложненными, состоя изъ болѣе простыхъ (элементарныхъ) мелкихъ операцій $o_1, o_2, o_3, \ldots$ Пусть

$$O_k = (o_1 o_2 \ldots o_{s_k}), \; k = 1, 2, \ldots, m \quad (29)$$

Число m' мелкихъ (элементарныхъ) операцій, содержащихся въ составѣ крупныхъ операцій $O_1, O_2, \ldots, O_m$, будетъ:

$$m' = s_1 + s_2 + \ldots + s_m \quad (29')$$

При этомъ разложеніи каждое изъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$, производимыхъ операціями $O_1, O_2, \ldots, O_m$, явится итогомъ соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, производимыхъ операціями $o_1, o_2, o_3, \ldots$, вошедшими въ соотвѣтствующую изъ крупныхъ операцій O.

При такомъ углубленномъ анализѣ операцій и ихъ продуктовъ вышеприведенныя теоремы I и II § 21 приложатся къ m' операціямъ, домо-

гающимся явленія $n = x + \ldots + u$, и угроза парадоксальнаго курса, если онъ, казалось, имѣетъ мѣсто, можетъ разсѣяться съ помощію мелкихъ силъ.

Но если сами операціи $O_1, O_2, \ldots, O_m$ суть элементарныя, то это углубленіе уже не возможно. Если при этомъ имѣетъ мѣсто не закономѣрность, а парадоксальность, то она тутъ зависитъ уже отъ существенныхъ обстоятельствъ въ условіяхъ и корняхъ (естественныхъ причинахъ) процесса; она не разсѣется въ прахъ никакими истолкованіями; тутъ *наступаетъ конфузъ логики А «трехъ законовъ»* (см. часть I, § 4), которой до сихъ поръ мы строго подчиняли наши выводы.

Парадоксальные случаи этого рода надо распознавать и выключать или же парализовать въ ихъ корняхъ или естественныхъ причинахъ, вводя гарантіи противъ нихъ и сопротивленія, борьбою ослабляющія дѣйствіе отрицательныхъ причинъ.

Страховой резервъ противъ кризисовъ или парадоксальныхъ положеній, соображаемый съ помощію числа

$$Q = \sqrt{g} = m^{\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

или числоваго порядка σ, при $\sigma > \frac{1}{2}$ дорогъ и тѣмъ дороже, чѣмъ болѣе σ; при $\sigma = +\infty$ (въ случаѣ ультрапарадокса) онъ безконечно дорогъ. Напротивъ, при $\sigma < \frac{1}{2}$ страховой резервъ, также полезный и даже нужный (въ виду относительности этой устойчивости), дешевъ и тѣмъ дешевле, чѣмъ менѣе σ. При $\sigma = -\infty$ страховой резервъ ничего не стоитъ; *тутъ устойчивость итожнаго явленія n абсолютно непоколебимая, совершенно прочная, твердая.*

Скала σ *градуируетъ* устойчивость итога n и опредѣляется скалою Q, а $Q^2 = g$. Благодаря неравенствамъ (23) и равенствамъ (31), скалы Q и τ подраздѣляются на части. Скалы σ и ν разсѣкаются каждая на двѣ части числомъ $\frac{1}{2}$; скалы Q и τ разсѣкаются каждая на двѣ части числами $\sqrt{m}$ и $\sqrt{m^{-1}}$; скала итога n дѣлится на двѣ части пунктомъ Σa. Скалы эти получаютъ значеніе важныхъ номографическихъ элементовъ, помогающихъ оріентироваться въ наличности либо относительной устойчивости средней величины ξ или $n : m$, либо обрывовъ этой устойчивости и обсуждаемой оперативной числовой закономѣрности.

Устойчивость во многихъ случаяхъ дается дорогою цѣною, а не даромъ. Въ составъ сложной операціи приходится на практикѣ вводить *гарантіи* устойчивости, о чемъ рѣчь будетъ ниже. При недостаткѣ устойчивости нужна раскладка тяжести сопротивленія причинамъ неустойчивости и относительности. Исчисленіе вѣроятностей $\Delta P_{m,n}$, тутъ необходимо при правильной раскладкѣ этого сопротивленія. Тутъ же вступаетъ въ

силу жертва, организованная взаимная поддержка и нормативные законы (нравственные и гражданскіе), опредѣляющіе частный долгъ.

Пограничный пунктъ области парадоксальныхъ случаевъ соотвѣтствуетъ переходному случаю, когда $\sigma = \frac{1}{2}$ *); отнесемъ и этотъ случай къ сомнительнымъ, нуждающимся въ интерпретаціи и другихъ мѣрахъ.

Статистики пользуются мѣриломъ M устойчивости, которое называется статистическимъ модулемъ устойчивости итога массовыхъ явленій. Величину $M = Q\sqrt{2 : m} = \sqrt{2g : m}$ будемъ считать статистическимъ модулемъ **) устойчивости итога n перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$ или же ихъ средней величины ξ.

Относительная устойчивость переходитъ въ абсолютную при $M = 0$; устойчивость дѣлается призрачною или парадоксальною ***) при $M \geqq \sqrt{2}$.

§ 24. Теорема Пуассона, какъ частный случай теоремы Чебышева.

Изъ теоремы Чебышева можно, какъ простое слѣдствіе, вывести теорему Poisson'a.

Пусть предполагается повторить m разъ данное испытаніе, которому свойственны противоположныя событія E и F. Положимъ, что вѣроятности этихъ событій измѣняются при переходѣ отъ одного испытанія къ другому; эти вѣроятности событій E и F обозначимъ соотвѣтственно

для перваго испытанія чрезъ p_1 и p_2,
» втораго » » q_1 и q_2,
. . . . . .
» m-го » » t_1 и t_2.

Вообразимъ, что этимъ испытаніямъ соотвѣтствуютъ перемѣнныя $x, y, z, \ldots, u$, изъ которыхъ каждое можетъ имѣть только два частныхъ значенія. Эти значенія назовемъ черезъ $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \ldots, u_1, u_2$. Предположимъ, что эти частныя значенія осуществляются по ходу событій, повинуясь слѣдующему канону. Если при первомъ испытаніи осуществляется

*) При классификаціи на основаніи сложныхъ признаковъ неизбѣжны двусмысленные переходные случаи. Такъ біологи становились въ затруднительное положеніе, когда въ Австраліи были найдены животныя, которыхъ по признакамъ можно было причислить и къ птицамъ и къ звѣрямъ.

**) Ср. выше, § 13, и ср. *А. А. Чупровъ*: Очерки по теоріи статистики. Изданіе 2-е, стр. 252. С.-Петербургъ, 1911 г.

***) Подобныхъ парадоксальностей не представляетъ обсужденіе итога явленій, разсматриваемыхъ въ теоремахъ Я. Бернулли и Пуассона; поэтому законъ большихъ чиселъ въ формахъ Я. Бернулли и Пуассона считается въ статистикѣ своего рода краеугольнымъ камнемъ. Но при этомъ не вырабатывается понятія о бурной неустойчивости итога въ менѣе элементарныхъ случаяхъ, которая слагается изъ легкихъ, но безчисленныхъ изъяновъ устойчивости помянутаго краеугольнаго камня статистиковъ.

событіе E, то x принимаетъ значеніе x_1; если при томъ же испытаніи состоится событіе F, то x принимаетъ значеніе x_2. Если при второмъ испытаніи состоится событіе E, то y принимаетъ значеніе y_1; если же состоится событіе F, то y принимаетъ значеніе y_2. И т. д. Наконецъ, если при m-мъ испытаніи состоится событіе E, то u принимаетъ значеніе u_1; если же состоится F, то u принимаетъ значеніе u_2.

Предположимъ, что частныя значенія перемѣнныхъ съ индексомъ 1 равны единицѣ, а частныя значенія перемѣнныхъ съ индексомъ 2 равны нулю, т. е.

$$x_1 = y_1 = \ldots = u_1 = 1 \text{ и } x_2 = y_2 = \ldots = u_2 = 0. \quad . \quad (32)$$

Удерживая каноническія обозначенія, принятыя въ теоремѣ Чебышева, для разсматриваемаго случая будемъ имѣть:

$$a_1 = p_1,\ a_2 = q_1, \ldots,\ a_m = t_1,$$
$$b_1 = p_1,\ b_2 = q_1, \ldots,\ b_m = t_1.$$

Чебышевскія перемѣнныя $x, y, \ldots, u$ и Чебышевскія операціи $O_1, O_2, \ldots, O_m$ переходятъ въ Пуассоновскія. Далѣе будемъ имѣть:

$$\frac{\Sigma a}{m} = \frac{p_1 + q_1 + \ldots + t_1}{m},$$

$$\frac{\Sigma b}{m} - \frac{\Sigma a^2}{m} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + \ldots + t_1 t_2}{m} = \frac{\theta}{4m},$$

гдѣ θ есть правильная дробь. Сверхъ того, разсматривая выраженіе

$$\frac{x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega}{m},$$

мы на основаніи равенствъ (32) утверждаемъ, что числитель $x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega$ равенъ числу такихъ его членовъ, которые имѣютъ индексъ 1, а слѣдовательно равенъ ожидаемому числу n появленій событія E при m предполагаемыхъ испытаніяхъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ неравенства (16) мы можемъ, при разсматриваемыхъ условіяхъ, представить такъ:

$$-\frac{\tau\sqrt{\theta}}{2} \leqq \frac{n}{m} - \frac{p_1 + q_1 + \ldots + t_1}{m} \leqq +\tau\frac{\sqrt{\theta}}{2},$$

причемъ вѣроятность P осуществленія этихъ неравенствъ должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \frac{1}{m\tau^2}.$$

Пусть τ есть весьма малое число, отличное отъ нуля, и m стремится къ безконечности. Положимъ $\tau = m^{-\nu}$, $0 < \nu < {}^1/_2$; при этомъ дробь $\frac{1}{m\tau^2}$

должна быть величиной весьма малой и стремящейся при возрастаніи m до ∞ къ нулю. Вмѣстѣ съ тѣмъ вѣроятность P должна быть близкою къ единицѣ и въ предѣлѣ, при $m = \infty$, стремящеюся къ единицѣ.

Соображая все сказанное, мы приходимъ къ теоремѣ Пуассона. *Пусть n есть ожидаемое число появленій событія E при m предполагаемыхъ испытаніяхъ. Вѣроятность P того, что отношеніе $\frac{n}{m}$ будетъ отличаться отъ средняго ариѳметическаго изъ вѣроятностей событія E на величину, не превосходящую даннаго малаго числа δ, при большомъ m близка къ единицѣ и стремится къ единицѣ съ возрастаніемъ m до ∞.*

§ 25. Лапласовская теорія способа наименьшихъ квадратовъ, упрощенная при помощи теоремы Чебышева. Критика, относящаяся къ выводамъ съ помощью этого способа.

Способъ наименьшихъ квадратовъ служитъ для отысканія, на основаніи значительнаго числа m наблюденій, группы ν неизвѣстныхъ ($m > \nu$). Онъ имѣетъ троякое приложеніе соотвѣтственно тремъ точкамъ зрѣнія: Лежандра, Лапласа и Гаусса.

Точка зрѣнія Лежандра *интерполяціонная*, не имѣющая отношенія къ теоріи вѣроятностей, но имѣющая отношеніе къ остальнымъ частямъ математики. Она прилагается, напримѣръ, къ опредѣленію параметровъ $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ *интерполяціонной* функціи $F(x, \lambda, \mu, \nu, \ldots)$ перемѣннаго x при помощи данной группы значеній этой функціи (см. часть I, § 15). Она имѣетъ отношеніе къ математической формулировкѣ эмпирическихъ законовъ, выражающихъ *плавный* (безъ замѣтныхъ толчковъ и сотрясеній) постепенный процессъ, допускающій приложеніе аналитическихъ функцій къ его изслѣдованію.

Лапласъ же и Гауссъ, съ различныхъ точекъ зрѣнія, приложили способъ наименьшихъ квадратовъ къ вопросамъ, имѣющимъ тѣсную связь съ теоріей вѣроятностей. Различіе этихъ точекъ имѣетъ отношеніе къ послѣдовательности фактовъ во времени: Лапласъ обосновываетъ способъ для *предстоящихъ* наблюденій, т. е. судитъ въ смѣтномъ проективномъ порядкѣ; а Гауссъ обосновываетъ тотъ же способъ на почвѣ *сдѣланныхъ* наблюденій, имѣя возможность ревизировать факты, сличать предположенія съ оказательствомъ на дѣлѣ и примѣнять излагаемое ниже синтетическое ученіе о вѣроятностяхъ à posteriori, сближающее теорію съ фактическою дѣйствительностію.

Лапласовская теорія способа наименьшихъ квадратовъ уже подверглась переработкѣ въ трудахъ Коши и затѣмъ Бьэнемэ, В. Я. Цингера,

Лорана, Слешинскаго, Ярошенко, А. А. Маркова и другихъ *). Она, при сложности вывода, ограничивается, какъ извѣстно, предположеніями, исключающими систематическія погрѣшности и, кромѣ того, разные парадоксы. Упростить Лапласовское обоснованіе способа наименьшихъ квадратовъ и ярче отдѣлить сомнительное отъ несомнѣннаго возможно при помощи вышедоказанной теоремы Чебышева.

Вотъ этотъ упрощенный выводъ.

Пусть рядъ m независимыхъ наблюденій приводитъ къ системѣ уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned} &a_k x + b_k y + \ldots + p_k w - l_k = \delta_k, \\ &k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$a_k \,.\, x + b_k \,.\, y + \ldots + p_k \,.\, w$$

есть наблюдаемая линейная функція ν неизвѣстныхъ $x,\ y,\ \ldots,\ w$, далѣе l_k есть ожидаемый результатъ наблюденія и δ_k есть ожидаемая погрѣшность наблюденія. Уравненія (1) называются начальными.

Отъ характера наблюденія зависитъ вѣроятность $\varphi_k(\delta_k)\, d\delta_k$ того, что погрѣшность δ_k получитъ опредѣленное значеніе δ_k. Видъ функціи $\varphi_k(\delta_k)$ остается въ способѣ Лапласа безъ окончательнаго опредѣленія. Пусть однако же наблюденія и наблюдаемыя формы функцій ставятся такъ, что математическія ожиданія независимыхъ погрѣшностей $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ отдѣльно суть нули, т. е.

$$S\varphi_k(\delta_k) \,.\, \delta_k \,.\, d\delta_k = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad \ldots \quad (2)$$

гдѣ интеграція S распространяется на всѣ возможныя значенія перемѣннаго δ_k, составляющія рядъ почти непрерывный. Условія (2) гарантируются тщательнымъ исключеніемъ систематическихъ погрѣшностей наблюденія.

Математическія ожиданія квадратовъ погрѣшностей $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ пусть всегда остаются конечными не выше даннаго предѣла; этимъ исключается парадоксальный случай или обезпечивается возможность примѣненія теоремы II, § 21. Обозначимъ матем. ожиданіе δ_k^2 чрезъ M_k,

$$M_k = S\varphi_k(\delta_k) \,.\, \delta_k^2 \,.\, d\delta_k \quad \ldots \quad (3)$$

Замѣтимъ мимоходомъ, что численныя значенія погрѣшностей $\delta_1, \delta_2, \ldots$, а слѣд. и численныя значенія величинъ $M_1, M_2, \ldots$ зависятъ не только отъ функцій $\varphi_k(\delta_k)$, но и отъ *подбора мѣръ* (единицъ) тѣхъ конкретныхъ

*) *H. Laurent*: «Statist. Mathém».—*В. Я. Цингеръ*: «Способъ наименьшихъ квадратовъ (Москва, 1862 г.).—*И. В Слешинскій*: «Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ» (Одесса, 1892). *А. А. Марковъ*: «Законъ большихъ чиселъ и способъ наименьшихъ квадратовъ» (Извѣстія Казанскаго Физико-Матем. Общества, за 1899 годъ).

явленій, численныя величины коихъ обозначены символами $x,\ y, \ldots$ Крупныя по величинѣ мѣры убавляютъ численныя значенія $|\delta_k|$ и M_k; уменьшеніе мѣръ въ s разъ увеличиваетъ числа M_k въ s^2 разъ.

Умножая каждое изъ уравненій системы (1) на неопредѣленный множитель λ_k и складывая эти уравненія, получимъ уравненіе:

$$x \,.\, \sum a_k \lambda_k + y \,.\, \sum b_k \lambda_k + \ldots + w \,.\, \sum p_k \lambda_k - \sum l_k \lambda_k = \sum \delta_k \lambda_k \quad . \quad (4)$$

Введемъ затѣмъ условія:

$$\sum a_k \lambda_k = m, \sum b_k \lambda_k = \sum c_k \lambda_k = \ldots = \sum p_k \lambda_k = 0 \quad . \quad (5)$$

Эти условія связываютъ лишь ν изъ неопредѣленныхъ количествъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; остальные $m - \nu$ остаются пока произвольными. Благодаря условіямъ (5), уравненіе (4) получаетъ видъ:

$$x = \frac{1}{m} \cdot \sum l_k \,.\, \lambda_k + \frac{1}{m} \,.\, \Delta, \quad \ldots \quad (6)$$

$$\Delta = \delta_1 \,.\, \lambda_1 + \delta_2 \,.\, \lambda_2 + \ldots + \delta_m \,.\, \lambda_m \quad \ldots \quad (7)$$

Примѣняя теорему Чебышева, обозначимъ чрезъ P вѣроятность того, что будутъ имѣть силу неравенства:

$$-t < \frac{\Delta}{m} < +t \quad \ldots \quad (8)$$

Эта вѣроятность, по теоремѣ Чебышева, должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \frac{H}{mt^2}, \quad \ldots \quad (9)$$

гдѣ

$$H = \frac{1}{m} \cdot [M_1 \lambda_1^2 + M_2 \lambda_2^2 + \ldots + M_m \lambda_m^2] \quad \ldots \quad (10)$$

Такъ какъ, по условію примѣнимаго здѣсь обобщеннаго закона большихъ чиселъ, t весьма мало, то величина $\frac{\Delta}{m}$, удовлетворяющая, по предположенію, неравенствамъ (8), можетъ быть пренебрежена, при чемъ равенство (6) получитъ видъ:

$$x = \frac{1}{m} \sum l_k \lambda_k; \quad \ldots \quad (11)$$

а чтобы это рѣшеніе соотвѣствовало наиболѣе высокому значенію вѣроятности P, нужно, чтобы низшій ея предѣлъ, отмѣченный въ неравенствахъ (9) величиною

$$K = 1 - \frac{H}{mt^2}, \quad \ldots \quad (12)$$

былъ *наибольшимъ* изъ всевозможныхъ значеній этой велины, какъ функціи перемѣнныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, связанныхъ условіями (5). Этотъ услов-

ный максимумъ величины K соотвѣтствуетъ также условному *минимуму* функціи H, опредѣляемой равенствомъ (10).

Отыскивая условный минимумъ функціи H по извѣстному плану, будемъ сначала опредѣлять безусловный минимумъ функціи

$$H - X \cdot \left(\sum a_k \lambda_k - m\right) - Y \cdot \sum b_k \lambda_k - \ldots - W \cdot \sum p_k \lambda_k,$$

гдѣ X, Y, ..., W суть ν новыхъ неопредѣленныхъ пока количествъ, независящихъ отъ перемѣнныхъ λ_1, λ_2, ..., λ_m. Потомъ примемъ условія (5).

По этому способу находимъ, въ дополненіе къ системѣ (5), систему уравненій, опредѣляющихъ искомый минимумъ функціи H, именно:

$$\left.\begin{aligned} &2M_k \cdot \lambda_k = a_k X + b_k \cdot Y + \ldots + p_k \cdot W, \\ &k = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

Системы (5) и (13) достаточны, вообще говоря, для опредѣленія $m + \nu$ величинъ λ_1, λ_2, ..., λ_m, X, Y, ... W. Величины λ_1, λ_2, ..., λ_m легко исключить, послѣ чего получимъ для опредѣленія вспомогательныхъ величинъ X, Y, ..., W систему слѣдующихъ ν уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &X \cdot \sum \frac{g_k a_k a_k}{m} + Y \cdot \sum \frac{g_k a_k b_k}{m} + \ldots + W \cdot \sum \frac{g_k a_k p_k}{m} = 1, \\ &X \cdot \sum \frac{g_k b_k a_k}{m} + Y \cdot \sum \frac{g_k b_k b_k}{m} + \ldots + W \cdot \sum \frac{g_k b_k p_k}{m} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &X \cdot \sum \frac{g_k p_k a_k}{m} + Y \cdot \sum \frac{g_k p_k b_k}{m} + \ldots + W \cdot \sum \frac{g_k p_k p_k}{m} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . (14)$$

гдѣ вообще $g_k = 1 : (2M_k)$.

Количества g_1, g_2, ..., g_m пропорціональны *вѣсамъ* предстоящихъ наблюденій, характеризующимъ тщательность эксперимента или наблюденія, дающаго результаты l_1, l_2, ..., l_m.

Слѣдуетъ замѣтить, что каждый коэффиціентъ въ системѣ (14) при любомъ изъ неизвѣстныхъ X, Y, ..., W для любого изъ уравненій системы представляетъ *среднее ариѳметическое* отъ членовъ $g_k q_k r_k$ суммы вида $\sum g_k q_k r_k$. Если эти члены суть всегда конечныя величины, то при любомъ весьма большомъ значеніи числа m наблюденій система (14), вообще говоря (исключенія бываютъ), даетъ конечныя значенія всѣхъ ν неизвѣстныхъ X, Y, ..., W. Слѣдовательно и система (13) опредѣлитъ конечныя значенія величинъ λ_1, λ_2, ..., λ_m; а потому и вышеуказанное количество H, опредѣляемое равенствомъ (10), будетъ конечнымъ, при чемъ количество K будетъ величиною, весьма близкою къ 1; т. е. сдѣ-

ланныя выше предположенія (8), сводящія погрѣшность $\frac{\Delta}{m}$ приближеннаго равенства (11) къ ничтожной величинѣ, будутъ почти *достовѣрными*. Въ этой достовѣрности содержится главная цѣнность вывода.

Исключенія изъ этихъ общихъ разсужденій, нарушающія норму (правило) надежности вывода (заключенія), бываютъ тогда, когда слишкомъ малъ детермирантъ

$$D = \begin{vmatrix} (aa), (ab), \ldots, (ap) \\ (ba), (bb), \ldots, (bp) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (pa), (pb), \ldots, (pp) \end{vmatrix}, \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

гдѣ вообще для краткости положено:

$$(qr) = \sum g_k q_k r_k = g_1 q_1 r_1 + g_2 q_2 r_2 + \ldots + g_m q_m r_m. \quad . \quad (16)$$

Если детерминантъ D есть нуль или приближенъ къ нулю настолько, что количества λ_k, опредѣляемыя системами (13) и (14), оказываются либо безконечностями, либо слишкомъ большими конечными величинами, то вышеизложенныя сужденія дѣлаются парадоксальными.

Очевидно, въ этихъ особыхъ случаяхъ имѣетъ мѣсто парадоксъ второй категоріи (см. § 23), подрывающій довѣріе къ устойчивости выводовъ. Этимъ исключительнымъ (но не рѣдкимъ) случаямъ соотвѣтствуетъ основательное сомнѣніе и то или другое *парадоксальное* положеніе въ условіяхъ и установкѣ опытовъ и наблюденій; вышеуказанное количество K можетъ далеко отойти отъ 1, роняя нашъ курсъ довѣрія къ выводамъ. Иначе говоря, при подобномъ парадоксальномъ положеніи оказываются въ наличности достаточныя основанія, чтобы заранѣе провидѣть ненадежность предположеннаго вывода неизвѣстныхъ x, y, ..., w по способу наименьшихъ квадратовъ, а потому искать другихъ способовъ надежнаго вывода и, можетъ быть, видоизмѣнить условія и установку наблюденій такъ, *чтобы поставить дѣло внѣ сомнительнаго положенія*.

Выше мы выяснили способъ опредѣленія лишь одного неизвѣстнаго x. Повторяя разсужденія, можемъ тотъ же способъ распространить на остальныя неизвѣстныя y, z, ..., w, выдвигая ихъ поочередно на мѣсто x.

Найденныя по этому плану алгебраическія выраженія неизвѣстныхъ x, y, ..., w совпадаютъ по виду съ выраженіями тѣхъ значеній перемѣнныхъ x, y, ..., w, для коихъ функція

$$g_1 \delta_1^2 + g_2 \delta_2^2 + \ldots + g_m \delta_m^2, \quad .$$

содержащая величины δ_k, выводимыя изъ уравненій (1), обращается въ минимумъ. Въ этомъ убѣждаются слѣдующимъ сопоставленіемъ.

Найденную выше формулу (11) нужно преобразовать съ помощью уравненій (13), исключая величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Получимъ:

$$x = X\sum\frac{g_k a_k l_k}{m} + Y\sum\frac{g_k b_k l_k}{m} + \ldots + W\sum\frac{g_k p_k l_k}{m}.$$

Внося сюда детерминантныя выраженія неизвѣстныхъ $X, Y, \ldots, W$, выведенныя изъ системы уравненій (14), будемъ имѣть:

$$x = \frac{D_{11}}{D}\sum g_k a_k l_k + \frac{D_{22}}{D}\sum g_k b_k l_k + \ldots + \frac{D_{\nu\nu}}{D}\sum g_k p_k l_k \quad . \quad (17)$$

гдѣ D есть вышеуказанный детерминантъ, а D_{kk} есть его миноръ, получаемый вычеркиваніемъ въ детерминантѣ D строки k и столбца k.

Вмѣстѣ съ тѣмъ легко убѣдиться, что неизвѣстная величина x, опредѣляемая равенствомъ (17), выводится изъ системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&x\sum g_k a_k^2 + y\sum g_k a_k b_k + \ldots + w\,.\sum g_k a_k p_k = \sum g_k a_k l_k,\\
&x\sum g_k b_k a_k + y\sum g_k b_k^2 + \ldots + w\,.\sum g_k b_k p_k = \sum g_k b_k l_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x\sum g_k p_k a_k + y\sum g_k b_k p_k + \ldots + w\,.\sum g_k p_k^2 = \sum g_k p_k l_k.
\end{aligned}\right\} . \quad (18)$$

Этою же самою системою опредѣляются тѣ значенія перемѣнныхъ $x, y, \ldots, w$, для которыхъ функція $\sum g_k \delta_k^2$ обращается въ minimum.

Способъ Гаусса (см. ниже § 55) приводитъ къ тѣмъ же выраженіямъ неизвѣстныхъ $x, y, \ldots, w$, но съ другой точки зрѣнія.

Это формальное (по алгебраическому выраженію результатовъ) совпаденіе рѣшеній по способамъ Гаусса и Лапласа соотвѣтствуетъ какъ нельзя лучше практическому *сличенію* ожиданія, формулируемаго въ смѣтномъ (Лапласовскомъ) порядкѣ, съ оказательствомъ въ совершеніи и въ фактическомъ ревизіонномъ (Гауссовомъ) порядкѣ. Достовѣрное à priori, конечно, оправдывается и заднимъ числомъ; относительность достовѣрности дѣлаетъ эту повѣрку заднимъ числомъ необходимымъ стараніемъ.

§ 26. Интегральное выраженіе, представляющее вѣроятность $\Delta P_{m,n}$ перемѣннаго n. Ея производящая функція. Распространеніе теоремы Чебышева на итогъ перемѣнныхъ величинъ, частію зависимыхъ, частію независимыхъ другъ отъ друга.

I. Вернемся къ обозначеніямъ §§ 21 и 22 и обобщимъ ихъ. Предположимъ, что перемѣнныя $x, y, z, \ldots, u$ могутъ быть какъ независимыми, такъ и зависимыми; обозначимъ чрезъ $\Delta P_{m,n}$ вѣроятность того, что будетъ имѣть силу равенство:

$$x + y + \ldots + u = n \quad . \quad (1)$$

Обозначимъ чрезъ $F(v)$ женератрису (производящую функцію) вѣроятности $\Delta P_{m,n}$ перемѣннаго n, т. е. будемъ полагать:

$$F(v) = \sum_{n'}^{n''}\Delta P_{m,n}\,.\,v^n, \quad . \quad (2)$$

гдѣ сумма $\sum_{n'}^{n''}$ распространяется на всѣ возможныя значенія итога n перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$; n' и n'' суть наименьшее и наибольшее изъ всѣхъ значеній n. Эти значенія, записанныя въ строку (3) (и въ графу соотв. таблицы), въ возрастающемъ порядкѣ, пусть будутъ:

$$n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots, n_N; \quad . \quad (3)$$

гдѣ

$$n_1 = n' \text{ и } n_N = n''.$$

Если h есть общая наибольшая мѣра всѣхъ возможныхъ разностей $n_k - n_l$, то, какъ доказано было въ части I, § 29, будемъ имѣть:

$$\Delta P_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(v\,.\,e^{w\theta\sqrt{-1}})\,.\,(v\,.\,e^{w\theta\sqrt{-1}})^{-n}\,d\theta, \quad . \quad (4)$$

гдѣ

$$w = \frac{1}{h}. \quad . \quad (4')$$

По поводу производящей функціи $F(v)$ слѣдуетъ замѣтить *лемму*:

Лемма I. *Положимъ:*

$$\Phi(v) = \varphi_1(v)\,.\,\varphi_2(v)\ldots\varphi_m(v), \quad . \quad (5)$$

гдѣ $\varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots, \varphi_m(v)$ *суть женератрисы вѣроятностей значеній перемѣнныхъ* $x, y, \ldots, u$, *т. е.*

$$\varphi_1(v) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} p_\lambda v^{x_\lambda},\ \varphi_2(v) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} q_\mu v^{y_\mu}, \ldots, \varphi_m(v) = \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} t_\omega v^{u_\omega} \quad . \quad (6)$$

Если $x, y, \ldots, u$ *суть независимыя перемѣнныя величины, то будемъ имѣть тождественно:*

$$F(v) = \Phi(v); \quad . \quad (7)$$

въ противномъ случаѣ функціи $F(v)$ *и* $\Phi(v)$ *будутъ различными.*

Доказывая эту лемму, нужно разложить произведеніе

$$\varphi_1(v)\,.\,\varphi_2(v)\ldots\varphi_m(v)$$

по восходящимъ степенямъ n параметра v, предполагая, что вторыя части равенствъ (6) также представляютъ разложенія по восходящимъ степенямъ v.

При этомъ съ помощью элементарнаго правила умноженія полиномовъ (6) и посредствомъ теоремъ умноженія и сложенія вѣроятностей

убѣждаемся, что коэффиціенты этого разложенія представятся вѣроятностями $\Delta P_{m,n}$, т. е. разложеніе это совпадетъ со второю частью равенства (2), если только перемѣнныя $x, y, \ldots, u$ независимыя; тождество (7) при этомъ оправдано. Вторая же половина вышеприведенной леммы, отрицающая тождество (7), очевидна сама собою.

Доказанная лемма и формула (4) играютъ важную роль въ исчисленіи вѣроятности $\Delta P_{m,n}$ и въ построеніи ея діаграммы § 22, а также въ обобщеніи системъ индуктивныхъ уравненій, затронутыхъ въ § 18.

II. Распространимъ теперь теорему Чебышева о среднихъ величинахъ (см. § 21) на случай итога n, представляющаго смѣсь зависимыхъ и независимыхъ перемѣнныхъ величинъ

$$x, y, z, \ldots, u.$$

Теорема Чебышева (§ 21) сохраняетъ полную силу для случая, когда $m = 1$, т. е. для случая одного только перемѣннаго n. При этомъ она можетъ быть продиктована въ видѣ слѣдующей леммы.

Лемма II. *Пусть n_0 и G представляютъ математическія ожиданія величинъ n и $(n - n_0)^2$. Вѣроятность P того, что будутъ имѣть силу неравенства:*

$$-t \cdot \sqrt{G} \leqq n - n_0 \leqq +t \cdot \sqrt{G},$$

должна при произвольномъ положительномъ числѣ t удовлетворять неравенствамъ:

$$1 \geqq P > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

При этомъ съ помощью женератрисы $F(v)$ и ея разложенія (2) находимъ:

$$n_0 = F'(1) \text{ и } G = m \cdot g(1), \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ

$$g(v) = \frac{v}{m}\frac{d}{dv}\left\{v \cdot \frac{F'(v)}{F(v)}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8')$$

Иначе ту же величину G можно опредѣлить такъ:

$$G = \left[\frac{d^2\left\{F(e^\rho)\, e^{-n_0\rho}\right\}}{d\rho^2}\right]_{\rho=0} \quad \ldots\ldots\ldots (8'')$$

Исходя изъ леммы II и принимая во вниманіе равенство (1), можемъ высказать слѣдующую теорему о среднихъ величинахъ.

Теорема I. *Пусть τ есть произвольное положительное число. Если n_0 есть математическое ожиданіе итога зависимыхъ и независимыхъ перемѣнныхъ величинъ $x, y, z, \ldots, u$, производимыхъ соотвѣтственно операціями: $O'_1, O'_2, \ldots, O'_m$, и если т. g (1) есть математическое ожиданіе величины*

$$(x + y + z + \ldots + u - n_0)^2,$$

то вѣроятность P неравенствъ:

$$-\tau\sqrt{g(1)} < \frac{x + y + z + \ldots + u}{m} - \frac{n^0}{m} < +\tau\sqrt{g(1)}, \quad \ldots (9)$$

должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \frac{1}{m\tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9')$$

Эта теорема представляетъ собою распространеніе доказанной въ § 21 теоремы Чебышева; ибо величины $x, y, \ldots, u$ могутъ быть въ разсматриваемомъ случаѣ не вполнѣ независимыми. Если же всѣ онѣ попарно независимы, то получается теорема Чебышева, выведенная въ § 21 для независимыхъ перемѣнныхъ.

Формула (4) и, съ другой стороны, вышеприведенная теорема показываютъ, что пріемы и теоремы исчисленія вѣроятностей итоговъ имѣютъ такую высокую общность, которая объединяетъ случаи какъ независимыхъ перемѣнныхъ, такъ и смѣси зависимыхъ и независимыхъ перемѣнныххъ $x, y, z, \ldots, u$.

Но случай независимыхъ перемѣнныхъ выдѣляется въ виду его принципіальнаго значенія (онъ разъясняетъ *антиномію* Канта: *свобода* или *необходимость*? см. «Пролегомены»), а также и въ виду простоты констатированія естественныхъ условій независимости причинъ явленій и независимости величинъ, сопутствующихъ явленіямъ. Простота же соотвѣтствующей теоріи при этомъ обусловливается существованіемъ тождества (7).

Обобщенный законъ большихъ чиселъ при обсужденіи смѣси независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ величинъ. Парадоксальные случаи.

Предположимъ, что частію независимыя, частію зависимыя величины $x, y, z, \ldots, u$ являются продуктомъ дѣятельности соотвѣтствующихъ операцій $O'_1, O'_2, O'_3, \ldots, O'_m$ и что операціи эти могутъ черпаться изъ природы или изъ свойствъ человѣка въ неограниченномъ количествѣ, т. е. число m въ устанавливающейся сложной операціи $(O'_1 O'_2 \ldots O'_m)$ можетъ возрастать неограниченно.

Полагая

$$\xi = \frac{n}{m} = \frac{x + y + z + \ldots + u}{m} \text{ и } a = \frac{n_0}{m} = \frac{F'(1)}{m}, \quad \ldots (10)$$

примемъ (какъ въ § 21) за *основной признакъ* закона большихъ чиселъ

обоснованіе достовѣрности предположенія, что разность $\xi - a$ при большомъ m колеблется въ очень узкихъ предѣлахъ около нуля и стремится къ нулю въ предѣлѣ при возрастаніи m до ∞.

Если примемъ этотъ основной признакъ и будемъ исходить изъ теоремы I, то обобщенный законъ большихъ чиселъ, распространенный на случай смѣси независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ, можемъ продиктовать въ формѣ слѣдующей теоремы:

Теорема II. *Если величину* τ, *указанную въ теоремѣ I, возможно выбрать такъ, чтобы количества* $\tau\sqrt{g(1)}$ *и* $\frac{1}{m\tau^2}$ *были весьма малы и стремились къ нулю при возрастаніи* m *до* ∞, *то вѣроятность* P *того, что абсолютная величина разности* $\xi - a$ *окажется весьма малымъ количествомъ, не превосходящимъ предѣла* $\tau\sqrt{g(1)}$, *будетъ болѣе* $1 - \frac{1}{m\tau^2}$ *и будетъ стремиться къ* 1 (*къ достовѣрности*) *при возрастаніи* m *до* ∞.

Введемъ обозначенія:

$$Q = \sqrt{g(1)} = m^{\sigma}.$$

Порядокъ σ числа Q можетъ градуировать устойчивость средней величины ξ. Изъ разсмотрѣнія неравенствъ (9) и (9′) легко убѣдиться, что условія теоремы II осуществляются, если при всѣхъ значеніяхъ возрастающаго числа m имѣетъ силу неравенство:

$$\sigma < \frac{1}{2}.$$

Въ самомъ дѣлѣ при этомъ можемъ положить:

$$\tau = m^{-\nu},\ \sigma < \nu < \frac{1}{2},$$

и величины $\tau\sqrt{g(1)} = m^{-(\nu-\sigma)}$ и $1 : (m\tau^2) = m^{-(1-2\nu)}$ будутъ стремиться къ нулю при возрастаніи m до ∞. При этомъ устойчивость явленія ξ будетъ высока.

Напротивъ, если при всѣхъ значеніяхъ возрастающаго числа m будетъ имѣть силу неравенство:

$$\sigma \geqq \frac{1}{2},$$

то условія теоремы II опрокинутся, каковой случай, несовмѣстимый съ основнымъ признакомъ закона большихъ чиселъ, назовемъ парадоксальнымъ и при томъ сильнымъ. Устойчивость явленія ξ при этомъ окажется призрачною.

Ультрапарадоксальный случай пусть имѣетъ мѣсто тогда, когда порядокъ σ весьма великъ и стремится къ ∞ при возрастаніи m до ∞. Ультрапарадоксъ *первой* категоріи при этомъ пусть соотвѣтствуетъ предѣльному

равенству $F'(1) = \infty$ при $m = \infty$; ультрапарадоксъ *второй* категоріи пусть соотвѣтствуетъ величинѣ $F'(1)$, не выходящей изъ конечныхъ предѣловъ при возрастаніи m до ∞.

Термины эти аналогичны тѣмъ, кои установлены въ § 23 для парадоксальныхъ надрывовъ въ случаѣ независимыхъ перемѣнныхъ; но при обсужденіи устойчивости итога n зависимыхъ перемѣнныхъ діагнозъ парадоксальныхъ случаевъ имѣетъ нѣкоторыя особенности.

Взаимное отношеніе числовыхъ закономѣрностей для случая зависимыхъ перемѣнныхъ и для случая независимыхъ перемѣнныхъ. Свобода или необходимость?

Тождество (7) упрощаетъ вычисленіе величины $G : m$ или $g(1)$ для независимыхъ перемѣнныхъ и упрощаетъ общій діагнозъ соотвѣтствующихъ парадоксальныхъ случаевъ. Напротивъ, при нарушеніи тождества (7), т. е. для итога зависимыхъ перемѣнныхъ, вычисленіе количествъ G и $g(1)$ осложняется (кромѣ частныхъ, искусственно подобранныхъ простыхъ примѣровъ).

Разсмотримъ форму этого осложненія, употребляя въ дѣло подборъ основныхъ статочностей, коими опредѣляются несовмѣстимыя группы совмѣстимыхъ значеній перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$.

Положимъ, что каждая возможная группа значеній перемѣнныхъ величинъ

$$x, y, z, \ldots, u$$

опредѣляется въ зависимости отъ осуществленія соотвѣтствующей изъ всевозможныхъ несовмѣстимыхъ статочностей $A_1, A_2, \ldots, A_s$; а именно—если возьметъ верхъ статочность A_k, то пусть перемѣнныя $x, y, z, \ldots, u$ принимаютъ соотвѣтственно опредѣленныя значенія:

$$x_k, y_k, z_k, \ldots, u_k.$$

Здѣсь k есть любое изъ чиселъ $1, 2, \ldots, s$, причемъ обозначеніе индексовъ у перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$ теперь другое, нежели въ равенствахъ (6); теперь члены строкъ:

$$\begin{array}{c} x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s \\ y_1, y_2, y_3, \ldots, y_s \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1, u_2, u_3, \ldots, u_s \end{array}$$

записаны не въ порядкѣ своего возрастанія, а по условіямъ статочностей

$$A_1, A_2, \ldots, A_s.$$

Вѣроятности несовмѣстимыхъ статочностей A_1, A_2, ..., A_s пусть соотвѣтственно будутъ:

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_s;$$

будемъ имѣть:

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_s = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

При такихъ условіяхъ математическія ожиданія a_1, a_2, ..., a_m величинъ x, y, ..., u выразятся соотвѣтственно суммами:

$$a_1 = \sum_{k=1}^{k=s} p'_k x_k, \; a_2 = \sum_{k=1}^{k=s} p'_k y_k, \ldots, a_m = \sum_{k=1}^{k=s} p'_k u_k \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Математическія ожиданія b_1, b_2, ..., b_m величинъ x^2, y^2, ..., u^2 будутъ:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{k=s} p'_k x^2{}_k, \; b_2 = \sum_{k=1}^{k=s} p'_k y^2{}_k, \ldots, b_s = \sum_{k=1}^{k=s} p'_k u^2{}_k.$$

Математическое ожиданіе суммы

$$x + y + z + \ldots + u$$

представится суммой:

$$\sum_{k=1}^{k=s} p'_k \; (x_k + y_k + \ldots + u_k).$$

Очевидно, *математическое ожиданіе суммы* $x + y + \ldots + u$ *равно суммѣ математическихъ ожиданій слагаемыхъ* $x, y, \ldots, u$. Поэтому при обозначеніяхъ леммы II будемъ имѣть:

$$n_0 = a_1 + a_2 + \ldots + a_m; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

а при обозначеніяхъ леммы I будемъ имѣть:

$$F'(1) = \Phi'(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Математическое ожиданіе суммы $x^2 + y^2 + \ldots + u^2$ будетъ равно суммѣ $b_1 + b_2 + \ldots + b_m$.

Математическія ожиданія произведеній

$$xy, \; xz, \ldots, \; xu$$

$$yz, \ldots, \; yu$$

. . . .

обозначимъ соотвѣтственно символами:

$$c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{1m}$$

$$c_{23}, \ldots, c_{2m}$$

. . . .

Эти послѣднія числа для зависимыхъ перемѣнныхъ не совпадаютъ съ соотвѣтственными числами:

$$a_1a_2, \; a_1a_3, \ldots, a_1a_m$$

$$a_2a_3, \ldots, a_2a_m$$

. . . . .

каковое совпаденіе обязательно бываетъ въ случаѣ независимости величинъ x, y, ..., u.

Это несовпаденіе означаетъ, что при неполной независимости величинъ x, y, ..., u матем. ожиданіе произведенія не равно произведенію математическихъ ожиданій сомножителей.

Обозначимъ далѣе чрезъ G математическое ожиданіе функціи

$$(x + y + z + \ldots + u - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_m)^2,$$

т. е. положимъ:

$$G = \sum_{k=1}^{k=n} p'_k \; (x_k + \ldots + u_k - a_1 - \ldots - a_m)^2.$$

Представляя квадратъ многочлена какъ сумму, разложенную по извѣстной въ алгебрѣ формулѣ, убѣждаемся, что

$$G = b_1 - a_1{}^2 + b_2 - a_2{}^2 + \ldots + b_m - a^2{}_m + 2K, \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} K = {} & (c_{12} - a_1a_2) + (c_{13} - a_1a_3) + \ldots + (c_{1m} - a_1a_m) \\ & + (c_{23} - a_2a_3) + \ldots + (c_{2m} - a_2a_m) \\ & + \ldots \ldots \ldots \\ & (c_{(m-1)\,m} - a_{m-1}\,a_m) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Вторая часть равенства (16) содержитъ

$$\frac{m \,.\, (m-1)}{2}$$

скобокъ вида $(c_{ki} - a_k a_i)$. Эти скобки при независимости перемѣнныхъ суть нули, а при зависимости онѣ отличаются отъ нулей и осложняютъ формулу G присутствіемъ дополнительнаго члена $2K$. Если при этомъ всѣ скобки $(c_{ki} - a_k a_i)$ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, кромѣ нѣсколь-

кихъ исключеній, то выраженіе $2K:m$ иногда окажется весьма большимъ одного и того же порядка съ числомъ m. Если такъ, то выраженія:

$$g\,(1) \text{ или } \frac{G}{m} \text{ и } \frac{2K}{m}$$

могутъ иногда оказаться весьма значительными при неограниченномъ возрастаніи m, хотя бы количество

$$\{b_1 - a_1^2 + b_2 - a_2^2 + \ldots + b_m - a^2{}_m\} : m$$

сохраняло всегда конечное значеніе; слѣдовательно, получится парадоксальный случай, который не дешево стоитъ выкупить; между тѣмъ какъ при независимыхъ величинахъ x, y, z, ... этого обстоятельства можетъ не случиться, ибо при этомъ K обращается въ нуль.

Примѣры парадоксальныхъ и даже ультрапарадоксальныхъ заданій для случая зависимыхъ перемѣнныхъ извѣстны. Сюда принадлежитъ знаменитый Петербургскій парадоксъ, изслѣдованный Д. Бернулли и приводимый ниже.

При общей сложности явленій діагнозъ устойчивости ихъ итоговъ и, наоборотъ, діагнозъ ея обрыва или наличности парадоксальнаго положенія довершаются съ помощью наблюденія и статистики. Но нужно установить à priori мѣры, понятія, скалы, числовыя нормы и оперативные и матеріальные заклады устойчивости, методологію и классификацію.

Классификація парадоксовъ для случая зависимыхъ перемѣнныхъ представляетъ аналогическую параллель указанной въ § 23 классификаціи, соотвѣтствующей случаю независимыхъ перемѣнныхъ и имѣющей принципіальную важность въ качествѣ основной концепціи теоріи вѣроятностей. Обѣ эти аналогически параллельныя классификаціи даже сливаются (образуютъ *инволюцію*), когда зависимыя послѣдовательныя операціи O'_1, O'_2, ..., O'_m какою-либо реформою преобразуются въ независимыя.

Если учитывать величины зависимости явленій другъ отъ друга съ помощію мѣры δp, указанной въ §§ 7 и 31, то можемъ разсматривать случаи болѣе и менѣе сильной или слабой зависимости перемѣнныхъ другъ отъ друга или отъ данной послѣдовательности испытаній O_1', O_2', ..., O'_m. Всѣ случаи, трактуемые въ теоремахъ I и II, являются промежуточными относительно крайнихъ случаевъ: 1) полной зависимости послѣдовательныхъ испытаній и 2) независимости послѣдовательныхъ испытаній другъ отъ друга и независимости даваемыхъ ими перемѣнныхъ величинъ.

Поэтому въ смѣшанныхъ формулахъ практики и при открытіи эмпирическихъ законовъ естественно брать за точки опоры для мысли два

порядка: съ одной стороны, порядокъ вполнѣ независимыхъ испытаній, дающій въ результатѣ своего дѣйствія независимыя величины и вѣроятности ихъ итога, учитываемые по теоремѣ Чебышева (§ 21) и съ помощію ихъ діаграммы (§ 22), и, съ другой стороны, брать за опорную почву мышленія порядокъ полной (крѣпостной) зависимости (неразрывной причинной связи) послѣдовательныхъ испытаній, опять обусловливающій возможность получать достовѣрность съ помощію полной индукціи. Это—крайніе полюсы кантіанской антиноміи: *свобода* или *необходимость?* Что же касается связи, соотвѣтствующей невполнѣ зависимымъ и невполнѣ независимымъ испытаніямъ, то ее можно обсуждать какъ *равнодѣйствующую* и того, и другого ряда испытаній. Она, какъ въ случаѣ параллелограмма силъ, можетъ быть ближе къ одному порядку и дальше отъ другаго порядка.

Выраженіе закона большихъ чиселъ совершенно преобразуется тогда, когда какою-либо реформою свободныя связи замѣняются связями неразрывными. Тогда послѣ реформы получается процессъ, *твердопредопредѣленный*, какъ движеніе планетъ въ Ньютоніанской механикѣ.

Законъ большихъ чиселъ въ классической формѣ теоремъ Я. Бернулли, Пуассона и Чебышева трактуетъ рядъ или группу *независимыхъ* испытаній O_1, O_2, O_3, ..., приводящихъ соотвѣтственно къ ряду и итогу независимыхъ величинъ x, y, z, ...

Случаи послѣдовательныхъ не вполнѣ независимыхъ испытаній O_1', O_2', O_3', ..., O_m' мыслимы для какого-либо очага дѣятельности лишь при существованіи группы независимыхъ операцій O_1, O_2, O_3, ..., O_s въ другомъ разрѣзѣ той же самой разсматриваемой дѣятельности, — иначе говоря, при наличности въ данномъ очагѣ или кондомніумѣ множественности независимыхъ въ свои моменты (изолированныхъ въ себѣ, неприкосновенныхъ) дѣйствующихъ индивидуальныхъ причинъ.

Невозможно пересказать всѣхъ видовъ нерѣшительной зависимости въ рядахъ послѣдовательныхъ опытовъ. Въ турнирахъ, напримѣръ, шахматной игры мыслимы милліоны способовъ состязанія между двумя сторонами игроковъ; и многіе ходы, ведущіе къ побѣдамъ, совершаются игроками по обстоятельствамъ момента и вдохновенію во время самой игры. То же бываетъ на войнѣ, въ торговой битвѣ, въ судебномъ состязаніи, въ борьбѣ съ природой. Теорія въ подобныхъ случаяхъ можетъ либо съ помощью метода производящихъ функцій трактовать общіе метологическіе вопросы; либо она можетъ ставить такой вопросъ: при какихъ упрощенныхъ заданіяхъ нерѣшительной зависимости явленій въ рядѣ послѣдовательныхъ испытаній O_1', O_2', O_3', ... возможно установить законъ большихъ чиселъ, аналогическій классической его формѣ.

Рѣшеніе второго вопроса разработано съ числовой стороны въ трудахъ

H. Bruns *) и *А. А. Маркова* **); методологическая же ***) общая основная сторона того же вопроса разбирается въ моихъ трудахъ.

§ 27. Изслѣдованіе парадоксовъ первой категоріи. Петербургскій парадоксъ. Нравственное ожиданіе, какъ покровительственная эвристическая таксологическая формула, соотвѣтствующая выходу изъ кризисовъ-парадоксовъ первой категоріи.

I. Изъ числа сильныхъ парадоксовъ, обнаруживающихъ недостатокъ логики A «трехъ законовъ», приведемъ классическій примѣръ, извѣстный подъ именемъ Петербургской задачи или Петербургскаго парадокса. Изслѣдованіе этого вопроса привело къ пересмотру и дополненію эвристическихъ формулъ, рѣшающихъ таксологическую проблему политической экономіи, уже затронутую въ § 19.

Изложимъ эту задачу словами академика *В. Я. Буняковскаго* (см. «Основанія математической теоріи вѣроятностей»), согласуя изложеніе съ вышеуказанными скалярными мѣрами устойчивости.

Эта задача первоначально была предложена *Монморту* ****) *Николаемъ Бернулли*, а *Даніилъ Бернулли*, по ея поводу, предложилъ ввести въ Анализъ Вѣроятностей новую мѣру выгоды, выражаемую нижеуказанною формулою (1). Онъ помѣстилъ свои изслѣдованія по этому предмету въ Запискахъ Петербургской Академіи Наукъ *****), и вотъ вѣроятная причина, по которой упоминаемая задача получила наименованіе *Петербургской*. Вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Два игрока A и B играютъ въ извѣстную игру «орелъ или рѣшетка» *на слѣдующихъ условіяхъ*: *1° игра продолжается до тѣхъ поръ, пока не вскроется орелъ, и 2° игрокъ B платитъ 2 червонца игроку A, если* орелъ *вскроется при первомъ бросаніи монеты, 4 червонца, если при второмъ, 8 червонцевъ, если при третьемъ, и такъ далѣе до m-го бросанія, удваивая платимую сумму при каждомъ бросаніи. Спрашивается, сколько игрокъ A, при вступленіи въ игру, обязанъ заплатить игроку B для обоюдной безобидности.*

Процессъ игры представляетъ связанную цѣпь m испытаній (бросаній монеты), опредѣляющихъ величины $x, y, \ldots, u$, какъ возможныя для игрока A въ соотвѣтственныхъ испытаніяхъ значенія выигрыша. При этомъ величины $x, y, \ldots, u$ будутъ каждая имѣть по два значенія, изъ коихъ одно есть нуль, а другое опредѣляется мѣстомъ испытанія въ ихъ цѣпи; для испытанія, занимающаго въ этой цѣпи мѣсто k, будемъ имѣть:

$$x_k + y_k + \ldots + u_k = n_k = 2^k.$$

Вѣроятность выхода этого именно значенія есть $\frac{1}{2^k}$; женератриса $F(v)$ этой вѣроятности будетъ:

$$F(v) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{2^k} v^{2^k}.$$

Для опредѣленія математической выгоды игрока A замѣчаемъ, что вѣроятности, соотвѣтствующія его выигрышамъ:

$$2, 4, 8, \ldots, 2^m \text{ червонцевъ},$$

изобразятся по порядку дробями

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^m};$$

слѣдовательно, въ силу § 20, математическая выгода n_0 игрока A будетъ:

$$n_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^m \cdot \frac{1}{2^m} = m.$$

Изъ этого оказывается, что A, вступая въ игру, долженъ заплатить m червонецъ игроку B для безобидности игры. Но если не существуетъ никакого условія, ограничивающаго величины числа m, именно, числа бросаній монеты, то и слѣдуетъ положить m безконечнымъ; это самое приводитъ къ заключенію, что для математическаго равенства игры, ставка игрока A, равная n_0 червонцамъ, должна быть безконечно большая. Такое слѣдствіе вычисленія, основаннаго на началѣ математическаго равенства игры, очевидно, прямо противорѣчитъ указаніямъ здраваго разсудка. И дѣйствительно, найдется ли человѣкъ разсудительный, который согласился бы заступить мѣсто игрока A, и рисковалъ въ эту игру, не говоримъ уже сумму безконечную, что невозможно, но даже сумму нѣсколько значительную? Не предпочтетъ ли всякій поставить себя на мѣсто игрока B, довольствуясь при вступленіи въ игру, полученіемъ

---

*) *H. Bruns*: 1) «Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre». Leipzig, 1906; 2) «Das Gruppenschema für rufällige Eregnisse» (Abhandlungen der mathematisch–physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Band XXIX. Leipzig, 1906).

**) *А. А. Марковъ*: 1) Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины, зависящія другъ отъ друга. (Извѣстія Физико-Матем. Общества при Казанск. Университетѣ, 2-я сер., т. XV, № 4. 1907); 2) Изслѣдованіе замѣчательнаго случая зависимыхъ испытаній. (Извѣстія Имп. Академіи Наукъ. 1907); 3) О нѣкоторыхъ случаяхъ теоремы о предѣлѣ вѣроятности. (Извѣстія Имп. Акад. Наукъ. 1908); 4) Распространеніе предѣльныхъ теоремъ исчисленія вѣроятностей на сумму величинъ, связанныхъ въ цѣпь. (Записки Имп. Академіи Наукъ. Томъ XXII, № 9); 5) О связанныхъ величинахъ, не образующихъ настоящей цѣпи. (Извѣстія Имп. Акад. Наукъ за 1911 г. № 3).

***) *П. А. Некрасовъ*: 1) Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности. Москва, 1902. 2) Общій основной методъ производящихъ функцій въ приложеніи къ исчисленію вѣроятностей. (Математ. Сборникъ, т. XXVIII).

****) *Analyse des jeux de hasard*, стр. 402. Задача 5-я.

*****) *Commentarii Academiae Petropolitanae, T. V.*

ставки даже посредственной величины. Откуда же происходитъ такое явное противорѣчіе между началомъ равенства или безобидности для обѣихъ сторонъ и здравымъ понятіемъ объ одномъ и томъ же вопросѣ?

Обсужденіе разсматриваемаго примѣра при помощи женеритрисы $F(v)$ обнаруживаетъ, что

$$g(1) = \frac{1}{m} G = \sum_{k=1}^{k=m} 2^k \cdot \left(1 - \frac{m}{2^k}\right)^2 .$$

Отсюда легко убѣдиться, что величина $g(1)$ весьма велика, а также весьма великъ и числовой порядокъ σ, выводимый изъ уравненія

$$m^\sigma = \sqrt{g(1)}.$$

Слѣдовательно, неустойчивость результата игры будетъ разительная. Чтобы игра имѣла оканчательный результатъ, нужно, разумѣется, весьма большое число m ограничить, фиксировать. При этомъ положеніе игрока B будетъ не лучше положенія A; счастье игрока B въ рядѣ подобныхъ игръ должно сильно колебаться: нынче онъ милліонеръ, а завтра нищій.

Очевидно, въ этомъ примѣрѣ законъ большихъ чиселъ опрокидывается, и имѣетъ мѣсто парадоксальный случай, который по вышеустановленной классификаціи принадлежитъ къ ультрапарадоксамъ первой категоріи. При этомъ таксологическая проблема экономіи, намѣченная въ § 19, для подобныхъ случаевъ должна быть взята подъ сомнѣніе и дополнена.

II. Математики XVIII вѣка старались объяснить этотъ парадоксъ, по скольку онъ встрѣчается въ жизненныхъ испытаніяхъ, связанныхъ съ экономическими кризисами или патологическими состояніями, вызванными недостаткомъ предметовъ удовлетворенія насущныхъ человѣческихъ нуждъ. Для этихъ обстоятельствъ Даніилъ Бернулли принялъ во вниманіе тяготу парадоксальнаго положенія, эксцессы коего опасны для всей среды, и предложилъ вмѣсто обыкновенной таксологической формулы физической выгоды особую *эвритическую* формулу «нравственной выгоды». Въ соотношеніи той и другой формулы ожиданія и взысканія существуетъ *кривизна*, направленная жертвой въ одну сторону и алгебраически подобная относительной кривизнѣ пространствъ Лобачевскаго и Эвклида. Формула нравственной выгоды предполагаетъ систематическія покровительственныя жертвы, необходимыя для жизни цѣлой среды.

Бернулли предполагаетъ, что ожидаемое приращеніе *наличнаго* физическаго имущества x разложено по скалѣ x на дифференціальные элементы, и допускаетъ потомъ, что безконечно малое приращеніе нравственной выгоды, соотвѣтствующее какому ни есть элементу физическаго имущества, прямо пропорціонально абсолютной величинѣ этого элемента, и обратно — первоначальному имуществу, увеличенному суммою всѣхъ

элементовъ предшествовавшихъ тому, который принимается въ соображеніе. На такомъ основаніи, изобразивъ чрезъ dx безконечно малое приращеніе наличнаго физическаго имущества x, а чрезъ dy соотвѣтственное приращеніе нравственной выгоды, будемъ имѣть

$$dy = \frac{k dx}{x},$$

разумѣя подъ k постоянный положительный коеффиціентъ. Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$y = \varphi(x) = k \log x + \log h, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ h изображаетъ постоянное количество, которое опредѣлится по данному на скалѣ y частному значенію величины y, соотвѣтствующей данному же на скалѣ x частному значенію x.

Должно замѣтить, что на основаніи такого опредѣленія, которое безъ сомнѣнія нужно *опытомъ* эвристически приспособить къ дѣйствительности, величины x и y не допускаютъ значеній равныхъ нулю или отрицательныхъ; ибо это противорѣчило бы здравому понятію о вещахъ. Дѣйствительно, если примемъ даже, что существуетъ человѣкъ, въ строгомъ смыслѣ лишенный всякаго имущества, то и ему самое его существованіе доставляетъ уже нѣкоторое нравственное довольство, равное по крайней мѣрѣ цѣнности средствъ, необходимыхъ для поддержанія жизни. Этотъ самый человѣкъ, говоритъ Лапласъ, конечно не согласился бы взять единовременно незначительную сумму, напримѣръ, сто рублей, съ условіемъ, чтобы истративъ ее, рѣшительно отказаться отъ всякихъ средствъ къ пропитанію.

Формула (1) съ ея нижеуказаннымъ обобщеніемъ, выражающая мѣру нравственной выгоды, предложенную Даніиломъ Бернулли, до сихъ поръ допускается почти всѣми математиками. Благодаря приспособляемости неопредѣленныхъ постоянныхъ величинъ k и h, эта формула, въ приложеніяхъ своихъ къ различнымъ вопросамъ изъ Анализа Вѣроятностей, приводитъ къ результатамъ полезнымъ, согласующимся съ указаніями здраваго разсудка. Чтобы показать работу съ помощію этой формулы на примѣрѣ, приложимъ форму Бернулли къ *застрахованіямъ*. Но, прежде, покажемъ какимъ образомъ опредѣляется нравственная выгода лица, ожидающаго нѣсколькихъ событій, съ появленіемъ которыхъ сопряжены для него барыши и убытки.

Пусть будетъ a физическое имущество лица, а $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ожидаемыя имъ приращенія основного капитала a. Тѣ изъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, которыя соотвѣтствуютъ потерямъ, условимся принимать съ отрицательными знаками. Изобразимъ также чрезъ $p, q, r \ldots$ соотвѣтственныя вѣроятности приращеній $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, и положимъ $p + q + r + \ldots = 1$.

По условіямъ вопроса, ожидаемыя или мысленныя имущества лица могутъ быть соотвѣтственно:

$$k\ log\ (a+\alpha)+log\ h,\ k\ log\ (a+\beta)+log\ h,\ k\ log\ (a+\gamma)+log\ .\ h, \ldots$$

Помноживъ эти величины по порядку на p, q, r ..., получимъ частныя нравственныя ожиданія, сумма которыхъ будетъ равна полному нравственному ожиданію. Означивъ это послѣднее чрезъ Y, найдемъ:

$$Y = k\ [p\ log\ (a+\alpha)+q\ log\ (a+\beta)+r\ log\ (a+\gamma)+\ldots]+$$
$$+(p+q+r+\ldots)\ log\ h,$$

или

$$Y = k\ log\ \{(a+\alpha)^p\ (a+\beta)^q\ (a+\gamma)^r\ldots\}+log\ h.$$

Изобразимъ чрезъ X наличное физическое имущество, соотвѣтствующее нравственному Y; будемъ имѣть

$$Y = k\ log\ X+log\ h, \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

и слѣдовательно,

$$X = (a+\alpha)^p\ (a+\beta)^q\ (a+\gamma)^r\ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

Вычтя изъ второй части этого уравненія первоначальное имущество a, получимъ то приращеніе $X-a$ физическаго имущества, непосредственное обладаніе которымъ доставило бы лицу одинаковое нравственное довольство, какъ и надежда получить выгоды α, β, γ ... Изъ сказаннаго же въ § 20 слѣдуетъ, что математическое ожиданіе приращенія физической выгоды, въ разсматриваемомъ случаѣ, выразится суммою

$$p\alpha+q\beta+r\gamma\ldots$$

При отрицательныхъ значеніяхъ нѣкоторыхъ выгодъ α, β, γ ... формула (2) сохраняетъ смыслъ до тѣхъ поръ, пока $a+\alpha>0$, $a+\beta>0$, $a+\gamma>0, \ldots$

Изъ формулы (2′) можно извлечь примѣчательныя слѣдствія, относящіяся къ невыгодѣ игоръ, лотерей, закладовъ и другихъ оборотовъ, зависящихъ отъ случайностей и предполагаемыхъ математически равными. Также, можно доказать, что менѣе невыгодно подвергать имущество свое по частямъ такимъ опасностямъ, которыя не зависятъ однѣ отъ другихъ, чѣмъ въ цѣлости одной опасности. Изъ той же формулы легко заключить объ обоюдной выгодѣ застрахованій, при извѣстной, опредѣленной вычисленіемъ преміи. Предложимъ здѣсь доказательство послѣдней истины.

Для большей ясности положимъ, что лицо A застраховываетъ отъ какой либо опасности, какъ-то отъ огня, града, кораблекрушенія и т. п. часть α полнаго своего имущества, которое изобразимъ $1+\alpha$. Пусть будетъ p вѣроятность, что α уцѣлѣетъ отъ опасности, и слѣдовательно, $1-p$ вѣроятность утраты α. Для математическаго равенства застрахованія, A долженъ заплатить Обществу премію, равную $(1-p)\ \alpha$. Теперь мы покажемъ, что заплативъ даже болѣе $(1-p)\ \alpha$, A можетъ еще имѣть выгоду нравственную, между тѣмъ какъ Страховое Общество получитъ тѣмъ болѣе вѣрную прибыль, чѣмъ кругъ его дѣйствій будетъ обширнѣе. Для этого замѣтимъ, что сумма

$$p\ [k\ log\ (1+\alpha)+log\ h]+(1-p)\ [k\ log\ 1+log\ h]=$$
$$=pk\ log\ (1+\alpha)+log\ h$$

изобразитъ нравственное ожиданіе лица A до застрахованія части α, а выраженіе

$$k\ log\ (1+p\alpha)+log\ h$$

опредѣлитъ его нравственную выгоду въ случаѣ застрахованія. Но ясно, что

$$k\ log\ (1+p\alpha)+log\ h>pk\ log\ (1+\alpha)+log\ h,$$

ибо, по сокращеніи, получимъ неравенство

$$log\ (1+p\alpha)>p\ log\ (1+\alpha),$$

которое дѣлается очевиднымъ, если изобразимъ его въ видѣ

$$\int_0^a \frac{pd\alpha}{1+p\alpha} > \int_0^a \frac{pd\alpha}{1+\alpha};$$

и въ самомъ дѣлѣ каждое изъ значеній дроби $\frac{p}{1+p\alpha}$ будетъ болѣе соотвѣтственныхъ значеній другой дроби $\frac{p}{1+\alpha}$, по причинѣ $1+\alpha>1+p\alpha$; слѣдовательно, и значеніе самаго интеграла $\int_0^a \frac{pd\alpha}{1+p\alpha}$, какъ состоящаго изъ элементовъ большихъ нежели въ интегралѣ $\int_0^\alpha \frac{pd\alpha}{1+\alpha}$, превзойдетъ величину сего послѣдняго. Отсюда заключаемъ, что отдаваніе на страхъ по преміи, опредѣляемой правиломъ математическаго равенства игры, выгодно для застрахователя, потому что оно увеличиваетъ его нравственное ожиданіе. Посмотримъ еще, сколько застрахователь, сверхъ безобидной преміи $(1-p)\ \alpha$, можетъ заплатить Страховому Обществу при условіи, чтобъ застрахованіе не уменьшило и не увеличило нравственной его выгоды. Изобразимъ чрезъ z этотъ избытокъ. Въ такомъ случаѣ, первое изъ двухъ выраженій

$$kp\ log\ (1+\alpha)+log\ h \quad \text{и} \quad k\ log\ (1-z+p\alpha)+log\ h$$

изобразитъ нравственное ожиданіе лица A до застрахованія части α полнаго имущества $1+\alpha$, а второе, напротивъ того, когда застрахуетъ α, заплативъ премію, равную $(1-p)\ \alpha+z$. Чтобы нравственная выгода

лица A не измѣнилась чрезъ отдаваніе на страхъ, предыдущія два выраженія должны быть равны между собою. Отсюда

$$p\ log\ (1+\alpha) = log\ (1-z+p\alpha),$$

или

$$z = 1+p\alpha-(1+\alpha)^p.$$

Вотъ предѣлъ прибавочной преміи къ той, которая опредѣляется безобидностью математическою. Если прибавочная премія, платимая Страховому Обществу, то есть величина z, будетъ менѣе найденнаго количества $1+p\alpha-(1+\alpha)^p$, то, при многочисленныхъ оборотахъ, Общество будетъ имѣть вѣрные барыши, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, застрахователи выиграютъ со стороны нравственной выгоды. Эта истина обнаруживаетъ несомнѣнную пользу Страховыхъ Учрежденій.

III. Обобщеніемъ эвристической формулы Д. Бернулли можно пользоваться въ раскладкѣ тягости парадоксальнаго положенія какъ наиболѣе гибкою эвристическою формулою, приспособляемою къ общему режиму и къ природѣ взыскиваемаго или, наоборотъ, выпускаемаго на рискъ физическаго имущества. Такъ поступаетъ, напримѣръ, Курно, опредѣляющій цѣну *наличной* единицы товара въ зависимости отъ общаго количества выпускаемой на рынокъ товарной массы, предполагая то режимъ монополіи ея сбыта, то режимъ свободной конкурренціи ея производства и сбыта *).

Приведемъ опять изъ книги В. Я. Буняковскаго извлеченіе, относящееся къ обобщенію формулы Д. Бернулли.

Условимся принимать за мѣру нравственной выгоды произвольную функцію φ физическаго имущества x, ограничивая произвольность этой функціи $\varphi\ (x)$ тремя только условіями: 1°, чтобы эта функція $\varphi\ (x)$ была непрерывна между предѣлами, заключающими разсматриваемыя значенія физическаго имущества x; 2°, чтобы между тѣми же предѣлами, съ возрастаніемъ физическаго имущества x, нравственная выгода $\varphi\ (x)$ также получала приращеніе, и 3°, чтобы это приращеніе уменьшалось по мѣрѣ увеличенія физическаго имущества. Весьма естественно допустить непрерывность функціи $\varphi\ (x)$, когда примемъ въ соображеніе, что въ мірѣ нравственномъ, какъ и въ физическомъ, многое возможно подчинять закону постепенности. Что же касается до остальныхъ двухъ условій, то они согласуются съ обыденными понятіями объ разсматриваемомъ предметѣ, и подтверждаются ежедневнымъ опытомъ. Весьма простой примѣръ объяснитъ это съ возможною очевидностью. Положимъ, что человѣкъ, имущество котораго можетъ быть оцѣнено въ 10.000 руб., пріобрѣтаетъ сверхъ того одну тысячу; нѣтъ сомнѣнія, что нравственная его выгода увеличится чрезъ это пріобрѣтеніе. Но если, впослѣдствіи, состояніе

*) *H. Laurent:* Stat. Mathém. *П. А. Некрасовъ*: Матем. статист.

этого самого человѣка сдѣлается значительнѣе, и будетъ, напримѣръ, простираться до 100.000 руб., то вторичное пріобрѣтеніе одной тысячи хотя и увеличитъ его нравственное довольство, но уже не въ той степени какъ въ первый разъ, когда все имущество его состояло только изъ 10.000 руб.

На такомъ основаніи легко видѣть, что первая производная $\varphi'\ (x)$ нравственнаго ожиданія $\varphi\ (x)$ будетъ величина положительная, а вторая, $\varphi''\ (x)$, величина отрицательная. Дѣйствительно, означивъ чрезъ h приращеніе физическаго имущества x, получимъ, въ силу второго изъ приведенныхъ выше условій,

$$\varphi\ (x+h) > \varphi\ (x).$$

Но, по извѣстной теоремѣ,

$$\varphi\ (x+h) = \varphi\ (x) + h\varphi'\ (x+\lambda h),$$

гдѣ $\lambda > 0$ и < 1; слѣдовательно,

$$\varphi\ (x) + h\varphi'\ (x+\lambda h) > \varphi\ (x)$$

или

$$\varphi'\ (x+\lambda h) > 0.$$

Такъ какъ приращеніе h можетъ быть уменьшено по произволу, то найдется $\varphi'\ (x) > 0$. Съ другой стороны, написавъ вмѣсто $\varphi\ (x+h)$ разложеніе

$$\varphi\ (x) + h\varphi'\ (x) + \frac{h^2}{1\ .\ 2}\varphi''\ (x+\theta h),$$

гдѣ $\theta > 0$ и < 1, замѣчаемъ, что увеличеніе нравственной выгоды, соотвѣтствующее приращенію h физическаго имущества, будетъ

$$h\varphi'\ (x) + \frac{h^2}{1\ .\ 2}\varphi''\ (x+\theta h).$$

Но мы сказали, что это увеличеніе дѣлается менѣе и менѣе по мѣрѣ возрастанія имущества x; слѣдовательно, предыдущая сумма должна уменьшаться съ увеличеніемъ приращенія h, а для этого необходимо чтобы второй членъ $\frac{h^2}{1.2}\varphi''\ (x+\theta h)$ былъ отрицательный, ибо первый, именно $h\varphi'\ (x)$, какъ доказано выше, есть величина положительная. Поэтому $\frac{h^2}{1.2}\varphi''\ (x+\theta h) < 0$, или $\varphi''\ (x+\theta h) < 0$. Но уже замѣчено, что h есть количество, которое можно уменьшать по произволу; слѣдовательно $\varphi''\ (x) < 0$.

Итакъ, единственныя условія, которымъ подчинена разсматриваемая нами непрерывная функція $\varphi\ (x)$, изображающая мѣру нравственной выгоды, соотвѣтствующей физическому имуществу x, заключается въ томъ, чтобы $\varphi'\ (x) > 0$, а $\varphi''\ (x) < 0$. Эти два условія суть строгія математическія слѣдствія указанія здраваго разсудка.

Легко видѣть, что функція $k \log x + \log h$, принятая Даніиломъ Бернулли, удовлетворяетъ предписаннымъ выше требованіямъ. Дѣйствительно, первая ея производная $\frac{k}{x}$ есть величина положительная, а вторая, $-\frac{k}{x^2}$, величина отрицательная; сверхъ того, функція $k\, lxg\, x + \log h$ непрерывна для всѣхъ положительныхъ значеній физическаго имущества x.

Покажемъ теперь какимъ образомъ, несмотря на неопредѣленность функціи φ, можно, основываясь на ея свойствахъ, вывести разныя примѣчательныя истины. Такъ, напримѣръ, легко доказать, что всякія игры и заклады, даже при математическомъ ихъ равенствѣ, невыгодны для игроковъ въ томъ отношеніи, что уменьшаютъ нравственную ихъ выгоду.

Дѣйствительно, положимъ, что игрокъ или закладчикъ, имущество котораго изобразимъ чрезъ $a + x$, рискуетъ сумму x противъ ожидаемаго имъ выигрыша y. Пусть будетъ p вѣроятность выигрыша, и слѣдовательно, $1 - p = q$ вѣроятность проигрыша. Нравственная выгода игрока, передъ началомъ игры или заклада, будетъ $\varphi(a + x)$; если же онъ станетъ играть или держать закладъ, то эта выгода выразится очевидно, суммою

$$p\varphi(a + x + y) + q\varphi(a).$$

Написавъ $\varphi(a)$ въ видѣ $\varphi(a + x - x)$ и разложивъ двѣ функціи

$$\varphi(a + x + y) \text{ и } \varphi(a + x - x),$$

получимъ:

$$p\varphi(a + x + y) + q\varphi(a) = p\left[\varphi(a + x) + y\varphi'(a + x) + \right.$$

$$\left. + \frac{y^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a + x + \lambda y)\right] + q\left[\varphi(a + x) - x\varphi'(a + x) + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a + x - \lambda' x)\right] = (p + q)\,\varphi(a + x) + (py - qx)\,\varphi'(a + x) +$$

$$+ \frac{py^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a + x + \lambda y) + \frac{qx^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a + x - \lambda' x),$$

разумѣя подъ λ и λ' правильныя положительныя дроби. Но $p + q = 1$ и сверхъ того предполагается, что игра для сторонъ математически равна, то есть что $py = qx$. Вслѣдствіе этихъ двухъ условій предыдущее выраженіе приметъ видъ:

$$\varphi(a + x) + \frac{py^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a + x + \lambda y) + \frac{qx^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a + x - \lambda' x).$$

Такъ какъ послѣдніе два члена этой формулы, по причинѣ заключающихся въ нихъ вторыхъ производныхъ функцій φ'', суть величины отрицательныя, то сумма трехъ членовъ будетъ менѣе перваго $\varphi(a + x)$, изображающаго нравственную выгоду игрока передъ началомъ игры. Но

изъ того, что нравственное ожиданіе человѣка, обладающаго какимъ ни есть имуществомъ, уменьшается, когда онъ вступаетъ въ игру или держитъ закладъ, должно естественно заключить, что игра или заклады *вообще невыгодны*.

Подобнымъ образомъ можно доказать невыгоду лотерей при совершенной ихъ равноправности. Пусть будетъ $a + x$ имущество какого либо лица; $\varphi(a + x)$ изобразитъ его нравственную выгоду. Положимъ, что этотъ человѣкъ беретъ билетъ на лотерею, и платитъ за него сумму x. Означимъ чрезъ y ту сумму, которую онъ надѣется выиграть, а чрезъ p вѣроятность этого выигрыша. Очевидно, что y будетъ болѣе x, а условіе математическаго равенства или безобидности лотереи (см. § 20) выразится уравненіемъ $x = py$.

Пока не взятъ билетъ, нравственная выгода человѣка, о которомъ говоримъ, есть $\varphi(a + x)$; когда же онъ возьметъ билетъ, заплативъ за него сумму x, то нравственное ожиданіе выразится или чрезъ $\varphi(a)$, или чрезъ $\varphi(a + y)$, смотря по тому, окажется ли билетъ невыигрышнымъ, или выиграетъ ожидаемую сумму y. Вѣроятность перваго предположенія есть $1 - p = q$, а второго p. Слѣдовательно, нравственная выгода лица взявшаго уже билетъ, будетъ

$$q\varphi(a) + p\varphi(a + y) = q\varphi(a) + p\varphi(a) + p\left[\varphi(a + y) - \varphi(a)\right],$$

и какъ $p + q = 1$, то это выраженіе приметъ видъ

$$\varphi(a) + p\left[\varphi(a + y) - \varphi(a)\right].$$

Теперь надобно доказать, что

$$\varphi(a) + p\left[\varphi(a + y) - \varphi(a)\right] < \varphi(a + x);$$

для этого вычтемъ сперва $\varphi(a)$ изъ обѣихъ частей неравенства, и замѣнивъ x произведеніемъ py, получимъ

$$p\left[\varphi(a + y) - \varphi(a)\right] < \varphi(a + py) - \varphi(a).$$

Но легко видѣть, что

$$p\left[\varphi(a + y) - \varphi(a)\right] = p\int_0^y \varphi'(a + z)\,dz$$

и

$$\varphi(a + py) - \varphi(a) = p\int_0^y \varphi'(a + pz)\,dz,$$

вслѣдствіе чего предыдущее неравенство приведется къ виду

$$\int_0^y \varphi'(a + z)\,dz < \int_0^y \varphi'(a + pz)\,dz.$$

Въ справедливости этого условія весьма легко удостовѣриться: и дѣй-

ствительно, такъ какъ предѣлы интегралов одинаковы, то стоитъ только доказать, что

$$\varphi'(a+pz) > \varphi'(a+z),$$

а это, очевидно, слѣдуетъ изъ свойства функціи φ, производная которой, какъ мы видѣли выше, уменьшается съ увеличеніемъ перемѣннаго количества. Слѣдовательно, по причинѣ

$$p<1, \text{ будетъ } \varphi'(a+z) < \varphi'(a+pz).$$

Итакъ, взявшій билетъ на лотерею, тѣмъ самымъ уменьшаетъ свое нравственное ожиданіе, изъ чего должно заключить о невыгодѣ этого рода оборотовъ.

Для послѣдняго приложенія докажемъ аналитически еще одну истину изъ общежитія, справедливость которой подтверждается общимъ мнѣніемъ. Эта истина состоитъ въ томъ, что когда предстоитъ надобность подвергать свое имущество какимъ-либо опасностямъ, то выгоднѣе раздроблять его на части, чѣмъ въ цѣлости подвергать одной случайности. Итакъ, когда купецъ не застраховываетъ своихъ товаровъ, то долженъ стараться отправлять ихъ не на одномъ, а на нѣсколькихъ корабляхъ. Равнымъ образомъ, человѣкъ, желающій отдать въ ростъ свой капиталъ, долженъ, для большей безопасности, отдавать его въ разныя руки, а не въ однѣ, если только ни одинъ изъ заемщиковъ не заслуживаетъ, по надежности своей, особеннаго довѣрія передъ другими.

Для большей ясности, положимъ, что разсматривается тотъ случай, когда купецъ отправляетъ моремъ какую-нибудь часть своего имущества. Спрашивается, что будетъ выгоднѣе, отправить эту часть на одномъ кораблѣ, или на нѣсколькихъ, напримѣръ, на двухъ, для упрощенія доказательства.

Положимъ сперва, что купецъ, обладающій имуществомъ $a+2x$, отправляетъ на одномъ кораблѣ $2x$ своего имущества. Пусть будетъ q вѣроятность, что корабль погибнетъ; $1-q=p$ изобразитъ вѣроятность, что корабль достигнетъ мѣста назначенія. Слѣдовательно, нравственная выгода купца будетъ въ этомъ случаѣ

$$p\varphi(a+2x)+q\varphi(a).$$

Но ежели купецъ отправитъ часть $2x$ своего имущества на двухъ корабляхъ по-ровну, то его нравственная выгода будетъ

$$p^2\varphi(a+2x)+2pq\varphi(a+x)+q^2\varphi(a).$$

Дѣйствительно, въ разсматриваемомъ случаѣ можно сдѣлать слѣдующія четыре предположенія: 1) Оба корабля, которые назовемъ буквами A и B, достигнутъ мѣста назначенія. 2) Корабль A достигнетъ, а B погибнетъ. 3) Корабль B достигнетъ, а A погибнетъ. 4) Оба корабля погибнутъ. Вѣроятность перваго предположенія есть p^2, и слѣдовательно, соотвѣтствующая нравственная выгода равна $p^2\varphi(a+2x)$; вѣроятность второго изобразится чрезъ pq, а нравственная выгода чрезъ $pq\varphi(a+x)$; то же самое найдется и въ третьемъ предположеніи. Наконецъ, вѣроятность четвертаго предположенія есть q^2, а нравственная выгода, соотвѣтствующая этому случаю, $q^2\varphi(a)$. Сумма найденныхъ четырехъ выраженій, какъ сказано выше, будетъ

$$p^3\varphi(a+2x)+2pq\varphi(a+x)+q^2\varphi(a).$$

Легко доказать, что эта сумма болѣе суммы $p\varphi(a+2x)+q\varphi(a)$, которая соотвѣтствуетъ предположенію, что имущество $2x$ отправляютъ на одномъ кораблѣ. Дѣйствительно, такъ какъ $p+q=1$, то и найдемъ послѣдовательно:

$$p\varphi(a+2x)+q\varphi(a) = (p+q)\,[p\varphi(a+2x)+q\varphi(a)] =$$
$$= p^2\varphi(a+2x)+pq\varphi(a+2x)+pq\varphi(a)+q^2\varphi(a).$$

Уничтожимъ члены $p^2\varphi(a+2x)$ и $q^2\varphi(a)$, общіе выраженіямъ нравственной выгоды въ обоихъ случаяхъ; для доказательства истины, о которой говоримъ, останется только показать, что

$$2pq\varphi(a+x) \geq pq\varphi(a+2x)+pq\varphi(a),$$

или

$$\varphi(a+x)-\varphi(a) > \varphi(a+2x)-\varphi(a+x).$$

Справедливость этого неравенства очевидна, и слѣдуетъ изъ извѣстнаго свойства функціи φ, по которому она увеличивается менѣе и менѣе по мѣрѣ возрастанія перемѣнной величины.

Кривизна покровительственной таксологической формулы. Субъективные потенціалы пользъ. Условность и гипотетичность закона Рикардо. Объективный потенціалъ пользъ, правящій интересы.

I. Нравственно-общественное значеніе основной оцѣночной задачи видно изъ сопостановленія діаграммъ цѣнъ ржи и числа кражъ; рисунокъ параллели цѣнъ и кражъ былъ приведенъ въ части I, § 19. При развитіи гнетущихъ кризисовъ покровительство наиболѣе угнетенной сторонѣ есть задача, стоющая систематическихъ заботъ правительства.

Полезно примѣтить, что эвристическія мѣры физической выгоды относятся къ эвристическимъ же мѣрамъ нравственной выгоды такъ, какъ мѣры длины Эвклидовой геометріи относятся къ мѣрамъ длины геометріи Лобачевскаго, истолкованной по способу Кели (см. мою книгу «Приложеніе алгебры къ геометріи», изд. 2-е).

Иначе говоря, аксіомы порядка математической выгоды и аксіомы порядка нравственной выгоды *одинаковы при малыхъ колебаніяхъ имущества*, ибо отношенія другъ къ другу двухъ соотв. малыхъ приращеній имущества для того и для другого порядка исчисленія выражаются постояннымъ количествомъ, какъ видно изъ формулъ (2) и (2′); количество k, какъ скалярная величина, аналогично кривизнѣ неэвклидовскаго пространства и можетъ быть названо кривизною покровительственной таксологической формулы. При значительномъ же приращеніи имущества аксіомы того и другого порядка учетовъ существенно расходятся.

Тутъ играетъ роль и субъективность взгляда на малость и значительность колебанія *наличнаго* имущества: что богатому наличными благами обществу кажется ничтожнымъ, то бѣдняку кажется значительнымъ. Лепта вдовы цѣнится дороже большой жертвы купца.

II. При изобиліи на рынкахъ наличнаго блага x, приращаемая къ нему новая физическая единица $\mathfrak{a}$ стоитъ сравнительно (по чувству пользы) дешево; при недостаточномъ же наличномъ количествѣ блага x на рынкахъ ожидаемая физическая единица $\mathfrak{a}$ цѣнится по чувству пользы дороже. Поэтому функція $\varphi(x)$ Д. Бернулли, какъ и ея вышеприведенное обобщеніе, могутъ быть приспособлены по своимъ свойствамъ къ элементарнымъ понятіямъ и вопросамъ таксологической проблемы, подгоняя форму $\varphi(x)$ и финансовую цѣну ω_x единицы $\mathfrak{a}$ блага x (съ помощію статистики и интерполированія) къ тому, чтобы приблизительно имѣло силу дифференціальное уравненіе:

$$\varphi(x) - \varphi(x - \mathfrak{a}) = \lambda\omega_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

При малости выбранной единицы $\mathfrak{a}$ можемъ замѣнить это уравненіе слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \lambda\omega_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

Отсюда и изъ установленныхъ свойствъ функціи $\varphi(x)$ видно, что цѣна ω_x единицы $\mathfrak{a}$ будетъ убывать (какъ слѣдуетъ и по чувству относительной полезности) при возрастаніи наличнаго блага x.

Наличность, конечно, измѣряется суммарнымъ запасомъ блага x на весь предстоящій потребительскій интервалъ времени τ, называемый иногда *продовольственной компаніей*.

Таксологическія уравненія въ политической экономикѣ распространяются на совокупности какъ движимыхъ капиталовъ разнаго рода x, такъ и труда y, оплачиваемаго какъ экономическая цѣнность, приходо-расходная біологически и въ смыслѣ переселеній (см. часть I, §§ 10—11).

Лоранъ *) вмѣстѣ съ Парето разсматриваетъ эвристическую формулу

*) *H. Laurent*: Statistique mathém., стр. 176—181.

$V = f(x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots)$ экономическихъ цѣнностей двухъ родовъ: 1) въ видѣ производящихъ силъ $y_1, y_2, \ldots$ и 2) въ видѣ производныхъ благъ $x_1, x_2, \ldots$, выбранную à priori такъ, чтобы имѣли силу уравненія:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \lambda\omega_{x_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \lambda\omega_{x_2}, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = \lambda\omega_{y_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \lambda\omega_{y_2}, \ldots, \quad \ldots \quad (4)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффиціентъ.

Назовемъ эту функцію V потенціаломъ пользъ; Парето называетъ эту функцію непереводимымъ словомъ «l' ophélimité», считая ее *субъективною* мѣрою разсматриваемаго хозяйствующаго индивидуума, ведущаго торговлю экономическими благами.

Максимумъ функціи V, взятый при условіяхъ, ограничивающихъ торговый обмѣнъ благъ въ каждый короткій срокъ продовольствія ихъ *матеріальною наличностью*, опредѣляетъ съ помощію уравненій (4) всѣ цѣны по закону, извѣстному подъ именемъ закона Рикардо: *если осуществляется максимумъ потенціала пользъ, то стоимости производства благъ бываютъ равны цѣнѣ услугъ, предложенныхъ и употребленныхъ.*

Этотъ законъ однакоже содержитъ неустойчивое условіе относительно наличности. Онъ не учитываетъ хитроумной міровой спекуляціи, вмѣшивающей въ оборотъ подъ именемъ матеріальной наличности бумагу и другіе иногда вовсе ненужные фокусы биржи и торговли, спускаемые подъ именемъ полезныхъ услугъ, предложенныхъ и употребленныхъ. Поэтому законъ Рикардо и соотвѣтствующая ему соціальная механика, содержа не всегда вѣрную гипотезу, требуютъ постоянной и значительной опытной объективной таксологической поправки и введенія съ этой цѣлью графической скалы вѣроятностей и частостей для индуктивной повѣрки. И въ самомъ дѣлѣ обиженныя стороны апеллируютъ къ провомѣрію посредствомъ вмѣшательства третейскаго суда и государственной власти.

Связывая потенціалъ пользъ V съ правопорядкомъ цѣлаго государства, съ его резервомъ S и съ его освѣдомленностью во всѣхъ областяхъ, мы можемъ дать этому потенціалу уже не субъективный, а объективный смыслъ, правящій движеніе цѣнности и колесо исторіи противъ власти злого рока и привязывающій достовѣрныя сужденія эвритическимъ методомъ къ закону большихъ чиселъ и къ графическимъ закономѣрностямъ.

Если въ короткій срокъ считать коэффиціентъ λ постояннымъ, то можемъ потенціалъ V составить изъ функцій $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2), \ldots, f_1(y_1)$, $f_2(y_2)\ldots$, удовлетворяющихъ уравненіямъ типа (3′); а затѣмъ, ища максимумъ V, можемъ, при гарантіяхъ со стороны наличности S у объективнаго правомѣрія, рѣшить важнѣйшія проблемы политической экономіи въ духѣ системы, покровительственной культурѣ земли, труду

и укрѣпленію достаточнаго жизненнаго основанія для всѣхъ трудящихся классовъ даннаго государства (см. мою книгу: «Математическая статистика», гл. VI—VII).

§ 28. Примѣры парадоксовъ второй категоріи. Катаклизмы.

Математическія ожиданія a_1, a_2, a_3, ..., a_m перемѣнныхъ x, y, z, ..., u и итогъ n_0 этихъ ожиданій могутъ быть конечными; но величина g (1), т. е. математическое ожиданіе количества $\frac{1}{m}(x+y+\ldots u-n_0)^2$, можетъ стремиться къ безконечности и опрокидывать основной признакъ закона большихъ чиселъ. Парадоксы этой категоріи заслуживаютъ вниманія.

Разсмотримъ простѣйшій примѣръ этого рода, видоизмѣняя Петербургскую задачу.

Два игрока A и B играютъ въ игру «орелъ или рѣшетка» на слѣдующихъ условіяхъ: 1° игра продолжается до тѣхъ поръ, пока не вскроется орелъ, и 2° игрокъ B платитъ $\frac{2}{1^r}$ *червонцевъ игроку A, если орелъ вскроется при первомъ бросаніи монеты,* $\frac{4}{2^r}$ *червонцевъ, если при второмъ,* $\frac{8}{3^r}$ *червонцевъ, если при третьемъ, и такъ далѣе до m-го бросанія включительно. Спрашивается, сколько игрокъ A, при вступленіи въ игру, обязанъ заплатить игроку B для обоюдной безобидности.*

Для опредѣленія математической выгоды n_0 игрока A замѣчаемъ, что его вѣроятные выигрыши будутъ представлять значенія:

$$\frac{2}{1^r}, \frac{4}{2^r}, \frac{8}{3^r}, \ldots, \frac{2^m}{m^r},$$

коимъ соотвѣтствуютъ вѣроятности:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^m};$$

слѣдовательно, математическое ожиданіе n_0 (выгода) игрока A представляется такъ:

$$n_0 = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots + \frac{1}{m^r},$$

причемъ n_0 будетъ при безконечномъ m или безконечностью, или конечнымъ числомъ, смотря по тому, будетъ ли $r \leqq 1$ или же $r > 1$.

Пусть $r > 1$. При этомъ условіи величина n_0 будетъ конечною.

Чтобы діагнозъ этого случая былъ правильнымъ, нужно опредѣлить женератрису $F(v)$ и величину g (1) соотвѣтственно даннымъ условіямъ игры. Процессъ этой игры представляетъ цѣпь m испытаній (бросаній монеты), опредѣляющихъ перемѣнныя величины x, y, ..., u, какъ возможныя въ соотвѣтственныхъ испытаніяхъ значенія выигрыша игрока A. При этомъ каждая изъ величинъ x, y, ..., u имѣетъ два значенія,

изъ коихъ одно есть нуль, а другое отличное отъ нуля, опредѣляется мѣстомъ испытанія въ данной цѣпи; для испытанія, занимающаго въ этой цѣпи мѣсто k, итогъ n_k перемѣнныхъ, по условію игры, будетъ:

$$n_k = x_k + y_k + \ldots + u_k = 2^k : k^r.$$

Вѣроятность выхода этого значенія итога n есть $\frac{1}{2^k}$.

Слѣдовательно

$$F(v) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{2^k} v^{2^k : k^r}$$

Отсюда

$$g(1) = \frac{1}{m} G = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{k=m} 2^k \left\{ \frac{1}{k^r} - \frac{n_0}{2^k} \right\}.$$

Это равенство даетъ возможность убѣдиться, что числовой порядокъ σ, выведенный изъ уравненія $m^\sigma = \sqrt{g(1)}$, весьма великъ и стремится къ безконечности при неограниченномъ возрастаніи m. Въ данномъ примѣрѣ, слѣдовательно, законъ большихъ чиселъ опрокидывается,—и имѣетъ силу ультра—парадоксальный случай второй категоріи.

Банкиръ B, поддерживающій подобныя игры, находится въ сомнительномъ положеніи, какъ и банкиръ B Петербургской задачи. Но его партнеръ A чувствуетъ себя спокойно, что немыслимо при условіяхъ Петербургской задачи.

Вообще въ тѣхъ случаяхъ, когда количество g (1) велико и $\sigma > \frac{1}{2}$, резервы прочности положенія банка должны бы быть необъятны; т. е. банкъ въ подобныхъ условіяхъ самъ не имѣетъ подъ собою надежной почвы и не можетъ охранять ни своихъ, ни общественныхъ интересовъ.

Вотъ почему необходимы: 1) научная постановка дѣла оцѣнки, 2) аналитическій методъ раскладки функцій на мелкія операціи и 3) аналитическій діагнозъ, о которомъ рѣчь была въ § 23. Крупныя операціи имѣютъ *корни* въ мелкихъ операціяхъ; верхушка безъ корней слабо приростаетъ къ почвѣ.

Біологическіе резервы даннаго царства живой природы могутъ оказаться въ подобномъ парадоксальномъ положеніи, и тогда выморочный процессъ можетъ истребить данную породу безъ остатка.

Возможность катаклизмовъ, непобѣдимыхъ обыкновенными (нефорсмажерными) резервами, разрушаетъ оптимизмъ историковъ, политиковъ и статистиковъ, слѣпо вѣрящихъ въ устойчивость итоговъ массовыхъ явленій. Дѣйствительная побѣда надъ неблагопріятнымъ положеніемъ если и возможна, то при весьма осмотрительномъ сосредоточеніи резервовъ, либо при рѣшительномъ сопротивленіи причинамъ парадоксальнаго положенія въ его мелкихъ корняхъ, куда надо систематически вводить соотвѣтственныя органическія гарантіи, сообразуясь съ цѣлями исторіи.

§ 29. Изслѣдованіе еще одного замѣчательнаго класса зависимыхъ испытаній, обнаруживающаго на своей границѣ изъянъ логическаго закона противорѣчія.

Обобщая теорему Я. Бернулли, А. А. Марковъ разсматриваетъ вопросъ о числѣ появленій нѣкотораго событія E при извѣстномъ числѣ послѣдовательныхъ испытаній, связанныхъ между собою такимъ образомъ, что выполняются слѣдующія условія:

1) вѣроятность событія E при каждомъ изъ этихъ испытаній O'_1, O'_2, O'_3, ... имѣетъ одну и ту же величину p, пока всѣ испытанія еще стоятъ впереди и результаты ихъ остаются всѣ вообще неопредѣленными;

2) вѣроятность E при каждомъ испытаніи O'_k имѣетъ вторую опредѣленную величину p_1, если результаты послѣдующихъ испытаній O'_{k+1}, O'_{k+2}, ... еще не наступили и остаются неизвѣстными, а непосредственно предшествующее испытаніе O'_{k-1} привело къ событію E, каковы бы ни были результаты прочихъ испытаній;

3) наконецъ, вѣроятность событія E при каждомъ испытаніи O'_k имѣетъ третью величину p_2, если результаты послѣдующихъ испытаній не наступили и остаются неопредѣленными, а непосредственно предшествующее испытаніе O'_{k-1} привело къ событію не—E или F.

Какъ видно изъ этихъ предположеній, каждое испытаніе связано въ цѣпь съ непосредственно предшествующимъ ему испытаніемъ и оказывается независимымъ отъ остальныхъ предшествующихъ ему испытаній, коль скоро извѣстенъ результатъ непосредственно предшествующаго испытанія.

Для краткости введемъ обозначенія:

$$q = 1 - p,\ q_1 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - p_2. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Разсматриваемый рядъ испытаній совпалъ бы съ рядомъ испытаній теоремы Я. Бернулли, если бы величины p_1 и p_2 совпали съ p.

Относительно чиселъ p_1, p_2, p важно замѣтить, что только два изъ нихъ можно задавать произвольно, а не всѣ три, такъ какъ они связаны соотношеніемъ

$$p = p \cdot p_1 + q \cdot p_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

получаемымъ по теоремѣ о полныхъ вѣроятностяхъ. Если будемъ задавать произвольно величины p и

$$\delta = p_1 - p_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

то для опредѣленія остальныхъ величинъ будемъ имѣть простыя формулы:

$$\left.\begin{array}{l} q = 1 - p,\quad p_1 = p + \delta \cdot q,\quad q_1 = q - \delta \cdot q, \\ p_2 = p - \delta \cdot p,\quad q_2 = q + \delta \cdot p. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Очевидно, произвольная величина δ можетъ имѣть значенія въ промежуткѣ -1 и $+1$.

Перемѣнныя $x, y, z, \ldots$, соотвѣтствующія испытаніямъ $O'_1, O'_2, O'_3, \ldots$, имѣютъ каждое по два значенія: 1 и 0, смотря по тому, какое изъ событій E и F состоится въ соотвѣтствующемъ испытаніи. Сумма $x + y + z + \ldots + u$ представитъ ожидаемое число n появленій явленія E при m послѣдовательныхъ испытаніяхъ.

Займемся разысканіемъ производящей функціи $F(v)$ для вѣроятности появиться событію E то или другое число n разъ въ m разсматриваемыхъ испытаніяхъ $O'_1, O'_2, \ldots, O'_m$. Для достиженія этой цѣли введемъ еще слѣдующія обозначенія.

Пусть

$$\Delta P_{k,n}$$

означаетъ вѣроятность, что въ первыя k испытаній событіе E появится n разъ; пусть далѣе

$$\Delta P^0{}_{k,n} \quad \text{и} \quad \Delta P'_{k,n}$$

означаютъ такія же вѣроятности какъ $\Delta P_{k,n}$, но при добавочномъ условіи, которое для $\Delta P^0{}_{k,n}$ состоитъ въ томъ, что E не появится при $k^{-\text{мъ}}$ испытаніи, а для $\Delta P'_{k,n}$ состоитъ напротивъ въ томъ, что E имѣетъ мѣсто при $k^{-\text{мъ}}$ испытаніи. По теоремѣ сложенія будемъ имѣть:

$$\Delta P_{k,n} = \Delta P^0{}_{k,n} + \Delta P'_{k,n}.$$

Станемъ затѣмъ разсматривать три функціи:

$$\varphi_k = \sum \Delta P^0{}_{k,n} \cdot v^n,\ \psi_k = \sum \Delta P'_{n,k} \cdot v^n,\ \omega_k = \sum \Delta P_{k,n}\, v^n,$$

которыя въ силу предшествующаго имъ равенства связаны такъ:

$$\omega_k = \varphi_k + \psi_k.$$

Искомая же производящая функція $F(v)$ представится такъ:

$$F(v) = \omega_m = \sum \Delta P_{m,n} \cdot v^n. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

При помощи теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ убѣждаемся, что

$$\Delta P^0{}_{k+1,n} = q_1 \Delta P'_{k,n} + q_2 \Delta P^0{}_{k,n},$$

$$\Delta P'_{k+1,n} = p_1 \Delta P'_{k,n-1} + p_2 \Delta P^0{}_{k,n-1}.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi_{k+1} = q_1\psi_k + q_2\varphi_k,$$
$$\psi_{k+1} = p_1 v\psi_k + p_2 v\varphi_k.$$

Изъ этихъ уравненій посредствомъ исключенія то одной, то другой изъ функцій φ и ψ получаются два совершенно одинаковыя уравненія:

$$\varphi_{k+2} - (p_1 v + q_2)\,.\,\varphi_{k+1} + (p_1 - p_2)\,.\,v\,.\,\varphi_k = 0,$$
$$\psi_{k+2} - (p_1 v + q_2)\,.\,\psi_{k+1} + (p_1 - q_2)\,.\,v\,.\,\psi_k = 0.$$

Складывая ихъ, находимъ:

$$\omega_{k+2} - (p_1 v + q_2)\,\omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\,v\,\omega_k = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

При этомъ имѣемъ:

$$\omega_1 = pv + q,\ \omega_2 = pp_1 v^2 + (pq_1 + qp_2)v + qq_2. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Затѣмъ вообразимъ функцію

$$\Omega(v,t) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \ldots + \omega_k t^k + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ t есть произвольное число и ω_0 выводится изъ уравненія (6) при $k = 0$.

Умноживъ уравненіе (6) на t^k, затѣмъ давая въ немъ числу k значенія: 0, 1, 2, 3, . . . , и, наконецъ, складывая всѣ полученныя уравненія, получимъ соотношеніе, опредѣляющее функцію $\Omega(v,t)$, именно:

$$\Omega(v,t) = \frac{1 - \delta\ (qv + p)t}{1 - \{pv + q + \delta\ (qv + p)\}t + \delta vt^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$F(v) = \omega_m = \frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,m}\left\{\frac{d^m\,\Omega(v\,,t)}{dt^m}\right\}_{t=0}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Математическое ожиданіе величины n выразится такъ:

$$\sum n\,.\,\Delta P_{m,n} = \left[\frac{dF(v)}{dv}\right]_{v=1} = \frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,m}\left\{\frac{d^m}{dt^m}\,\frac{d}{dv}\,\Omega(v\,,t)\right\}_{v=1,\ t=0}.$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{d^i\,\Omega\,(v\,,t)}{dv^i} = \frac{1\,.\,2\,\ldots\,i\,p\,.\,t^i\,(1-\delta t)^2\,(p + \delta q - \delta t)^{i-1}}{\{1 - (\delta p + q)t - (p + \delta q - \delta t)tv\}^{i+1}},$$

легко убѣдимся, что

$$\text{мат. ожид. } n = m\,.\,p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Далѣе, матем. ожиданіе G величины $(n - mp)^2$ на основаніи формулы (5) представится такъ:

$$G = \sum (n - mp)^2\,.\,\Delta P_{m,n} = \left[\frac{d^2\{F(e^\theta)\ e^{-mp\theta}\}}{d\theta^2}\right]_{\theta=0} =$$
$$= \frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,m}\left\{\frac{d^m}{dt^m}\,\frac{d^2}{d\theta^2}[\Omega(e^\theta\,,t)\,.\,e^{-mp\theta}]\right\}_{t=\theta=0}.$$

Отсюда найдемъ:

$$G = m\,.\,g(1) = mpq\,.\,\frac{1+\delta}{1-\delta} + \frac{q\delta}{1-\delta}\left(\frac{\delta^m}{1-\delta} - \frac{\delta}{1-\delta} - 2p\right). \quad . \quad (12)$$

Очевидно, задача представляетъ *ультрапарадоксъ* при $\delta = 1$; тутъ $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $G : m = g(1) = \infty$ и задача пріобрѣтаетъ особый смыслъ, обращающій результатомъ одного только перваго изъ испытаній O'_1, O'_2, . . . вѣроятности дальнѣйшихъ явленій въ достовѣрность *вѣчнаго* утвержденія одного только изъ явленій E и F и отрицанія другаго.

Далѣе, при значеніяхъ величины δ, весьма близкихъ къ 1, величина $G : m$ будетъ весьма большая. Этотъ *парадоксальный* случай, имѣющій мѣсто тогда, когда p_1 есть почти 1, а p_2 есть почти нуль, дорого стоитъ, если его выкупить. Въ логикѣ эти парадоксы соотвѣтствуютъ изъяну закона противорѣчія, который торжествуетъ лишь при абсолютныхъ аподиктическихъ достовѣрностяхъ $p_1 = 1$ и $p_2 = 0$; такихъ аподиктическихъ достовѣрностей однакоже часто у логики «трехъ законовъ» (см. часть I, § 4) не хватаетъ по самымъ существеннымъ вопросамъ науки, общественности и исторіи.

Изъ формулы (12) и изъ вышеприведенной общей теоремы (§ 26) получается слѣдующій выводъ.

Пусть $-1 \leqq \delta < 1$. *Вѣроятность* P *неравенствъ*

$$-t < \frac{n}{m} - p < +t$$

должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \left\{pq\,.\,\frac{1+\delta}{1-\delta} + \frac{q\delta}{m\,(1-\delta)}\left(\frac{\delta^m - \delta}{1-\delta} - 2\,p\right)\right\}\frac{1}{mt^2},$$

и, слѣдовательно, при неограниченномъ возрастаніи m *разность* $\frac{n}{m} - p$ *должна съ относительною достовѣрностью содержаться въ весьма тѣсныхъ границахъ* $-t$ *и* $+t$, *сливающихся въ предѣлѣ съ нулемъ; ибо* t *можно опредѣлить такъ:*

$$t = m^{-\sigma}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}.$$

§ 30. Органическія гарантіи устойчивости и меліорацій въ процессахъ различнаго рода. Точка насыщенія. Лукавство. Учрежденія.

I. Въ глубинѣ стихійнаго процесса борьба съ причинами сильныхъ парадоксальныхъ случаевъ совершается включеніями въ историческій оборотъ (см. часть I, § 18_2) отборныхъ частичныхъ силъ, гарантирующихъ общую устойчивость и разныя меліораціи.

Бываютъ ряды операцій, въ которыхъ сильные парадоксальные случаи совершенно невозможны. Такъ, приложеніе исчисленія вѣроятностей къ операціямъ теоремы Пуассона обнаруживаетъ, что сильные парадоксы несвойственны этому процессу, т. е. итогъ n явленій E, наблюдаемыхъ въ этомъ родѣ операцій, обнаруживаетъ наклонность къ хорошей устойчивости, если судить о ней при помощи скалы M (см. §§ 13 и 23).

Пуассоновскія операціи $O_1, O_2, \ldots, O_m$ во всѣхъ случаяхъ могутъ служить *оперативною гарантіей* устойчивости итоговъ явленія E, если эти операціи по отбору включать въ болѣе сложную стихійную кооперацію $\Omega = (O_1 O_2 \ldots O_s)$, которую назовемъ *смѣшанной* и которая пусть въ природѣ или обществѣ развивается естественно.

Существуетъ множество рядовъ Чебышевскихъ операцій, производящихъ альтернативные итоги величинъ, обладающіе всегда относительною устойчивостью явленій цѣнныхъ итоговъ $x + y + \ldots + u$, т. е. несовмѣстимые съ сильными парадоксальными случаями. Эти операціи, легко открываемые съ помощію теоремы Чебышева, также можно отбирать и включать въ стихійную кооперацію Ω, какъ группу гарантій на повышеніе степени ея устойчивости или на забалансированіе ея неустойчивости.

Если X есть сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s$ полезныхъ плодовъ или же сумма цѣнныхъ качествъ (дѣеспособностей), которую, какъ результатъ дѣятельности въ кооперации Ω, нужно повысить, то стараются отборомъ и искусственными включеніями новыхъ операцій достигнуть двухъ цѣлей: не только устойчивости, но и постепеннаго повышенія итоговъ типа X. Вторую цѣль назовемъ вообще *меліорацією*.

Эта двоякая цѣль достигается: 1) культурою отбираемыхъ операцій $O_1, O_2, \ldots, O_m$, повышающею ихъ совокупную дѣятельность ΣE и величину математическаго ожиданія n_0 итога $x + \ldots + u$ и 2) затѣмъ включеніемъ кооперации $(O_1 O_2 \ldots O_m)$ въ стихійную кооперацію Ω.

Желательный эффектъ λ, получаемый этимъ пріемомъ, есть функція отъ чиселъ m и s или лучше сказать, функція отъ функціи $f(m, s) = m : (s + m)$. Эту функцію $f(m, s)$ назовемъ показателемъ гарантіи на полученіе искомаго эффекта λ; ея скала f *) сличается со скалою λ.

Если при данномъ значеніи q функціи $f(m, s)$ получается эффектъ λ_0, необходимый и достаточный для цѣли, то пунктъ q скалы $f(m, s)$ можно назвать *точкой насыщенія*. Положеніе точки насыщенія зависитъ, конечно, отъ цѣли λ_0 и отъ природы разсматриваемой стихійной кооперации Ω, насыщаемой гарантіями. Капля дождевой воды недостаточна для опрѣсненія ведра морской воды, но немного дрожжей достаточно для полученія ведра пива. Если включаемыя операціи способны, какъ закваска

*) Эта скала легко приводится къ отрѣзочной и принадлежитъ къ типу скалъ линейнаго преобразованія (см. часть I, § 14_2, пунктъ II).

или дрожжи, *прививать* свое творчество съ его идеей и ремесломъ «дикимъ» (стихійнымъ) операціямъ, то число q бываетъ весьма мало.

Чтобы въ стихійной смѣшанной операціи $\Omega = (O_1 O_2 \ldots O_s)$ обезпечивать меліорацію вмѣстѣ съ устойчивостью, нужно включать въ нее до насыщенія соотвѣтствующія отборныя операціи, обладающія желательными свойствами и прививающія ихъ къ «дикимъ» операціямъ.

Этотъ культурный матахимическій и химическій способъ эволюціи примѣняется практиками давно. Соотвѣтствующія отборныя способности культивируются или просто по достоинству берутся изъ природы при надлежащей осмотрительности избранія.

II. Кромѣ культурныхъ оперативныхъ гарантій, связанныхъ со способностями развивать плодотворную дѣятельность ΣE, будемъ различать еще матеріальныя гарантіи, т. е. матеріальные заклады и постоянные источники, обезпечивающіе погашеніе важнѣйшихъ матеріальныхъ обязательствъ и правильный ходъ производства, обмѣна и удовлетворенія жизненныхъ потребностей.

Кадастръ, т. е. нанесеніе предметовъ на карту или планъ, опредѣляетъ наличность недвижимыхъ закладовъ, какъ земля, дома и пр. Владѣніе же, укрѣпляемое графически, гарантируется *ломбардомъ*.

Бумажное денежное обращеніе гарантируется золотымъ закладомъ государства, поддерживающимъ курсъ λ довѣрія къ символическому бумажному рублю, по возможности, въ равномъ достоинствѣ съ настоящимъ золотымъ рублемъ.

Будемъ исходить изъ предположенія, что первичная чистая символическая форма денегъ есть печатный символъ въ видѣ бумажныхъ знаковъ; вторичная же форма денегъ, вызваная лукавствомъ, пусть представляется опять бумажными деньгами, но гарантированными золотомъ.

При этомъ перемѣнныя m и s въ показателѣ гарантіи $f(m, s)$ будутъ числами золотыхъ и бумажныхъ денегъ въ оборотѣ и закладѣ, при данныхъ единицахъ денежнаго счета.

Пусть точка q насыщенія соотвѣтствуетъ биржевому курсу $\lambda_0 = 0{,}99$ бумажнаго рубля на золото. Если q *выше* этой цыфровой нормы, т. е. наблюдается пересыщеніе денежной операціи золотою гарантіей ($\lambda > 0{,}99$), то, при обычной нехваткѣ оборотныхъ капиталовъ въ предпріятіяхъ частнаго хозяйства, соотвѣтствующая финансовая политика равносильна зарытію талантовъ золота въ землю. Если же q *ниже* нормы, т. е. замѣчается недосыщеніе денежнаго дѣла золотою гарантіей ($\lambda < 0{,}99$), то опять плохо: съ паденіемъ курса λ бумажныхъ денегъ на золотую валюту начинается извѣстная биржевая игра (спекуляція) на разницу въ курсѣ.

Статистика золотого и бумажнаго обращенія денегъ представляетъ удобный примѣръ для поясненія, ибо ее можно найти за разные интер-

валы времени τ и въ разныхъ территоріяхъ и продѣлать вычисленіе показателя $f(m, s)$ и биржеваго курса λ бумажной денежной единицы на золотую валюту. Современныя государства, наиболѣе пользующіяся статистикой въ вопросахъ политической экономіи (какъ Бельгія, страна крупныхъ статистиковъ: Кетле, Мансьона), умѣютъ понижать точку q насыщенія безъ пониженія λ, т. е. умѣютъ увеличивать бумажное обращеніе денегъ не впадая въ circulus vitiosus и другія ошибки.

Къ этого рода странамъ можно примѣнить афоризмъ Д. И. Менделѣева: «Капиталъ есть не золото, а довѣріе». Если бы оправданіе довѣрія на дѣлѣ и умѣнье хорошо вѣрить и хорошо сомнѣваться передъ дѣломъ были высоки въ странѣ, то можно бы перейти къ чистой бумажной формѣ денегъ, когда $q = 0$, и къ власти понятій чистаго разума. Но на дѣлѣ лукавство страстей этому всегда мѣшаетъ.

По причинѣ лукавства люди безъ матеріальныхъ закладовъ не могутъ полагаться на слово во многихъ дѣлахъ, требующихъ, казалось бы, лишь честнаго отношенія къ своему слову и къ слову ближняго. Но всякому обыкновенному лукавству есть предѣлъ, который можетъ измѣрять научная статистика и опредѣлять запасъ гарантіи противъ его господства.

Матеріальная наличность закладовъ и постоянныхъ источниковъ возрожденія и дохода есть существенное условіе связи міра мысли и міра матеріи.

III. Во всѣхъ случаяхъ органическихъ гарантій нужно опредѣлять ихъ количество съ достаточнымъ *сосредоточеннымъ запасомъ*. Эти средоточія назовемъ *учрежденіями;* они запасаются *подвижными* силами дѣйствія, или *кассами гарантій*, придавая слову касса не узкій финансовый смыслъ, а болѣе широкій, матеріальный и личный, считая, напримѣръ, какъ бы за кассу *живую корпорацію*, одухотворенную одинаковыми идеями. Финансовыя кассы тутъ будемъ брать лишь въ качествѣ поясни-тельнаго аналогическаго примѣра.

Теорію оборотовъ въ кассахъ гарантій будемъ разсматривать по правиламъ математическаго ожиданія, но предполагая, что покровительственная кривизна, соотвѣтствующая нравственному ожиданію (§27), вводится потомъ въ качествѣ важнѣйшей поправки, когда слѣдуетъ.

Верховнымъ страховымъ Обществомъ будемъ считать государство съ его достояніемъ, гарантированномъ жизнью и имуществомъ подданныхъ. Это достояніе будемъ считать неисчерпаемымъ. Земско-общественныя кассы гарантій, напротивъ, исчерпаемы, а потому покупаютъ у высшаго страховаго института страховые полисы на случай, когда будутъ прижаты къ стѣнѣ мѣстнымъ злымъ рокомъ, форсмажерными для нихъ кризисами. Вопросъ этотъ тѣсно связанъ съ вопромъ о сѣти національныхъ банковъ разнаго промышленнаго значенія (см. часть I, § 6_2).

Задача эта ставитъ на разсмотрѣніе вопросъ о вѣроятности несостоятельности кассы и о стоимости гарантированія исправнаго выполненія лежащихъ на кассѣ обязательствъ въ случаѣ ея несостоятельности. Эта задача представляетъ большой интересъ въ виду связи ея съ важнѣйшими вопросами финансовой и политической ариѳметики.

Предполагается, что касса, обезпеченная наличнымъ фондомъ A_m и обязанная выдачею случайныхъ уплатъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, можетъ оказаться несостоятельною, т. е. не способною покрыть эти уплаты фондомъ A_m. Эта несостоятельность, очевидно, будетъ имѣть мѣсто тогда, когда окажется, что

$$A_m < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

При этомъ условіи касса не въ состояніи покрыть всѣхъ обязательныхъ для нее уплатъ изъ фонда A_m, причемъ гарантирующій исправность кассы для удовлетворенія непокрытыхъ обязательствъ долженъ выдать сумму $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m - A_m$. При этихъ условіяхъ разсматриваемая задача формулируется такъ:

Задача. *Касса обязана выдачею при извѣстныхъ независимыхъ обстоятельствахъ т соотвѣтственныхъ уплатъ* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, *обезпечиваемыхъ къ началу оборота ея наличнымъ фондомъ* A_m, *который оказывается менѣе наибольшаго значенія* α'' *суммы* $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$. *Администрація кассы обязана пріобрѣсти гарантію, обезпечивающую выполненіе ея обязательствъ въ случаѣ несостоятельности кассы. Какова вѣроятность* P *несостоятельности кассы и какова стоимость* C *гарантіи?*

Вѣроятность P несостоятельности кассы есть, очевидно, вѣроятность осуществленія неравенства (1). Придерживаясь установленныхъ въ § 22 правилъ, замѣчаемъ, что эта вѣроятность P совпадаетъ съ вѣроятностью $P(A_m, \alpha'')$, гдѣ α'' есть *наибольшее* значеніе суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$. Отсюда слѣдуетъ, что искомая вѣроятность P представляется такъ:

$$P = \sum_{A_m}^{\alpha''} \Delta P_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ ΔP_n есть вѣроятность равенства $n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m$.

Далѣе стоимость C гарантіи исправности кассы въ случаѣ ея несостоятельности опредѣляется на основаніи слѣдующихъ соображеній. Если случится несостоятельность кассы, то для удовлетворенія непокрываемыхъ фондомъ A_m обязательствъ кассы гарантирующій долженъ выдать денежную сумму $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m - A_m$.

Математическое ожиданіе этой суммы есть:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m - A_m) \cdot \Delta P_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m}.$$

Сумма такихъ математическихъ ожиданій, распространенная на всѣ возможные случаи, при которыхъ будетъ имѣть мѣсто несостоятельность кассы, есть искомая стоимость C гарантіи исправности кассы. Эта стоимость, поэтому, представится такъ:

$$C = \sum_{A_m}^{\alpha''} (n - A_m) \cdot \Delta P_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Вычисленіе обоихъ количествъ P и C по формуламъ (1) и (3) связано, такимъ образомъ, съ графикомъ вѣроятности ΔP_n для всѣхъ значеній суммы $n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$ отъ $n = A_m$ до $n = \alpha''$.

Вообразимъ, что при неизмѣнныхъ прочихъ данныхъ задачи о гарантіяхъ измѣняется лишь наличность кассы, т. е. величина A_m. Съ этою величиною связана большая или меньшая *прочность* или *солидность* кассы. Устанавливая съ помощію теоремы I § 21 понятіе объ этомъ свойствѣ кассы, какъ о числовой величинѣ, условимся *солидность* или *прочность* кассы въ отношеніи возможности ея несостоятельности измѣрять величиною, обратною количеству $R = \sqrt{mg} : (A_m - n_0)$, гдѣ n_0 и g суть мат. ож. n и $(n - n_0)^2 : m$ и $A_m > n_0$. Слѣдовательно, *чѣмъ мѣра R ближе къ нулю, тѣмъ прочнѣе или солиднѣе касса*, ибо вѣроятность $1 - P$ состоятельности тѣмъ ближе къ 1. Но худо, если солидность перейдетъ точки точки насыщенія, зарывая творческіе таланты въ землю.

Касса гарантій сама трактуетъ себя какъ *средняя* страховая инстанція, покровительствующая мелкой частной производительной промышленности, распредѣленной въ районѣ ея дѣйствія.

Формулируемъ здѣсь еще примѣръ, разсмотрѣніе котораго предоставляется читателю для уясненія предшествующаго.

Примѣръ. *Страховое общество взяло на страхъ большое число m предметовъ, стоимость которыхъ по оцѣнкѣ опредѣлена суммами $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_m'$. Эти суммы общество обязалось уплачивать по принадлежности въ случаѣ гибели того или другого застрахованнаго предмета въ данный срокъ. Вѣроятности гибели этихъ предметовъ представляются соотвѣтственно числами $p_1', p_2', \ldots, p_m'$. Страховая премія (не считая приплаты въ пользу общества и на содержаніе администраціи) взимается въ размѣрѣ $p_k'\varepsilon_k'$, соотвѣтствующемъ вѣроятности гибели и стоимости ε_k' застрахованнаго предмета. Касса A_m, предназначаемая на покрытіе стоимости застрахованныхъ погибшихъ предметовъ, слагается въ началѣ оборота изъ наличнаго у общества фонда A съ присоединеніемъ къ нему страховыхъ премій. Опредѣлить вѣроятность P несостоятельности кассы и стоимость C гарантированія исполненія ея обязательствъ въ случаѣ несостоятельности.*

Касса A_m въ этомъ примѣрѣ опредѣляется по формулѣ вида:

$$A_m = A + p_1'\varepsilon_1' + p_2'\varepsilon_2' + \ldots + p_m'\varepsilon_m'.$$

Возможность несостоятельности наступаетъ лишь тогда, когда будетъ имѣть силу неравенство:

$$A_m < \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \ldots + \varepsilon'_m,$$

при чемъ общество обязано заручиться гарантіей, если желаетъ развить свои операціи при данныхъ условіяхъ безъ риска оказаться неисправнымъ въ исполненіи своихъ обязательствъ. Производящія функціи $\varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots, \varphi_m(v)$ вѣроятностей перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ опредѣляются по формулѣ вида:

$$\varphi_k(v) = p'_k \cdot v^{\varepsilon'_k} + p_k'',$$
$$k = 1, 2, \ldots, m \quad \text{и} \quad p_k'' = 1 - p_k'.$$

Перемѣнное ε_k, слѣдовательно, имѣетъ лишь два значенія: ε_k' и 0. Примѣръ этотъ, обобщающій теорему Пуассона, имѣетъ практическое значеніе.

§ 31. Логическая машина и здравый смыслъ въ ихъ соприкосновеніи. Основная классификація числовыхъ и графическихъ закономѣрностей. Учрежденія—кассы силъ. Панлогика и эвристическая теорія познанія.

Если бы самостоятельность независимыхъ производящихъ (причинныхъ) факторовъ и независимость производимыхъ ими явленій исчезли, то въ процессѣ исторіи осталась бы лишь крѣпостная зависимость послѣдовательныхъ явленій, обсуждаемая по логикѣ A «трехъ законовъ» (см. часть I, § 4), въ которой умъ можетъ быть замѣненъ логической машиной Джевонса *). Но оперативная лигика $Б$ теоріи вѣроятностей противорѣчитъ этой машинообразности, дѣлая ссылку на изъяны логики A и на фактѣ множественности независимыхъ индивидуальностей и апеллируя къ здравому смыслу.

Эвритическій здравый смыслъ $Б$ теоріи вѣроятностей опредѣляется по отношенію къ логикѣ A вышеизложеннымъ *ученіемъ о градаціяхъ устойчивости* итоговъ массовыхъ независимыхъ явленій, которая зависитъ отъ величины g, входящей въ теорему Чебышева.

Абсолютная устойчивость итога n перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$ бываетъ, какъ мы видѣли, тогда, когда въ теоремѣ Чебышева $g = g(1) = 0$. Женератриса $F(v)$ тутъ, какъ показываютъ равенства (2) и (8)—(8″) § 26, должна

*) *Джевонсъ:* «Основы науки». — *И. Слешинскій:* Логическая машина Джевонса (Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. Одесса, 1893).—*Л. Кутюра.* Алгебра логики. Переводъ И. Слешинскаго. Одесса, 1909.

обратиться въ одночленъ v^{n_0}, которому соотвѣтствуетъ единственное *достовѣрное* значеніе n, равное n_0; при этомъ строка (3) въ § 26 должна свестись къ единственному члену n_0, общая наибольшая мѣра h разностей значеній перемѣннаго n тутъ сама собою отпадаетъ, дѣлается любопытнымъ абсурдомъ или мнимостью особаго рода, которая соотвѣтствуетъ уменьшенію числа измѣреній (скалъ) въ многообразіи $n + 1$ измѣреній на одно измѣреніе. Въ совокупности вопросовъ о совершенно устойчивыхъ итогахъ исторіи примѣняются законы логики A, гдѣ умъ замѣняется машиной. Соотвѣтствующія числовыя закономѣрности или единообразія назовемъ *фатальными* или *машинообразными*. Тамъ, гдѣ царятъ законы логики A и аподиктическія достовѣрности, а темнота вѣроятности отсутствуетъ,—тамъ процессъ исторіи предопредѣленъ и числовыя закономѣрности осуществляются съ точностью механизма.

Но эти закономѣрности имѣютъ продолженіе въ законахъ оперативной логики $Б$, формулируемыхъ теоріей вѣроятностей для множествъ независимыхъ индивидуальностей, соединенныхъ въ кооперацію, и для тѣхъ случаевъ, когда вышеуказанная величина g (1) болѣе или менѣе отклоняется отъ нуля. Тутъ итоги n перемѣнныхъ, являющихся плодомъ дѣятельности ΣE независимыхъ операцій, возстановляемой *оборотомъ* за счетъ плодовъ, не бываютъ совершенно устойчивыми; въ этихъ процессахъ исторіи играютъ роль числовыя закономѣрности, кардинальныя формулы которыхъ суть: 1) діаграммы вѣроятности и Чебышевская теорема о предѣлахъ колебанія среднихъ величинъ для случая независимыхъ дѣятельностей E, приносящихъ плоды x (см. § 19), и 2) нормативные законы, диктуемые для независимыхъ индивидуумовъ, какъ нравственныя и гражданскія велѣнія и нужные для организованнаго сопротивленія обрывамъ устойчивости цѣнныхъ явленій, независимыхъ и зависимыхъ. Эти закономѣрности, направленныя противъ кризисовъ и стихійныхъ лукавствъ, назовемъ *свободными* въ отличіе отъ фатальныхъ или машинообразныхъ.

Между двумя указанными сейчасъ кардинальными типами числовыхъ закономѣрностей (между машинообразными и свободными закономѣрностями), составляющими третью изъ кантіанскихъ антиномій (см. «Пролегомены»), помѣщаются промежуточные производные типы *полусвободныхъ* числовыхъ закономѣрностей, соотвѣтствующіе смѣси независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ (§ 26) иобразующіеся аналогично тому, какъ равнодѣйствующая возникаетъ изъ своихъ слагающихъ или составляющихъ.

Въ отношеніи времени и пространства всѣ названные типы закономѣрностей еще разъ подраздѣляются на два типа: 1) *закономѣрности сосуществованія* и 2) *закономѣрности послѣдовательности*. Эти типы закономѣрностей, поскольку онѣ подчиняются формуламъ логики A, называются (у Канта, Милля, Минто и др.) аналогіями опыта и единообразіями природы. При этомъ логики, укрывающіе существенную недостаточность «трехъ законовъ», имѣютъ оптимистическій обычай: 1) затушевывать законы оперативной логики $Б$ и ея оцѣнку возможности обрывовъ и катаклизмовъ въ возможныхъ достовѣрностяхъ и единообразіяхъ, кажущихся прочными, и 2) усыплять чувство заботы и духъ изслѣдованія.

Обрывъ устойчивости можетъ быть иногда предусмотрѣнъ и предупрежденъ сопротивленіями или обойденъ, если признать въ понятіи и изучать въ натурѣ парадоксальныя положенія. При этомъ для фактическаго освѣщенія нужны наблюденія, индуктивное собираніе фактовъ, статистика.

Соединеніе логическаго пространства А достовѣрныхъ сужденій съ металогическимъ пространствомъ Б вѣроятностныхъ сужденій есть истинный *crux physicorum et metaphysicorum*, примиряющій въ *цѣльномъ* познаніи и здравомъ смыслѣ (не простомъ, а научно-философскомъ) разсудокъ и сердце (органъ вѣры и опытнаго контроля).

Въ *динамикѣ* общественнаго процесса логической машинѣ A соотвѣтствуетъ *общественная механика*, а здравому смыслу Б соотвѣтствуютъ *средотдѣія* (какъ бы *солнца*) резервовъ, дающія движенію процесса *направленіе* отъ худого конца ожиданій къ хорошему. Потенціалы V типа, указаннаго въ таксологической теоріи (§ 27), возможны въ опредѣленномъ *желательномъ* направленіи и въ долготу вѣковъ исторіи лишь тогда, когда построены *на всѣхъ историческихъ путяхъ* государства надлежащія солнца — учрежденія, кассы силъ (§ 30), всасывающія и выпускающія лучи — кредитныя посылки какъ слѣдуетъ, чтобы оплодотворять творчество населенія страны и выкупать безчисленныя, въ итогѣ смертельныя погрѣшности.

Но нужно заботливо формулировать отношеніе чистаго *апріоризма* къ чистому *апостеріоризму* и къ воззрѣнію въ опытѣ, ибо апріорныя разсужденія и вѣрованія (безъ дѣлъ и испытаній) еще слѣпы, темны и могутъ впадать въ иллюзіи и обманы.

Логика А + логика Б вмѣстѣ составляютъ *панлогику*, предугаданную Гегелемъ, но неудачно имъ выраженную, ибо онъ, увлеченный парламентаризмомъ, не умѣлъ пользоваться концепціями, матеріалами и *эвристическими* методами теоріи вѣроятностей, какъ главной части теоріи познанія. Панлогикѣ соотвѣтствуетъ координирующая *пангеометрія*, какъ графическая и числовая закономѣрность сосуществованія и послѣдовательности, имѣющая корни въ воззрѣніи и *пансофія*, какъ цѣльный методъ чистаго и практическаго разума, апріорный и апостеріорный (опытный).

Логику А можно назвать сплющенной, такъ какъ ея графикъ не содержитъ скалы вѣроятности P. Такъ сплющивается пространство трехъ измѣреній переходя въ пространство двухъ измѣреній.

ГЛАВА VI.

Ученіе о вѣроятностяхъ à posteriori. Элементы вѣроятностной опытной теоріи познанія.

§ 32. Теорема Байе и ея слѣдствія. Обозначеніе варіаціи вѣроятій подъ впечатлѣніемъ факта.

Вообразимъ опытъ, состоящій изъ двухъ частей, изъ которыхъ одна была наблюдаема, а другая осталась ненаблюденною. Пусть въ той части опыта, которая была наблюдаема, произошло событіе E; ненаблюденной же части опыта пусть свойственно нѣкоторое возможное событіе E_1. Вѣроятность этого событія E_1, послѣ того какъ событіе E было уже наблюдено, называется вѣроятностью *à posteriori*. Въ числовомъ отношеніи вѣроятность *à posteriori* событія E_1 есть то же, что и условная вѣроятность событія E_1, найденная въ предположеніи, что событіе E состоялось.

Ученіе о вѣроятностяхъ *à posteriori* имѣетъ многочисленныя приложенія въ опытныхъ наукахъ и въ статистикѣ. Во многихъ вопросахъ мы à priori численныхъ значеній оперативныхъ вѣроятностей въ сущности почти даже и не знаемъ, и основываемъ свои практическіе выводы лишь на общихъ понятіяхъ алгебры вѣроятій и на численныхъ выводахъ изъ наблюденій, т. е. à posteriori. Отсюда видна высокая важность опытнаго ученія о вѣроятностяхъ à posteriori, побуждающая дорожить выводами этого отдѣла теоріи вѣроятностей, лежащаго въ основѣ исторической эволюціонной теоріи и исчисленія варіацій δp (см. выше, § 7, п. II) и *флюксій*

$$\frac{\delta p}{\delta \tau}$$

или *скоростей прироста вѣроятности* p въ единицу времени τ, считая, что приростъ δp совершается подъ дѣйствіемъ фактовъ за срокъ $(\tau, \tau + \delta\tau)$ отъ момента τ до момента $\tau + \delta\tau$.

Основною теоремою въ ученіи о вѣроятностяхъ à posteriori служитъ *теорема А Байе.*

Теорема *А. Пусть* $C_1, C_2, \ldots, C_i$ *будутъ несовмѣстимыя и всевозможныя гипотезы, свойственныя данному опыту; пусть* $q_1, q_2, \ldots, q_i$,

будутъ вѣроятности этихъ гипотезъ до начала опыта; $p_1, p_2, \ldots, p_i$ *пусть будутъ условныя вѣроятности событія* E *при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ. Вообразимъ затѣмъ, что событіе* E *состоялось. При этихъ данныхъ вѣроятность* ω_k *гипотезы* C_k *à posteriori (т. е. послѣ наблюденія событія* E*) выразится такъ:*

$$\omega_k = \frac{p_k q_k}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_i q_i}.$$

Доказательство. Разсмотримъ сложное событіе (EC_k), состоящее въ совпаденіи осуществленія при данномъ опытѣ гипотезы C_k и событія E. Вѣроятность H этого сложнаго событія по теоремѣ умноженія выразится двояко: съ одной стороны

$$H = P \cdot \omega_k,$$

гдѣ P есть апріорная вѣроятность событія E, а ω_k есть условная вѣроятность гипотезы C_k, найденная въ предположеніи, что событіе E состоялось; съ другой стороны $H = q_k p_k$. Поэтому $P\omega_k = q_k p_k$; отсюда

$$\omega_k = \frac{q_k p_k}{P}.$$

Далѣе, на основаніи теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ, имѣемъ:

$$P = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_i q_i.$$

Поэтому

$$\omega_k = \frac{p_k q_k}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_i q_i},$$

что и требовалось доказать.

Опредѣленіе варіаціи вѣроятности гипотезы. *Пусть имѣютъ мѣсто условія и обозначенія теоремы А. Варіація* δq_k *вѣроятности* q_k *гипотезы* C_k *подъ впечатлѣніемъ факта* E *будетъ:*

$$\delta q_k = \omega_k - q_k = q_k \left(\frac{p_k}{P} - 1 \right).$$

Опредѣленіе это согласовано съ § 7.

Разсмотримъ частный случай теоремы A, когда гипотезы $C_1, C_2, \ldots, C_i$, до начала опыта, равновѣроятны, т. е. когда $q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_i$. Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\omega_k = \frac{p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_i},$$

откуда слѣдуетъ, что $\omega_1 : \omega_2 \ldots : \omega_i = p_1 : p_2 : \ldots : p_i$.

Иначе говоря, *если въ предшествующей теоремѣ А гипотезы* $C_1, C_2, \ldots, C_i$ *до начала опыта равновѣроятны, то вѣроятности тѣхъ же гипотезъ à posteriori (послѣ наблюденія событія* E*) будутъ пропор-*

ціональны условнымъ вѣроятностямъ событія E при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ.

Перейдемъ теперь къ теоремѣ, которая есть слѣдствіе теоремы *Байе* и теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ.

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_i$ будутъ вѣроятности несовмѣстимыхъ и всевозможныхъ гипотезъ $C_1, C_2, \ldots, C_i$, свойственныхъ данному опыту; пусть $p_1, p_2, \ldots, p_i$ будутъ условныя вѣроятности событія E при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ. Вообразимъ затѣмъ другое событіе E' и пусть $r_1, r_2, \ldots, r_i$ будутъ условныя вѣроятности событія E' при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ $C_1, C_2, \ldots, C_i$. Предположимъ еще, что событіе E не вліяетъ на условныя вѣроятности $r_1, r_2, \ldots, r_i$ событія E' при допущеніи вышеуказанныхъ гипотезъ, т. е. эти условныя вѣроятности остаются такими же, какъ до наблюденія событія E, такъ и послѣ наблюденія этого событія. Полная вѣроятность событія E' à posteriori (послѣ наблюденія событія E) должна опредѣляться по формулѣ: $R' = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + \ldots + r_i\omega_i$.

Теорема эта вытекаетъ изъ теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ, въ которой вѣроятности гипотезъ, при разсматриваемыхъ обстоятельствахъ, приходится разсматривать à posteriori, т. е. вмѣсто вѣроятностей $q_1, \ldots, q_i$ приходится брать $\omega_1, \ldots, \omega_i$.

Если апріорную вѣроятность событія E' обозначимъ чрезъ R, то будемъ имѣть ея варіацію δR подъ впечатлѣніемъ факта E:

$$\delta R = R' - R = r_1\delta q_1 + r_2\delta q_2 + \ldots + r_i\delta q_i.$$

Поясненіе на легчайшемъ примѣрѣ. Увѣрованіе въ гипотетическую причину, пріобрѣтаемое опытомъ.

Задача. *Имѣются три группы урнъ: къ первой группѣ относится n_1 урнъ, изъ которыхъ каждая содержитъ a_1 бѣлыхъ и b_1 черныхъ шаровъ; ко второй группѣ принадлежатъ n_2 урнъ, изъ которыхъ каждая содержитъ a_2 бѣлыхъ и b_2 черныхъ шаровъ; къ третьей группѣ принадлежитъ n_3 урнъ, изъ которыхъ каждая содержитъ a_3 бѣлыхъ и b_3 черныхъ шаровъ. Всѣ эти урны одинаковаго вида и перемѣшаны между собою. Затѣмъ изъ числа этихъ урнъ наудачу вынута одна урна A принадлежащая къ неизвѣстной группѣ. Далѣе изъ урны A произведено было s разъ извлеченіе по одному шару, причемъ послѣ каждаго извлеченія вынутый шаръ возвращался въ урну. При этихъ s извлеченіяхъ наблюдалось слѣдующее явленіе: бѣлый и черный шары появились соотвѣтственно m и s — m разъ, слѣдуя одинъ за другимъ въ опредѣленномъ порядкѣ.*

Опредѣлить: *1) вѣроятности à posteriori того, что урна A принадлежитъ къ той или другой изъ вышеуказанныхъ группъ (либо къ первой, либо ко второй, либо къ третьей), и 2) вѣроятность à posteriori того, что при σ будущихъ извлеченіяхъ изъ урны A по одному шару бѣлый и черный шары появятся соотвѣтственно μ разъ и σ — μ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ какомъ бы то ни было порядкѣ.*

Рѣшеніе. Содержимое урны A аналогично невидимой вещи въ себѣ (ноумену). Здѣсь возможны три гипотезы: 1) урна A принадлежитъ къ первой группѣ, 2) урна A принадлежитъ ко второй группѣ и 3) урна A принадлежитъ къ третьей группѣ.

Назовемъ вѣроятности этихъ гипотезъ соотвѣтственно черезъ q_1, q_2 и q_3. Полагая $n = n_1 + n_2 + n_3$, будемъ имѣть:

$$q_1 = \frac{n_1}{n},\ q_2 = \frac{n_2}{n},\ q_3 = \frac{n_3}{n}.$$

Допуская каждую изъ трехъ вышеуказанныхъ гипотезъ, опредѣлимъ затѣмъ соотвѣтственныя условныя вѣроятности p_1, p_2 и p_3 того, что при s — кратномъ извлеченіи изъ урны A шара, бѣлый и черный шары появятся соотвѣтственно m разъ и $s - m$ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ опредѣленномъ порядкѣ. Вѣроятности эти будутъ:

$$p_1 = \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1}\right)^m \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1}\right)^{s-m},$$

$$p_2 = \left(\frac{a_2}{a_2 + b_2}\right)^m \left(\frac{b_2}{a_2 + b_2}\right)^{s-m}, \quad p_3 = \left(\frac{a_3}{a_3 + b_3}\right)^m \left(\frac{b_3}{a_3 + b_3}\right)^{s-m},$$

Отвѣчая теперь на первый изъ предложенныхъ въ задачѣ вопросовъ, замѣчаемъ, что упомянутыя въ этомъ вопросѣ вѣроятности суть вѣроятности ω_1, ω_2 и ω_3 à posteriori трехъ вышеуказанныхъ гипотезъ. На основаніи теоремы Байе вѣроятности эти представятся такъ:

$$\omega_1 = \frac{p_1q_1}{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3},$$

$$\omega_2 = \frac{p_2q_2}{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}, \qquad \omega_3 = \frac{p_3q_3}{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}.$$

При большомъ s числа m и $s - m$, по теоремѣ Я. Бернулли, будутъ почти пропорціональны числамъ a и b бѣлыхъ и черныхъ шаровъ урны A. Поэтому опытъ можетъ дать основаніе увѣровать въ устройство урны A; оно будетъ соотвѣтствовать наибольшему изъ чиселъ ω_1, ω_2, ω_3, которое будетъ стремиться къ 1 при неограниченномъ возрастаніи s. Но это познаніе будетъ только основательною увѣренностію. Курсъ вѣроподобной гипотезы въ опытѣ поднимается, а курсы остальныхъ гипотезъ роняются.

Приступимъ теперь ко второму вопросу задачи. Допуская каждую изъ трехъ вышепоказанныхъ гипотезъ, найдемъ условныя вѣроятности

p_1' и p_2' и p_3' того, что при σ извлеченіяхъ изъ урны A шара бѣлый и черный шары появятся соотвѣтственно μ разъ и $\sigma - \mu$ разъ. Будемъ имѣть:

$$p_1' = C_\sigma^\mu \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1}\right)^\mu \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1}\right)^{\sigma-\mu},$$

$$p_2' = C_\sigma^\mu \left(\frac{a_2}{a_2 + b_2}\right)^\mu \left(\frac{b_2}{a_2 + b_2}\right)^{\sigma-\mu}, \quad p_3' = C_\sigma^\mu \left(\frac{a_3}{a_3 + b_3}\right)^\mu \left(\frac{b_3}{a_3 + b_3}\right)^{\sigma-\mu},$$

гдѣ C_σ^μ есть число сочетаній изъ σ элементовъ по μ. Эти условныя вѣроятности таковы, что сдѣланныя при s прошедшихъ испытаніяхъ наблюденія не вліяютъ на эти условныя вѣроятности. Слѣдовательно здѣсь примѣнима вышеуказанная теорема о полныхъ вѣроятностяхъ à posteriori. На основаніи этой теоремы требуемая вторымъ вопросомъ задачи вѣроятность выразится такъ: $P_{\sigma,\mu} = p_1'\omega_1 + p_2'\omega_2 + p_3'\omega_3$.

§ 33. Приложеніе теоремы Байе къ вѣроподобію свидѣтельствъ, примѣтъ, знаковъ, уликъ, совѣтовъ о средствахъ для цѣлей. Собираніе вѣроподобія посредствомъ опроса многихъ лицъ. Мірской судъ.

I. Положимъ, что обсуждаемъ нѣкоторое возможное событіе U, вѣроятность котораго обозначимъ чрезъ p. Вѣроятность противоположнаго событія не— U пусть будетъ q. Вообразимъ, что процессъ, которому свойственно обстоятельство U, совершился не при насъ самихъ, причемъ нѣкоторый свидѣтель A удостовѣряетъ, что событіе U состоялось. Допустимъ далѣе, что свидѣтель A въ своихъ показаніяхъ способенъ ошибаться. Назовемъ черезъ P апріорную вѣроятность того, что A не ошибается въ своемъ показаніи E, а черезъ Q вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что A ошибается въ своемъ показаніи E. Послѣ показанія E свидѣтеля A вѣроятность того, что событіе U произошло, очевидно измѣнится. Эту то вѣроятность à posteriori и надо найти.

Будемъ разсматривать двѣ гипотезы C_1 и C_2: 1) событіе U состоялось и 2) событіе U не состоялось. До наблюденія показанія свидѣтеля A вѣроятности этихъ гипотезъ будутъ:

$$q_1 = p \quad \text{и} \quad q_2 = q.$$

Роль наблюденнаго нами самими событія E въ разсматриваемой задачѣ играетъ показаніе свидѣтеля A, что событіе U состоялось. Прежде всякихъ наблюденій, условная вѣроятность p_1 осуществленія этого показанія при допущеніи первой гипотезы C_1 есть то же, что вѣроятность того, что свидѣтель A не ошибается въ своемъ показаніи, т. е. $p_1 = P$; условная же вѣроятность p_2 осуществленія вышеуказаннаго показанія при допущеніи второй гипотезы C_2 есть то же, что вѣроятность того, что свидѣтель A ошибается въ своемъ показаніи, т. е. $p_2 = Q$.

Послѣ показанія E свидѣтеля A, утверждающаго, что событіе U состоялось, вѣроятности ω_1 и ω_2 вышеуказанныхъ гипотезъ или, иначе говоря, событій U и не—U представятся на основаніи теоремы Байе въ слѣдующей формѣ:

$$\omega_1 = \frac{pP}{pP + qQ}, \quad \omega_2 = \frac{qQ}{pP + qQ}, \quad \delta p = \omega_1 - p, \quad \delta q = \omega_2 - q \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

Рѣшенная здѣсь задача есть основная въ приложеніяхъ теоріи вѣроятностей къ вопросамъ о свидѣтельскихъ показаніяхъ и о судебныхъ приговорахъ. Приложеніями этими занимались Кондорсе, Пуассонъ, Остроградскій, Курно и другіе.

Формула (I) говоритъ, что апостеріорная вѣроятность ω_1 изслѣдуемаго явленія U бываетъ либо болѣе первоначальной вѣроятности p ($\delta p > 0$), либо менѣе ея ($\delta p < 0$), смотря по тому, будетъ ли $P > \frac{1}{2}$ или $P < \frac{1}{2}$. При $P > \frac{1}{2}$ соотвѣтствующее показаніе (свидѣтельство, приговоръ) назовемъ *вѣроподобнымъ* или *правдоподобнымъ*.

Въ судебномъ дѣлѣ нуженъ подборъ вѣроподобныхъ показаній, если хотимъ имѣть порядочный судъ. Слѣдовательно, необходимы отводы отъ участія въ судѣ многихъ элементовъ, не обладающихъ вѣроподобіемъ.

Формула (I) вышеприведенной задачи можетъ быть перенесена на розныя аналогическія задачи, при надлежащемъ истолкованіи соотвѣтственности терминовъ данной задачи и аналогической задачи.

II. Вообразимъ, напримѣръ, естественную *примѣту* E явленія U, которая, совершившись, косвенно свидѣтельствуетъ и о совмѣстимомъ событіи U, положимъ, съ вѣроятностью P безошибочности этого свидѣтельства. Въ этой аналогической задачѣ, при наступленіи примѣты, примѣняются вышеприведенныя выраженія вѣроятности ω_1 и ω_2 явленій U и не—U. Примѣтами и вещественными уликами пользуются сельское хозяйство, медицина, метерологія, судъ и пр. и выводятъ этимъ способомъ множество основательныхъ заключеній, къ которымъ курсъ довѣрія поднимается выше и выше, если вѣроподобныхъ примѣтъ накопляется въ сосмѣтанномъ порядкѣ много. Наука пользуется символами—примѣтами идей.

Обобщая этотъ гносеологическій способъ, мы разсмотримъ ниже (см. часть III) *варіацію* діаграммы вѣроятности $\Delta P_{m,n}$ перемѣннаго цѣннаго итога большого числа независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ (§§ 22 и 26); варіація эта зависитъ отъ констатированной дѣятельности людей и видимой природы, отъ накопленія показаній и естественныхъ примѣтъ, а въ промышленности отъ накопленія спросовъ, предложеній и услугъ, вырабатывающихъ экономическія цѣнности.

Гипотезы C_1 и C_2, соотвѣтствующія несовмѣстимымъ обстоятелъствамъ U и не — U, могутъ имѣть различный характеръ: гипотеза C_1 можетъ

быть мысленно пріурочена къ идеѣ U нематеріальнаго, но цѣннаго дѣйствующаго характера, какъ познаніе, долгъ, понятія, заповѣди и пр.; она можетъ быть мысленно прикрѣплена и къ идеѣ U физическаго труда и матеріальной пользы или выгоды.

Идея того или другаго рода въ роли умысла или цѣли, индивидуальной или, наоборотъ, общей, стремится къ соотвѣтственному воплощенію или бытію въ дѣйствительности. Понятіе гипотезы C, слѣдовательно, можетъ быть связано съ понятіемъ цѣли и пригодности средствъ ΣE или M движенія къ цѣли.

III. Разсмотримъ еще вопросъ о консультаціяхъ *свѣдущихъ лицъ*, рѣшающихъ вопросъ относительно *средствъ* для *цѣли*. Слѣдовательно, теперь изслѣдуемое явленіе U стоитъ *впереди*, а не *позади* настоящаго момента.

Средство M есть пригодная для умышленной цѣли U вещь; использованіе ея приближаетъ и прямо приноситъ благо (питаніе, имущество, увѣренность, вѣру, знаніе, правосудіе и пр.). Будущее благо и есть цѣль, для которой стоитъ запасать средства. Символическія учитываемыя мѣры, какъ книги, законы, честное слово, историческія записи жизненныхъ предпосылокъ и талантовъ у сословій и профессій, записи банковъ, деньги и пр., считаются за виды и роды средствъ M.

Пусть явленіе U есть цѣль будущаго времени; а мѣсто свидѣтеля A вышеприведенной аналогической задачи пусть заступаетъ свѣдующее лицо, выбирающее или совѣтующее средство M для цѣли U. Пусть совѣты или внушенія свѣдующаго лица оправдываются на дѣлѣ съ вѣроятностью P. Послѣ рѣшенія исполнить совѣтъ вѣроятности ω_1 и ω_2 будущихъ явленій U и не$-U$ учитываются помощію формулъ (I).

Распространимъ эту задачу на множество свѣдущихъ лицъ, о мнѣніи которыхъ справляются. Пусть обращаются къ n экспертамъ $N_1, N_2, \ldots, N_n$ по вопросу о цѣлесообразности средства M для цѣли U, которая независимо отъ средства M пусть имѣетъ начальную вѣроятность p *). Отвѣты отдѣльныхъ членовъ коллегіи экспертовъ пусть независимы отъ давленія на нихъ и раздѣлились такъ: эксперты $N_1, N_2, \ldots, N_k$ своими голосами утверждаютъ цѣлесообразность средства M, а эксперты $N_{k+1}, \ldots, N_n$, напротивъ считаютъ это средство не цѣлесообразнымъ. Вѣроятности явленій U и не$-U$ до производства справочной анкеты пусть были p и q; послѣ опроса экспертовъ вѣроятности тѣхъ же явленій пусть будутъ $\omega_{1,n}$ и $\omega_{2,n}$. Эти вѣроятности представятся такъ:

$$\omega_{1,n} = \frac{p \,.\, A}{p \,.\, A + q \,.\, B}, \quad \omega_{2,n} = \frac{q \,.\, B}{p \,.\, A + q \,.\, B}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

*) Для собиранія и подачи совѣтовъ свѣдующихъ лицъ учреждаются экспертныя палаты, административные совѣты и пр., а иногда дѣлается опросъ (анкета). Для вопросовъ законодательства учреждаются госуд. дума и госуд. совѣтъ, вырабатывающіе законы M, какъ средства для цѣлей хорошаго управленія страною.

гдѣ
$$A = P_1 \,.\, P_2 \ldots P_k \,.\, (1 - P_{k+1}) \ldots (1 - P_n),$$
$$B = (1 - P_1) \,.\, (1 - P_2) \ldots (1 - P_k) \,.\, P_{k+1} \ldots P_n;$$

при чемъ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ суть вѣроятности, что соотвѣтственные эксперты $N_1, N_2, \ldots, N_n$ не ошибаются въ своихъ утвержденіяхъ. Выраженія (II) легко получить при помощи полной математической индукціи (заключенія отъ n къ $n + 1$), основываясь на формулахъ (I).

Если число $\frac{q \,.\, B}{p \,.\, A}$ окажется весьма малымъ, то средство M окажется почти достовѣрнымъ. Малость же величины

$$\frac{q \,.\, B}{p \,.\, A}$$

зависитъ отъ того, насколько велико число и вѣроподобіе голосовъ, кои *сконцетрировались* на сторонѣ рѣшенія употребить средство M для цѣли U. Единогласіе поднимаетъ вѣроятность $\omega_{1,n}$. Но даже одинъ достовѣрный голосъ можетъ поднять ее до достовѣрности.

Полезно замѣтить, что эта концентрація правдоподобія или вѣроподобія распространяется Пуассономъ на гражанскіе и уголовные суды присяжныхъ.

Нужно имѣть въ виду, что эта концентрація достигается тогда, когда имѣемъ:

$$P_m > \frac{1}{2}, \; m = 1, 2, \ldots n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

Эти неравенства являются однимъ изъ условій вѣроподобія рѣшеній судебной и экспертизной организаціи и того общественнаго мнѣнія или мірского суда, къ которому можно и должно прислушиваться. Если же преобладаютъ противоположныя неравенства, именно:

$$P_m < \frac{1}{2},$$

то судебная организація, парламенты и общественное мнѣніе будутъ слишкомъ часто подносить лукавыя или невѣроподобныя рѣшенія. Таковъ судъ толпы, судъ площадной.

Высота вѣроятности $\omega_{1,n}$ приговора зависитъ отъ числа k; но она зависитъ не отъ одного только числа k обвиняющихъ голосовъ, но и отъ прозорливости и опытности этихъ голосовъ, отъ близости количествъ $P_1, P_2, \ldots, P_k$ и оппозиціонныхъ количествъ $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots, P_n$ къ 1.

Доктрина рѣшенія вопросовъ мірскимъ судомъ по большинству голосовъ поддерживается какъ будто бы всеобщая истина множествомъ софизмовъ. Эта доктрина не всегда вѣрна; она однако же вполнѣ вѣрна, напримѣръ, при одинаковомъ вѣроподобіи судей—экспертовъ, т. е. при $P_1 = P_2 = \ldots = P_n > \frac{1}{2}$.

При условіяхъ (III) можно построить судъ, привлекая для разбора каждаго дѣла n присяжныхъ засѣдателей. Ошибки рѣшенія этой инстанціи исправляются, въ порядкѣ кассацій и апелляцій, высшею инстанціей съ повышенною компетентностью P судей.

Формула (II) не годится для зависимыхъ голосовъ $N_1, \ldots, N_n$.

Весь этотъ методъ не нуженъ и негоденъ тогда, когда рѣшенія строятся не *опытомъ опроса,* а готовымъ знаніемъ, гдѣ *данъ* исчерпывающій принципъ и методъ и гдѣ нѣтъ нужды брать въ соображеніе разныя версіи для перехода отъ *неизвѣстнаго къ извѣстному*, отъ *ноумена къ феномену*.

Тутъ рѣшенія строятся другимъ выводомъ, даваемымъ *логическою машиною* A (см. выше, § 31), связанною съ абсолютно твердыми законами физической и метафизической необходимости.

Во всякомъ случаѣ графикъ со скалою вѣроятности способенъ эвристическимъ методомъ и индуктивными уравненіями § 18, распространенными на показатели духовной культуры (ноумена), проникать въ духъ народа.

IV. Примѣнимъ равенства (I) къ выясненію слѣдующаго важнаго постулата, относящагося къ міру абсолютныхъ и приблизительныхъ достовѣрностей.

Постулатъ. *Если вещь U достовѣрна a priori ($p = 1$), то она достовѣрна и à posteriori ($\omega_1 = 1$) послѣ свидѣтельства.*

Постулатъ этотъ есть очевидная логическая и онтологическая *аксіома*, если апріорная достовѣрность вещи U абсолютная, а не приблизительная. Но тотъ же постулатъ оказывается *не твердымъ правиломъ*, имѣющимъ *изъянъ* или *исключенія*, если достовѣрность p вещи U не абсолютная, а приблизительная. Равенство

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + \frac{1-p}{p \,.\, P} \,.\, (1 - P)},$$

совпадающее съ первымъ изъ уравненій (I), показываетъ, что эти исключенія бываютъ тогда, когда, при весьма маломъ $1 - p$, количество J вида:

$$J = \frac{1 - p}{p \,.\, P} \,.\, (1 - P)$$

оказывается не настолько малымъ, чтобы имъ пренебречь. Такое подозрительное обстоятельство или *изъянъ доказательства* (лакуна) бываетъ при весьма маломъ P, т. е. при невѣропобіи свидѣтеля. Если же P не весьма мало, то постулатъ сохраняетъ силу для приблизительной достовѣрности p; напримѣръ, при $P \geqq {}^1/_2$ число J мало, если p удовлетворяетъ неравенствамъ: $1 > p > 0{,}99$.

§ 34. Теорема, обратная теоремѣ Бернулли. Обратное дѣйствіе простѣйшаго закона большихъ чиселъ. Изъянъ этой обратимости.

Въ теорему Я. Бернулли (см. § 14) входятъ три числа: s, m и p, изъ коихъ числа s и p считаются данными, а число m гадательное.

Если же число p неизвѣстно, а число m дано наблюденіемъ s испытаній, то является вопросъ объ «*обратной*» теоремѣ Я. Бернулли или объ «*обратномъ дѣйствіи*» этого простого закона большихъ чиселъ.

Обратная теорема Я. Бернулли проще всего доказывается съ помощію постулата § 33, п. IV, исходя изъ «прямой» теоремы, дающей апріорную достовѣрность. Но такъ какъ эта достовѣрность только приблизительная, то тутъ надо имѣть въ виду небольшой изъянъ. Поэтому нелишними являются и другія доказательства обратной теоремы Я. Бернулли. Мы предложимъ слѣдующее доказательство.

Пусть E есть нѣкоторое явленіе, вѣроятность p котораго намъ совершенно неизвѣстна. Не зная вѣроятности p, мы можемъ сдѣлать относительно ея безчисленное множество гипотезъ. Разумѣя подъ n цѣлое положительное число, стремящееся къ ∞, и полагая $dx = \frac{1}{n}$, будемъ разумѣть подъ x перемѣнное, способное принимать слѣдующія значенія: $0, dx, 2dx, \ldots, (n-1)\,dx$. Вмѣстѣ съ тѣмъ гипотезу, состоящую въ предположеніи, что неизвѣстная вѣроятность $p = x$, будемъ обозначать черезъ $C(x)$. Такимъ образомъ въ предѣлѣ, при $n = \infty$ будемъ имѣть безконечный рядъ несовмѣстимыхъ и всевозможныхъ гипотезъ $C(0)$, (dx), $C(2dx), \ldots, C(ndx - dx)$ относительно неизвѣстной вѣроятности p.

Вѣроятность гипотезы $C(x)$ до начала наблюденій обозначимъ черезъ $f(x)\,dx$, причемъ функція $f(x)$ должна удовлетворять слѣдующему условію:

$$\sum f(x)\,dx = 1,$$

гдѣ суммованіе распространяется на всѣ вышеуказанныя гипотезы. Такъ какъ сумма эта равносильна интегралу, то предыдущее условіе представляется такъ:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Что касается дальнѣйшихъ свойствъ функціи $f(x)\,dx$, то функція эта можетъ имѣть различныя значенія, смотря по условіямъ задачи. Въ томъ случаѣ, когда величина p неизвѣстна въ такой степени, что не имѣемъ никакихъ основаній считать какое либо одно значеніе вѣроятности p вѣроятнѣе, чѣмъ другое, всѣ гипотезы $C(x)$ обыкновенно догматически признаютъ равновѣроятными. Если допустить эту *ультрагипотезу,* то, принимая во вниманіе условіе (1), будемъ имѣть: $f(x) = 1$.

Однако, имѣя въ виду разсмотрѣть здѣсь болѣе общій случай смѣси незнанія и знанія, мы не будемъ дѣлать догматическаго опредѣленія функціи $f(x)$ и предположимъ только, что при измѣненіи x отъ 0 до 1 функція эта *сохраняетъ конечную величину и не обращается въ нуль.*

Не будемъ устранять въ нашемъ разсмотрѣніи даже и того случая, когда функція $f(x)$ измѣняется прерывно и не допускаетъ разложеній ея въ рядъ Тейлора.

Предположимъ теперь, что опытъ, которому свойственно событіе E, воспроизведенъ s разъ, причемъ событіе E и противоположное ему событіе F состоялись соотвѣтственно m разъ и $s-m$ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ опредѣленномъ порядкѣ. Послѣ этого наблюденія (à posteriori) вѣроятность гипотезы $C(x)$ измѣнится. Обозначивъ вѣроятность à posteriori гипотезы $C(x)$ черезъ $\omega(x)\,dx$ и имѣя въ виду опредѣлить ее по теоремѣ Байе, мы должны получить условную вѣроятность [при допущеніи гипотезы $C(x)$] того, что при s испытаніяхъ событія E и F состоятся въ опредѣленномъ порядкѣ m разъ и $s-m$ разъ. Эта условная вѣроятность будетъ:

$$x^m (1-x)^{s-m},$$

ибо при допущеніи гипотезы $C(x)$ вѣроятности противоположныхъ событій E и F будутъ x и $1-x$. Затѣмъ на основаніи теоремы Байе находимъ:

$$\omega(x)\,dx = \frac{f(x)\,x^m\,(1-x)^{s-m}\,dx}{\int_0^1 f(x)\,x^m\,(1-x)^{s-m}\,dx} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Имѣя вѣроятность à posteriori гипотезы $C(x)$, вычислимъ вѣроятность P того, что неизвѣстная вѣроятность p явленія E заключается въ предѣлахъ a и b, т. е.

$$a \leqq p \leqq b, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

гдѣ подъ a и b разумѣются правильныя положительныя дроби. Очевидно вѣроятность P осуществленія неравенствъ (3) есть то же, что вѣроятность осуществленія одной изъ такихъ гипотезъ $C(x)$, для которыхъ x заключено между a и b. Поэтому искомая вѣроятность P, на основаніи теоремы сложенія, представится такъ:

$$P = \int_a^b \omega(x)\,dx = \frac{\int_a^b f(x)\,x^m\,(1-x)^{s-m}\,dx}{\int_0^1 f(x)\,x^m\,(1-x)^{s-m}\,dx} \quad \ldots \quad (4)$$

Пусть

$$a = \frac{m}{s} - t \text{ и } b = \frac{m}{s} + t.$$

При этихъ условіяхъ неравенства (3) получатъ видъ:

$$-t \leqq \frac{m}{s} - p \leqq +t, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

и вѣроятность P осуществленія этихъ неравенствъ представится такъ:

$$P = \frac{\int_{\alpha-t}^{\alpha+t} f(x)\,y\,dx}{\int_0^1 f(x)\,y\,dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{m}{s} \text{ и } y = x^m (1-x)^{s-m} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Функція y при измѣненіи x отъ 0 до 1 имѣетъ единственный maximum, который представляется такъ:

$$Y = \alpha^m (1-\alpha)^{s-m}, \; \alpha = \frac{m}{s}.$$

Введемъ еще слѣдующія обозначенія:

$$y_0 = \Big|^{x=\alpha-t} y = (\alpha - t)^m (1 - \alpha + t)^{s-m},$$

$$y_1 = \Big|^{x=\alpha+t} y = (\alpha + t)^m (1 - \alpha - t)^{s-m},$$

гдѣ вообще

$$\Big|^{x=\xi} \varphi(x) = \varphi(\xi).$$

Далѣе введемъ обозначенія:

$$A = \int_0^{\alpha-t} f(x)\,y\,dx, \qquad B = \int_{\alpha-t}^{\alpha} f(x)\,y\,dx,$$

$$C = \int_{\alpha}^{\alpha+t} f(x)\,y\,dx, \qquad D = \int_{\alpha+t}^{1} f(x)\,y\,dx.$$

Теперь вѣроятность P неравенствъ (5) представится такъ:

$$P = \frac{B + C}{A + B + C + D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Разсмотримъ сначала интегралы A и D.
Имѣемъ:

$$A = \int_0^{\alpha - t} f(x)\, y dx.$$

При $0 \leqq x \leqq \alpha - t$ функція y возрастаетъ отъ нуля до вышеуказанной величины y_0, и слѣдовательно при измѣненіи x отъ 0 до $\alpha - t$ будемъ имѣть: $y \leqq y_0$. Разумѣя, сверхъ того, подъ k_0 наибольшее значеніе $f(x)$ при измѣненіи x отъ 0 до $\alpha - t$, найдемъ: $f(x)\, y\, dx \leqq y_0 k_0\, dx$. Интегрируя обѣ части этого неравенства въ предѣлахъ 0 и $\alpha - t$, получимъ:

$$A \leqq \int_0^{\alpha - t} y_0 k_0\, dx,$$

или

$$A \leqq y_0 k_0 (\alpha - t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Переходя къ интегралу D, замѣтимъ, что при измѣненіи x отъ $\alpha + t$ до 1 функція y убываетъ отъ вышеуказанной величины y_1 до 0, такъ что при $\alpha + t \leqq x \leqq 1$, будемъ имѣть:

$$y \leqq y_1.$$

Обозначивъ далѣе черезъ k_1 наибольшее значеніе функціи $f(x)$ при измѣненіи x отъ $\alpha + t$ до 1, будемъ имѣть:

$$f(x)\, y\, dx \leqq y_1 k_1\, dx.$$

Интегрируя обѣ части этого неравенства между предѣлами $\alpha + t$ и 1, будемъ имѣть:

$$D \leqq y_1 k_1 (1 - \alpha - t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Разсмотримъ теперь интегралы B и C. Имѣемъ:

$$B = \int_{\alpha - t}^{\alpha} f(x)\, y\, dx.$$

При помощи равенства (7) убѣждаемся, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s(\alpha - x)}{x(1 - x)} y,$$

откуда

$$y = \frac{x(1 - x)}{s(\alpha - x)} \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

При измѣненіи x отъ $\alpha - t$ до α будемъ имѣть:

$$0 \leqq \alpha - x \leqq t.$$

Эти неравенства и равенство (11) показываютъ, что

$$y \geqq \frac{x(1 - x)}{st} \frac{dy}{dx},$$

гдѣ $\alpha - t \leqq x \leqq \alpha$. Поэтому, разумѣя подъ μ_0 наименьшее значеніе функціи

$$x(1 - x) f(x)$$

при измѣненіи x отъ $\alpha - t$ до α, будемъ имѣть:

$$f(x)\, y\, dx \geqq \frac{\mu_0}{st} \frac{dy}{dx} dx.$$

Интегрируя обѣ части этого неравенства между предѣлами $\alpha - t$ и α, будемъ имѣть:

$$B \geqq \frac{\mu_0}{st} (Y - y_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

гдѣ Y и y_0 суть величины, значеніе которыхъ объяснено выше.

Переходя къ интегралу C, замѣчаемъ, что при измѣненіи x отъ α до $\alpha + t$ будемъ имѣть: $0 \leqq x - \alpha \leqq t$. Эти неравенства и равенство (11) показываютъ, что

$$y \geqq \frac{x(1 - x)}{st} \left(-\frac{dy}{dx}\right),$$

гдѣ $\alpha \leqq x \leqq \alpha + t$. Далѣе, разумѣя подъ μ_1 наименьшее значеніе функціи $x(1 - x) f(x)$ при измѣненіи x отъ α до $\alpha + t$, будемъ имѣть:

$$f(x)\, y\, dx \geqq -\frac{\mu_1}{st} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx.$$

Интегрируя обѣ части этого неравенства между предѣлами α и $\alpha + t$, будемъ имѣть:

$$C \geqq \frac{\mu_1}{st} (Y - y_1), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

гдѣ Y и y_1 имѣютъ вышеуказанныя значенія.

Нарушимъ равенство (8), замѣнивъ во второй его части величины A и D величинами, стоящими во вторыхъ частяхъ неравенствъ (9) и (10), а величины B и C величинами, стоящими во вторыхъ частяхъ неравенствъ (12) и (13). Получимъ неравенство:

$$P > \frac{\frac{\mu_0}{st}\left(Y - y_0\right) + \frac{\mu_1}{st}\left(Y - y_1\right)}{\lambda_0 y_0 + \frac{\mu_0}{st}\left(Y - y_0\right) + \frac{\mu_1}{st}\left(Y - y_1\right) + \lambda_1 y_1},$$

гдѣ $\lambda_0 = k_0(\alpha - t)$ и $\lambda_1 = k_1(1 - \alpha - t)$. Слѣдовательно

$$1 > P > \frac{\frac{\mu_0}{t}\left(1 - \frac{y_0}{Y}\right) + \frac{\mu_1}{t}\left(1 - \frac{y_1}{Y}\right)}{\lambda_0 \frac{sy_0}{Y} + \frac{\mu_0}{t}\left(1 - \frac{y_0}{Y}\right) + \frac{\mu_1}{t}\left(1 - \frac{y_1}{Y}\right) + \lambda_1 \frac{sy_1}{Y}} . \quad (14)$$

Имѣя въ виду разсмотрѣть эти неравенства въ предѣлѣ, когда число s стремится къ безконечности, опредѣлимъ сначала предѣлы выраженій:

$$\frac{sy_0}{Y}, \frac{sy_1}{Y}, \frac{y_0}{Y}, \frac{y_1}{Y}.$$

Докажемъ, что предѣлы этихъ выраженій при возрастаніи s до ∞ суть нули. Имѣемъ:

$$\frac{sy_0}{Y} = \frac{s(\alpha - t)^m (1 - \alpha + t)^{s-m}}{\alpha^m (1 - \alpha)^{s-m}} = \left[s^{\frac{1}{s}}\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(1 + \frac{t}{1-\alpha}\right)^{-\alpha s}\right]^s.$$

Предполагая, что величина t достаточно мала, и разлагая логариѳмъ $\frac{sy_0}{Y}$ по степенямъ t, найдемъ:

$$lg \frac{sy_0}{Y} = -s\left[\frac{t^2(1+\delta)}{2\alpha(1-\alpha)} - \frac{lg\, s}{s}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ δ есть величина весьма малая при маломъ t.

Равенство (15) показываетъ, что

$$Lim\left\{lg \frac{sy_0}{Y}\right\} = -\infty.$$

откуда слѣдуетъ, что

$$Lim\left(\frac{sy_0}{Y}\right) = 0.$$

Подобнымъ образомъ убѣждаемся, что

$$Lim\left(\frac{sy_1}{Y}\right) = 0.$$

Тѣмъ болѣе будетъ имѣть:

$$Lim\left(\frac{y_0}{Y}\right) = 0 \text{ и } Lim\left(\frac{y_1}{Y}\right) = 0.$$

Эти результаты и неравенства (14) показываютъ, что вѣроятность P неравенствъ (5) при возрастаніи s до ∞ стремится къ единицѣ. Заключеніе это представляетъ теорему, извѣстную подъ именемъ обратной теоремы Якова Бернулли. Теорему эту можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Теорема. *Пусть p есть неизвѣстная вѣроятность явленія E и пусть опытъ, которому свойственно это явленіе, воспроизведенъ былъ s разъ, причемъ событіе E состоялось m разъ. Вѣроятность P à posteriori того, что неизвѣстная вѣроятность p удовлетворяетъ неравенствамъ:*

$$-t \leqq \frac{m}{s} - p \leqq +t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

стремится къ 1 при возрастаніи s до ∞.

Примѣчаніе. Въ предшествующемъ доказательствѣ предполагается возможнымъ выбрать положительное конечное t такъ, чтобы величины $\alpha - t$ и $\alpha + t$ были правильными положительными дробями. Поэтому предшествующее доказательство теряетъ силу, если величина $\alpha = \frac{m}{s}$ стремится къ 0 или къ 1 при возрастаніи s до ∞. Нужно сказать, что при этомъ поправимомъ изъянѣ неравенства (16) обратной теоремы Бернулли требуютъ видоизмѣненія, исходя изъ неравенствъ (3) и формулы (4); въ этой формулѣ нужно положить $a = 0$ и $b = \frac{m}{s} + l$, если $\frac{m}{s}$ стремится къ нулю; если же $\frac{m}{s}$ стремится къ 1, то въ формулѣ (4) и неравенствахъ (3) нужно положить $a = \frac{m}{s} - t$ и $b = 1$.

Одна изъ задачъ о вѣроятностяхъ будущихъ явленій.

Въ предшествующемъ мы избѣгали догматическаго метода, допускающаго *ультрагипотезу*, что à priori *всѣ гипотезы $C(k\,.\,dx)$ равновѣроятны*. Эта наивная ультрагипотеза однако же со временъ Лапласа и Гаусса допускается во множествѣ важныхъ теорій, упростившихъ рѣшеніе общихъ вопросовъ, покрытыхъ совершенною темнотою незнанія и недвигавшихся ранѣе по причинѣ ихъ крайней сложности и помянутой темноты. Опытъ потомъ поднимаетъ довѣріе къ истинной изъ этихъ гипотезъ.

Воспользуемся этою наивною ультрагипотезой для рѣшенія пока слѣдующей простой задачи.

Пусть E есть событіе, вѣроятность p котораго намъ совершенно неизвѣстна, причемъ всѣ возможныя значенія этой вѣроятности до начала наблюденій равновѣроятны. Пусть опытъ, которому свойственно явленіе E, былъ воспроизведенъ s разъ, причемъ событіе E состоялось m разъ. Вообразимъ затѣмъ, что опытъ, которому свойственно

событіе E, предполагаютъ воспроизвести въ будущемъ еще σ разъ. Опредѣлить вѣроятность à posteriori того, что при этихъ σ опытахъ событіе E состоится μ разъ.

Полагая:

$$dx = \frac{1}{n},$$

гдѣ n есть въ предѣлѣ безконечно большое число, и разумѣя подъ x перемѣнное, способное принимать значенія: 0, dx, $2dx$, ..., $(n-1)\,dx$, будемъ обозначать черезъ $C(x)$ гипотезу, состоящую въ предположеніи, что неизвѣстная вѣроятность p явленія E равна x, т. е. $p = x$. Гипотезы эти до начала наблюденій считаются, по условію, равновѣроятными; послѣ же наблюденія m-кратнаго появленія событія E при s испытаніяхъ вѣроятность гипотезы $C(x)$, на основаніи теоремы Байе, представится такъ:

$$\omega(x)\,dx = \frac{x^m(1-x)^{s-m}\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^{s-m}\,dx} = \frac{(1+s)!\,x^m(1-x)^{s-m}\,dx}{m!\,(s-m)!}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ вообще: $k! = 1.2 \ldots k$; $0! = 1$.

Далѣе находимъ условную вѣроятность [при допущеніи гипотезы $C(x)$] того, что при σ будущихъ испытаніяхъ событія E и F состоятся μ разъ и $\sigma - \mu$ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ какомъ-либо порядкѣ. Эта условная вѣроятность будетъ:

$$C_\sigma^\mu\, x^\mu (1-x)^{\sigma-\mu},$$

гдѣ C_σ^μ есть биноміальный коэффиціентъ.

Полная вѣроятность á posteriori (послѣ s наблюденныхъ опытовъ) того же событія будетъ:

$$P_{\sigma,\,\mu} = C_\sigma^\mu \int_0^1 \omega(x)\,x^\mu(1-x)^{\sigma-\mu}\,dx = \frac{C_\sigma^\mu\,(s+1)!}{m!\,(s-m)!}\int_0^1 x^{m+\mu}(1-x)^{s+\sigma-m-\mu}\,dx =$$

$$= \frac{\sigma!\,(1+s)!\,(m+\mu)!\,(s+\sigma-m-\mu)!}{\mu!\,(\sigma-\mu)!\,m!\,(s-m)!\,(s+\sigma+1)!}.$$

Возьмемъ, напримѣръ, частный случай: $\sigma = \mu = 1$, т. е. найдемъ вѣроятность à posteriori того, что при будущемъ одномъ опытѣ состоится событіе E. Вѣроятность эта будетъ:

$$P_{1,\,1} = \frac{m+1}{s+2}.$$

По этой формулѣ Лапласъ опредѣляетъ вѣроятность, что завтра будетъ день. Нужно положить $s = m = \infty$, получится $P_{1,1} = 1$.

Формула (1) можетъ служить для доказательства обратной теоремы Я. Бернулли по *способу* Лапласа.

§ 35. Четвертая антиномія Канта (о необходимомъ существѣ).

Люди, касаясь жизненныхъ субстанціональныхъ вопросовъ, злободневно заинтересованы въ установленіи разрѣшающихъ формулъ, резольвентъ, по третьей антиноміи «Критики» Канта и его «Пролегоменовъ» (свобода или необходимость?).

Но по плану «Пролегоменовъ» за третьею антиноміей должна слѣдовать четвертая — о невидимомъ Абсолютномъ Существѣ (въ ряду міровыхъ причинъ есть ли необходимое существо или же въ мірѣ все случайно?).

Легчайшій примѣръ § 32 показываетъ, что послѣдовательный опытъ при данной схемѣ можетъ привести къ познанію невидимой, но постоянной гипотетической причины. Абсолютъ, какъ постоянная невидимая причина (субстанція), дѣйствующая въ міровой жизни, аналогически познаваема религіознымъ опытомъ, который есть послѣдовательный духовный подвигъ (см. «Мысли» Паскаля). Естественное богопознаніе, достигаемое въ духовномъ подвигѣ, не есть познаніе лицомъ къ лицу, но познаніе по *слѣдамъ*, дѣлая субстанціональную гипотезу, что Абсолютъ живетъ и въ «устойчивости міропорядка» и въ промыслѣ или «движеніи вещества» («Богъ» Державина; см. также проф. *С. Глаголева*: «Сверхестественное откровеніе и естественное богопознаніе внѣ истинной Церкви», стр. 20 и 239—342. Отдѣльные оттиски изъ журнала «Вѣра и разумъ» за 1906 годъ. Харьковъ). Противоположностью живому Абсолюту становится формальная символическая мертвая сила вздутаго бумагою золотого тельца, т. е. сила *фикціи*, хитроумной спекуляціи.

Злободневности, примыкающія къ третьей антиноміи, и крайности солипсизма и жадности хозяйствующихъ субъектовъ исправляются лишь на почвѣ вѣры, какъ познанія живого Абсолюта. У религіозныхъ обществъ установились тысячелѣтнія схемы этого познанія, и работаютъ по этимъ схемамъ какъ священники, такъ и міряне. При добросовѣстномъ примѣненіи графиковъ вѣроятности и индуктивныхъ уравненій § 18 открытія («эврика») науки и Откровенія религіи сходятся и дополняютъ другъ друга въ исторіи. Сверхъ того космологическое доказательство бытія Бога не такъ плохо, какъ думаетъ Кантъ.

Субъективную форму сознанія, трактуемаго въ вѣроятностной теоріи познанія, М. Ф. Таубе изображаетъ концентрическими темными кольцами; степень бѣлизны кольца означаетъ степень проясненности мысли,

чернота обозначаетъ темноту незнанія. Внѣшнее пространство всѣхъ колецъ наполнено густою черною краскою, обозначающею темноту незнанія субъектомъ A внѣшняго или трансубъективнаго (въ математикѣ—трансфинитнаго). Затѣмъ, по пути отъ этой черноты къ центру колецъ, кольцевыя полосы становятся болѣе и болѣе бѣлыми, соотвѣтствующими тренію субъекта съ субъектами; наиболѣе бѣлое кольцо соотвѣтствуетъ самосознанію. Въ центрѣ же этой системы ⊙ стоитъ опять весьма темное пятнышко *) ему соотвѣтствуетъ незнаніе самого себя, ибо человѣкъ часто не можетъ дать самъ себѣ отчета, какъ онъ поступитъ въ будущемъ или какъ онъ совершилъ то или другое дѣйствіе вопреки самосознанію.

Человѣческія общества представляютъ сочетанія или созвѣздія:

⊙⊙⊙. . .

Собирательное совѣстливое сознаніе, имѣя вѣрный канонъ и запасы силъ, способно выкупать ошибки незнанія; «свѣтъ во тьмѣ свѣтитъ», онъ могъ бы водворить покровительство и миръ на землѣ, если бы невѣжество и лукавство не вносили въ канонъ революцію, отрицательный продуктъ свободы воли.

Школа съ ея искусствомъ народнаго просвѣщенія должна считаться съ формой субъективнаго сознанія, ибо реформа сознанія темныхъ людей есть одно изъ важнѣйшихъ условій движенія по пути отъ неизвѣстнаго къ извѣстному, отъ мрака къ истинному свѣту Абсолюта и къ торжеству тріединства правды, блага и красоты надъ ихъ противоположностями.

«Вѣрующее воспріятіе» и «вѣроятностно озареніе» нужно отличать отъ «мистическаго воспріятія» и «магіи». Это различіе отдѣляетъ *научную* философію свободы и необходимости отъ философіи мистическаго воспріятія (Н. Лосскій, Н. Бердяевъ). Органъ мистики, бумага и языкъ, есть орудіе колоссальныхъ подмѣнъ понятій. Научная философія беретъ подъ судъ мистику свободы, вбирая въ себя очищенное питаніе и отъ вѣры, и отъ науки, кои обѣ внушаются человѣчеству универсальнымъ разумомъ и входятъ своими функціями въ учрежденія.

---

*) Это пятнышко *скептиковъ* превращается въ яркій руководящій Свѣтъ вѣры для тѣхъ „я“, кои увѣровали до прозрѣнія.

ГЛАВА VII.

Приложеніе теоріи вѣроятностей къ изслѣдованію результатовъ и погрѣшностей измѣреній.

§ 36. Объ ошибкахъ измѣреній.

Пусть произведено измѣреніе какой-нибудь величины со всевозможною точностью, какую позволяетъ измѣрительный приборъ. Съ какою бы тщательностью ни производилось измѣреніе, наблюдатель вообще не можетъ избѣжать ошибокъ въ результатахъ измѣреній. Ошибки при такихъ измѣреніяхъ бываютъ двухъ родовъ: однѣ, происходящія отъ постоянныхъ причинъ, называются *систематическими*; другія, происходящія отъ причинъ непостоянныхъ, неопредѣленныхъ, до безконечности разнообразныхъ—короче случайныхъ, называются ошибками *случайными*.

Теорія вѣроятностей изслѣдуетъ только ошибки, происходящія отъ случайныхъ причинъ. Поэтому, приступая къ опредѣленію случайныхъ ошибокъ съ помощью способовъ теоріи вѣроятностей, нужно предварительно исключить, насколько это возможно, ошибки систематическія. Послѣднія ошибки бываютъ весьма различны. Такъ при измѣреніи угла ошибки отъ постоянныхъ причинъ будутъ:

1) Ошибки отъ несовершенной точности инструмента: отъ неточности дѣленій, отъ неправильнаго положенія оси инструмента.

2) Ошибки, происходящія отъ вліянія окружающей наблюдателя среды: отъ вліянія температуры среды, давленія, отъ переломленія лучей свѣта въ атмосферѣ (рефракція) и проч.

3) Ошибки, происходящія отъ личныхъ свойствъ наблюдателя, отъ несовершенства органовъ чувствъ наблюдателя. Поправки этихъ ошибокъ извѣстны подъ именемъ личныхъ уравненій.

Всѣ ошибки отъ постоянныхъ причинъ, предъ опредѣленіемъ случайныхъ ошибокъ, должны быть найдены и устранены. Въ послѣдующемъ мы будемъ предполагать, что устраненіе это сдѣлано на самомъ дѣлѣ.

Это правило примѣняется и къ *символическимъ* измѣреніямъ теченій цѣнности посредствомъ финансовъ, употребляемымъ для добыванія графиковъ общественной механики, подобныхъ графикамъ то барометра, то термометра, то электрометровъ. Эти измѣренія способны, по исключеніи систематическихъ погрѣшностей, къ значительнымъ и бурнымъ случайнымъ ошибкамъ.

§ 37. Вѣроятность случайной погрѣшности.

Предположимъ, что наблюдатель имѣетъ въ виду произвести измѣреніе нѣкоторой величины. Ожидаемый результатъ измѣренія будетъ содержать въ себѣ случайную погрѣшность Δ. Пусть погрѣшность эта способна принимать значенія:

$$-\infty \ldots -2d\Delta,\ -d\Delta,\ 0,\ d\Delta,\ 2d\Delta, \ldots +\infty. \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Вѣроятность того, что погрѣшность получитъ опредѣленное значеніе Δ изъ числа указанныхъ въ строкѣ (I) есть функція отъ Δ, которую будемъ обозначать черезъ $\varphi(\Delta)\,d\Delta$ и будемъ называть *вѣроятностью погрѣшности* Δ. Имѣя эту вѣроятность, легко рѣшать всѣ остальные вопросы о вѣроятностяхъ погрѣшностей. Найдемъ, напримѣръ, вѣроятность $P_{a,\,b}$ того, что погрѣшность измѣренія будетъ заключена между предѣлами a и b $(a<b)$.

На основаніи теоремы сложенія вѣроятностей будемъ имѣть:

$$P_{a,\,b} = \sum \varphi(\Delta)\,d\Delta,$$

гдѣ суммованіе распространяется на всѣ значенія Δ, взятыя изъ ряда величинъ (I) и заключенныя между предѣлами a и b. Такъ какъ сумма эта равносильна интегралу между предѣлами a и b, то

$$P_{a,\,b} = \int_a^b \varphi(\Delta)\,d\Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Помня, что погрѣшность достовѣрно будетъ заключаться между предѣлами $-\infty$ и $+\infty$, и полагая въ равенствѣ (1) $a=-\infty$ и $b=+\infty$, находимъ:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\,d\Delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

§ 38. Вѣроятность ожидаемаго результата измѣренія.

Имѣя вѣроятность $\varphi(\Delta)\,d\Delta$ погрѣшности Δ, легко найти вѣроятность полученія даннаго значенія A результата измѣренія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть a есть измѣряемая величина. Вѣроятность того, что результатъ

измѣренія получитъ значеніе A, есть то же, что вѣроятность погрѣшности

$$\Delta = A - a,$$

т. е. вѣроятность эта будетъ

$$\varphi(A-a)\,dA.$$

Вѣроятность эту короче будемъ называть *вѣроятностью* результата A измѣренія.

§ 39. Нѣкоторыя свойства функціи $\varphi(\Delta)$.

Сдѣлаемъ здѣсь слѣдующія допущенія относительно приспособленій наблюдателя, коими обусловливаются нѣкоторыя свойства функціи $\varphi(\Delta)$.

1) Равныя по абсолютной величинѣ и противоположныя по знаку ошибки равновѣроятны. Допущеніе этого свойства мотивируется тѣмъ соображеніемъ, что наблюдатель обыкновенно одинаково старается не дѣлать какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ ошибокъ. Вслѣдствіе этого, вѣроятность $\varphi(\Delta)\,d\Delta$ погрѣшности Δ и вѣроятность $\varphi(-\Delta)\,d\Delta$ погрѣшности $-\Delta$ равны:

$$\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

т. е. $\varphi(\Delta)$ есть *четная функція*. Изъ этого свойства вытекаетъ, какъ простое слѣдствіе, тотъ результатъ, что *математическое ожиданіе а погрѣшности* Δ *равно нулю*. Въ самомъ дѣлѣ, математическое ожиданіе это, какъ сумма произведеній всевозможныхъ значеній погрѣшности Δ на соотвѣтственныя вѣроятности этихъ значеній, представится такъ:

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varphi(\Delta)\,d\Delta.$$

Интегралъ этотъ при условіи (3) равенъ нулю, т. е.

$$a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

2) Ошибки наблюденій тѣмъ менѣе вѣроятны, чѣмъ онѣ болѣе по абсолютной величинѣ. Слишкомъ большія ошибки въ тщательныхъ измѣреніяхъ даже почти совсѣмъ не вѣроятны. На этомъ основаніи *функція* $\varphi(\Delta)$ *должна убывать при возрастаніи абсолютной величины* Δ. Быстрота убыванія функціи $\varphi(\Delta)$ при возрастаніи абсолютной величины Δ до ∞ должна быть такова, чтобы математическое ожиданіе b квадрата погрѣшности, представляемое интегралomъ

$$b = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2\varphi(\Delta)\,d\Delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

сохраняло значеніе, не превосходящее даннаго конечнаго предѣла. Въ противномъ случаѣ измѣреніе признается негоднымъ.

Примѣчаніе. Величина b, опредѣляемая равенствомъ (5), находится въ тѣсной связи со степенью точности измѣренія; ниже мы увидимъ, что величина эта обратно пропорціональна квадрату, такъ называемой, мѣры точности измѣренія. Чѣмъ болѣе b, тѣмъ точность измѣренія считается меньшею. Замѣтимъ, что, если произведено большое число m одинаковыхъ измѣреній данной величины и получены ошибки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, то приближенно можно полагать:

$$b = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta^2_m}{m} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

ибо, на основаніи извѣстнаго свойства математическаго ожиданія квадрата Δ, вторая часть равенства (6) должна стремиться къ математическому ожиданію b при возрастаніи m до ∞.

§ 40. Замѣчаніе о наблюденіяхъ равноточныхъ и неравноточныхъ.

Если рядъ наблюденій производится однимъ и тѣмъ же лицомъ посредствомъ одного и того же инструмента, вообще, при одинаковыхъ средствахъ и предосторожностяхъ, то наблюденія этого рода называются *равноточными*. Вѣроятности погрѣшностей каждаго изъ такихъ наблюденій будутъ выражаться посредствомъ функціи $\varphi(\Delta)$, имѣющей одинъ и тотъ же составъ.

Если же наблюденія производились разными лицами, неодинаково искусными въ наблюденіяхъ, разными инструментами, вообще, при различныхъ приспособленіяхъ, то такія наблюденія называются *неравноточными*. Вѣроятности погрѣшностей двухъ неравноточныхъ наблюденій будутъ выражаться посредствомъ двухъ различныхъ функцій $\varphi_1(\Delta)$ и $\varphi_2(\Delta)$, причемъ каждой изъ этихъ функцій, допустимъ, будутъ принадлежать общія свойства, указанныя въ предыдущемъ параграфѣ.

§ 41. Свойство ариѳметической средины погрѣшностей наблюденій и результатовъ наблюденій.

Вообразимъ m наблюденій и будемъ разсматривать общій случай, допуская, что наблюденія эти могутъ быть и неравноточными. Каждому наблюденію соотвѣтствуетъ нѣкоторая случайная погрѣшность. Вѣроятности погрѣшностей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ этихъ измѣреній соотвѣтственно представятся такъ:

$$\varphi_1(\Delta_1)\,d\Delta_1,\ \varphi_2(\Delta_2)\,d\Delta_2, \ldots,\ \varphi_m(\Delta_m)\,d\Delta_m.$$

По доказанному выше математическое ожиданіе каждой изъ этихъ погрѣшностей есть нуль.

Обозначимъ соотвѣтственно математическія ожиданія квадратовъ этихъ погрѣшностей черезъ $b_1, b_2, \ldots, b_m$. По вышедоказанному будемъ имѣть:

$$b_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1^2 \varphi_1(\Delta_1)\,d\Delta_1,$$

$$b_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_2^2 \varphi_2(\Delta_2)\,d\Delta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2_m \varphi_m(\Delta_m)\,d\Delta_m.$$

Примѣнимъ теперь къ данному случаю теорему Чебышева (§ 21). По этой теоремѣ вѣроятность P того, что будутъ имѣть силу неравенства:

$$-\tau\sqrt{\frac{\Sigma b}{m}} \leqq \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_m}{m} \leqq +\tau\sqrt{\frac{\Sigma b}{m}}, \quad (6)$$

должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \frac{1}{\tau^2 m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Такъ какъ величины $b_1, b_2, \ldots, b_m$ конечны, то конечна и ариѳметическая средина ихъ $\frac{\Sigma b}{m}$. Выберемъ τ постояннымъ, но достаточно малымъ числомъ. Тогда

$$\tau\sqrt{\frac{\Sigma b}{m}}$$

будетъ малымъ количествомъ, а

$$\frac{1}{\tau^2 m}$$

будетъ стремиться къ нулю при возрастаніи m до ∞, причемъ въ предѣлѣ неравенства (6) и (7) приведутъ насъ къ слѣдующему заключенію: *вѣроятность P того, что среднее ариѳметическое погрѣшностей m наблюденій не превзойдетъ даннаго сколь угодно малаго числа, при возрастаніи m до ∞ стремится къ достовѣрности.*

Отъ этого вывода весьма просто переходимъ къ важному выводу, касающемуся средняго ариѳметическаго результатовъ наблюденій.

Пусть измѣряемая величина есть a и пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ будутъ ожидаемые результаты m измѣреній; если $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ будутъ соотвѣтственно ошибки этихъ наблюденій, то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_1 - a, \\ \Delta_2 &= A_2 - a, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_m &= A_m - a. \end{aligned}$$

Внеся эти выраженія погрѣшностей въ неравенства (6), придемъ къ слѣдующему заключенію: вѣроятность P того, что будутъ имѣть силу неравенства:

$$-\tau\sqrt{\frac{\Sigma b}{m}} < \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_m}{m} - a < +\tau\sqrt{\frac{\Sigma b}{m}},$$

должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \frac{1}{\tau^2 m}.$$

На основаніи этого вывода приходимъ къ слѣдующему заключенію: *вѣроятность P того, что разность между среднимъ ариѳметическимъ изъ m результатовъ измѣреній и измѣряемою величиною не превзойдетъ данной, сколь угодно малой величины, при возрастаніи m до ∞ стремится къ достовѣрности.*

§ 42. Вѣроятность системы погрѣшностей и вѣроятность системы результатовъ наблюденій.

Положимъ, что имѣемъ въ виду произвести m измѣреній какой-нибудь ел ичины.

Вѣроятность P того, что при этихъ измѣреніяхъ получится такая система погрѣшностей:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m,$$

очевидно, есть вѣроятность сложнаго событія, состоящаго въ совпаденіи ряда независимыхъ простыхъ событій, и выразится на основаніи теоремы умноженія такъ:

$$P = \varphi_1(\Delta_1)\,\varphi_2(\Delta_2)\ldots\varphi_m(\Delta_m)\,d\Delta_1\,d\Delta_2\ldots d\Delta_m \quad \ldots\ldots (9)$$

Теперь не трудно опредѣлить вѣроятность совпаденія системы результатовъ наблюденій. Различимъ два случая.

1) Положимъ, что измѣряемая величина извѣстна и равна a. Обозначимъ ожидаемые результаты m предполагаемыхъ измѣреній черезъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Обозначивъ черезъ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ соотвѣтственныя погрѣшности этихъ измѣреній, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 = A_1 - a,\quad \Delta_2 = A_2 - a, \ldots,\quad \Delta_m = A_m - a; \\ d\Delta_1 = dA_1,\quad d\Delta_2 = dA_2, \ldots,\quad d\Delta_m = dA_m. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10)$$

Очевидно, появленіе опредѣленной системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ результатовъ измѣреній есть событіе, равносильное появленію системы погрѣшностей, опредѣляемыхъ изъ уравненій (10). Поэтому вѣроятность P системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ результатовъ m измѣреній есть то же, что вѣроятность системы погрѣшностей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, опредѣляемыхъ изъ уравненій (10). На основаніи (3), (9) и (10) эта вѣроятность P представится такъ:

$$P = \varphi_1(a - A_1)\,\varphi_2(a - A_2)\ldots\varphi_m(a - A_m)\,dA_1\,dA_2\ldots dA_m \quad \ldots (11)$$

2) Положимъ, что измѣряемая величина намъ не извѣстна. Въ этомъ случаѣ мы опредѣлимъ только условную вѣроятность данной системы результатовъ наблюденій при допущеніи той или другой изъ указанныхъ ниже гипотезъ относительно измѣряемой величины. Разумѣя подъ x перемѣнное, способное принимать значенія:

$$\ldots, -2dx, -dx, 0, dx, 2dx, \ldots, \ldots\ldots\ldots (II)$$

условимся обозначать черезъ $C(x)$ гипотезу, состоящую въ предположеніи, что неизвѣстная измѣряемая величина есть x. На основаніи формулы (11), вѣроятность системы результатовъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ выразится при допущеніи гипотезы $C(x)$ слѣдующимъ образомъ:

$$p(x) = \varphi_1(x - A)\,\varphi_2(x - A_2)\ldots\varphi_m(x - A_m)\,dA_1\,dA_2\ldots dA_m. \quad \ldots (12)$$

§ 43. Вѣроятность à posteriori гипотезъ относительно неизвѣстной измѣряемой величины.

Пусть измѣряемая величина намъ совершенно неизвѣстна. Гипотезу, что измѣряемая величина равна x, мы выше обозначили черезъ $C(x)$. Чтобы получить группу всевозможныхъ и притомъ несовмѣстимыхъ гипотезъ этого рода, нужно давать перемѣнному всевозможныя значенія, указанныя выше (§ 42) въ ряду (II), причемъ слѣдуетъ имѣть въ виду предѣльный случай, когда dx исчезаетъ. Такимъ образомъ получимъ безчисленное множество несовмѣстимыхъ и всевозможныхъ гипотезъ:

$$\ldots, C(-2dx), C(-dx), C(0), C(dx), C(2dx), \ldots\ldots (13)$$

Допустимъ ультрагипотезу, что гипотезы эти до наблюденій (à priori) равновѣроятны. Допущеніе это произвольно; мы вынуждены принять его безъ доказательства. Но при полномъ незнаніи измѣряемой величины, когда нѣтъ причинъ считать одно значеніе измѣряемой величины болѣе вѣроятнымъ, чѣмъ другое, такое допущеніе естественно при сдѣланномъ уже (въ § 37) допущеніи, что погрѣшность Δ можетъ принимать всевозможныя значенія въ предѣлахъ $-\infty$ и $+\infty$. Наблюденія помогутъ выдѣлить истинную гипотезу.

Предположимъ теперь, что измѣренія произведены и результаты ихъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ получены. Послѣ этихъ измѣреній гипотезы (13) не будутъ равновѣроятными, и вѣроятность $\omega(x)\,dx$ гипотезы $C(x)$ à posteriori должна опредѣляться по теоремѣ Байе (въ случаѣ равновѣроятныхъ до наблюденія, гипотезъ), т. е. должна быть пропорціональна вѣроятности, опредѣляемой по формулѣ (12), а слѣдовательно пропорціональна величинѣ:

$$\varphi_1(x - A_1)\,\varphi_2(x - A_2)\ldots\varphi_m(x - A_m)\,dx.$$

Такимъ образомъ вѣроятность à posteriori гипотезы $C(x)$ будетъ:

$$\omega(x)\,dx = \mu\varphi_1(x - A_1)\,\varphi_2(x - A_2)\ldots\varphi_m(x - A_m)\,dx, \quad . \quad (14)$$

гдѣ μ есть постоянная величина (коэффиціентъ пропорціональности).

Такъ какъ сумма вѣроятностей гипотезъ (13) равна 1, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x)\,dx = 1.$$

Это равенство можетъ служить для полученія вышеуказаннаго коэффиціента μ, а именно:

$$\mu = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x - A_1)\,\varphi_2(x - A_2)\ldots\varphi_m(x - A_m)\,dx} \quad . \quad . \quad (15)$$

§ 44. Начало ариѳметической средины и опытное опредѣленіе вида функціи $\varphi(\Delta)$.

Одинъ изъ самыхъ важныхъ вопросовъ въ нашихъ изслѣдованіяхъ состоитъ въ опредѣленіи вида функціи $\varphi(\Delta)$. Опредѣлить эту функцію вполнѣ строго, не прибѣгая къ нѣкоторымъ произвольнымъ допущеніямъ, не возможно. Но имѣя въ виду лишь приблизительное опредѣленіе функціи $\varphi(\Delta)$, мы позволимъ себѣ сдѣлать одно, хотя и произвольное, однако при большомъ числѣ измѣреній близкое къ истинѣ допущеніе. Это допущеніе, пригодное для опредѣленія функціи $\varphi(\Delta)$, извѣстно подъ названіемъ начала ариѳметической средины, догматически предложеннаго Гауссомъ.

Начало ариѳметической средины состоитъ въ допущеніи, что à posteriori послѣ m равноточныхъ измѣреній *наивѣроятнѣйшая изъ гипотезъ (13) относительно измѣряемой величины есть та, которая соотвѣтствуетъ среднему ариѳметическому изъ полученныхъ результатовъ измѣреній.* Иначе говоря, это начало состоитъ въ допущеніи, что наивѣроятнѣйшее (à posteriori) значеніе измѣряемой величины, въ случаѣ m равноточныхъ измѣреній, есть среднее ариѳметическое изъ результатовъ этихъ измѣреній.

Допущеніе это при большомъ числѣ m измѣреній весьма близко къ истинѣ и дѣлается вполнѣ точнымъ при $m = \infty$, такъ какъ, по доказанному выше (см. § 41), среднее ариѳметическое изъ результатовъ *независимыхъ* измѣреній должно à priori съ достовѣрностью стремиться къ измѣряемой величинѣ при возрастаніи m до ∞, если средняя квадратическая сила g отклоненія этой перемѣнной средней ариѳметической величины отъ нуля не достигаетъ парадоксальнаго значенія (см. § 23). При этомъ подразумѣвается постулатъ, что *достовѣрное à priori бываетъ достовѣрнымъ и à posteriori* (см. § 33, п. IV).

При небольшихъ значеніяхъ m начало ариѳметической средины можетъ не оправдываться,—и, слѣдовательно, одно изъ условій приблизительной вѣрности всѣхъ выводовъ, которые мы сдѣлаемъ при допущеніи этого начала, есть *большое число* наблюденій.

Приступимъ теперь къ опредѣленію функціи $\varphi(\Delta)$. Пусть сдѣлано m равноточныхъ измѣреній неизвѣстной величины и получены результаты $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Вѣроятность à posteriori (послѣ сдѣланныхъ измѣреній) гипотезы $C(x)$ будетъ:

$$\omega(x)\,dx = \mu\,.\,\varphi(x - A_1)\,\varphi(x - A_2)\ldots\varphi(x - A_m)\,dx.$$

Будемъ искать наивѣроятнѣйшую изъ этихъ гипотезъ. Очевидно, отысканіе наивѣроятнѣйшей изъ гипотезъ $C(x)$ приводится къ нахожденію maximum функціи:

$$\varphi(x - A_1)\,\varphi(x - A_2)\ldots\varphi(x - A_m),$$

иначе, къ нахожденію maximum логариѳма этой функціи, который будетъ

$$lg\,\varphi(x - A_1) + lg\,\varphi(x - A_2) + \ldots + lg\,\varphi(x - A_m).$$

Значеніе x, соотвѣтствующее этому maximum, будетъ представлять собою наивѣроятнѣйшее значеніе измѣряемой величины. Это значеніе должно удовлетворять уравненію:

$$\frac{\varphi'(x - A_1)}{\varphi(x - A_1)} + \frac{\varphi'(x - A_2)}{\varphi(x - A_2)} + \ldots + \frac{\varphi'(x - A_m)}{\varphi(x - A_m)} = 0 \quad . \quad . \quad (16)$$

Съ другой стороны наивѣроятнѣйшее значеніе измѣряемой величины, на основаніи начала ариѳметической средины, есть

$$\xi = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_m}{m};$$

а потому, если вмѣсто x подставимъ въ равенство (16) величину ξ, оно будетъ тождествомъ, которое при сокращенномъ обозначеніи

$$F(y) = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$$

представится такъ:

$$F(\xi - A_1) + F(\xi - A_2) + \ldots + F(\xi - A_m) = 0.$$

Это тождество должно имѣть силу при любыхъ значеніяхъ величинъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Продифференцируемъ его по каждому изъ перемѣнныхъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$; тогда получимъ m новыхъ тождествъ, именно:

$$\frac{d}{d\xi}[F(\xi - A_1) + F(\xi - A_2) + \ldots + F(\xi - A_m)]\frac{1}{m} - F'(\xi - A_1) = 0.$$

$$\frac{d}{d\xi}[F(\xi - A_1) + F(\xi - A_2) + \ldots + F(\xi - A_m)]\frac{1}{m} - F'(\xi - A_2) = 0.$$

. . . . . .

$$\frac{d}{d\xi}[F(\xi - A_1) + F(\xi - A_2) + \ldots + F(\xi - A_m)]\frac{1}{m} - F'(\xi - A_m) = 0$$

Отсюда заключаемъ, что

$$F(\xi - A_1) = F'(\xi - A_2) = \ldots = F'(\xi - A_m).$$

Равенства эти показываютъ, что при любомъ x будемъ имѣть:

$$F'(x) = 2H = const.$$

Чтобы изъ послѣдняго уравненія найти функцію $F(x)$, нужно его проинтегрировать по x, и тогда найдемъ:

$$F(x) = 2Hx + H_1,$$

гдѣ H_1 есть новое постоянное количество. Но

$$F(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Поэтому

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 2Hx + H_1.$$

Если проинтегрируемъ это послѣднее уравненіе по x, то найдемъ:

$$lg\,\varphi(x) = Hx^2 + H_1 x + lg\,B,$$

гдѣ $lg\,B$ есть новое постоянное. Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что

$$\varphi(x) = Be^{Hx^2 + H_1 x}.$$

Неопредѣленный коэффиціентъ H_1, входящій въ это выраженіе функціи $\varphi(x)$, опредѣляется на основаніи того, что $\varphi(x)$ — функція четная:

$$\varphi(x) = \varphi(-x),$$

отсюда слѣдуетъ, что $H_1 = 0$. Итакъ

$$\varphi(x) = Be^{Hx^2}.$$

Относительно постояннаго H скажемъ пока только то, что оно должно быть непремѣнно количествомъ отрицательнымъ, такъ какъ функція $\varphi(x)$ должна, какъ извѣстно, убывать съ возрастаніемъ абсолютной величины x. Полагая

$$H = -h^2,$$

будемъ имѣть:

$$\varphi(x) = Be^{-h^2x^2}.$$

Перейдемъ теперь къ опредѣленію коэффиціента B. Выше было показано, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\,d\Delta = 1.$$

Внося сюда вмѣсто $\varphi(\Delta)$ найденное выраженіе этой функціи, будемъ имѣть:

$$B\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Извѣстно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}.$$

Полагая здѣсь $y = h\Delta$, найдемъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Равенства (17) и (18) показываютъ, что

$$B = \frac{h}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

и слѣдовательно

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Остается опредѣлить еще коэффиціентъ h. Способы опредѣленія этого коэффиціента, находящагося въ связи со степенью точности измѣренія, показаны будутъ ниже.

§ 45. Таблицы и формулы для рѣшенія основныхъ задачъ о вѣроятностяхъ погрѣшностей.

Основные вопросы о вѣроятностяхъ погрѣшностей сводятся къ вычисленію функціи:

$$\Theta(g) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^g e^{-y^2}\, dy. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

При измѣненіи g отъ 0 до ∞, функція эта измѣняется отъ 0 до 1, такъ что $\Theta(0) = 0$ и $\Theta(\infty) = 1$. Для этой функціи, имѣющей важное значеніе въ теоріи вѣроятностей, составлены подробныя таблицы. Таблицу значеній этой функціи приводимъ въ сокращенномъ видѣ.

g	$\Theta(g)$	g	$\Theta(g)$	g	$\Theta(g)$
0.00	0.000	0.70	0.678	1.40	0.952
0.05	0.056	0.75	0.711	1.45	0.960
0.10	0.112	0.80	0.742	1.50	0.966
0.15	0.168	0.85	0.771	1.55	0.972
0.20	0.223	0.90	0.797	1.60	0.976
0.25	0.276	0.95	0.821	1.65	0.980
0.30	0.329	1.00	0.843	1.70	0.984
0.35	0.379	1.05	0.862	1.75	0.987
0.40	0.428	1.10	0.880	1.80	0.989
0.45	0.475	1.15	0.896	1.85	0.991
0.50	0.520	1.20	0.910	1.90	0.993
0.55	0.563	1.25	0.923	1.95	0.994
0.60	0.604	1.30	0.934	2.00	0.995
0.65	0.642	1.35	0.944	2.25	0.99854
				2.50	0.99959

Обозрѣніе этой таблицы показываетъ, что функція $\Theta(g)$, достигающая единицы только при $g = \infty$, близка къ единицѣ уже при $g = 2$.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію основныхъ задачъ о вѣроятностяхъ погрѣшностей.

Задача 1. *Опредѣлить вѣроятность P того, что погрѣшность будетъ заключаться между предѣлами*: $-\alpha$ и $+\alpha$.

На основаніи предшествующаго искомая вѣроятность P представляется такъ:

$$P = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(\Delta)\, d\Delta.$$

Внося сюда найденное выше выраженіе функціи $\varphi(\Delta)$, будемъ имѣть:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\alpha} e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta.$$

Замѣняя въ послѣднемъ интегралѣ перемѣнное Δ новымъ перемѣннымъ $y = h\Delta$, найдемъ:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\alpha} e^{-y^2}\, dy = \Theta(h\alpha). \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Задача 2. *Опредѣлить вѣроятность P того, что погрѣшность будетъ заключаться между предѣлами*: a и b $(b > a)$.

Искомая вѣроятность представляется такъ:

$$P = \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta.$$

Внося сюда выраженіе функціи $\varphi(\Delta)$, получимъ:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta.$$

Помня, что

$$\int_a^b = \int_a^0 + \int_0^b = \int_0^b - \int_0^a,$$

найдемъ:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^b e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta - \frac{h}{\pi} \int_0^a e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta.$$

Замѣняя въ каждомъ изъ этихъ интегралов перемѣнное Δ перемѣннымъ $y = h\Delta$, найдемъ:

$$P = \frac{1}{2}\Theta(hb) - \frac{1}{2}\Theta(ha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Замѣтивъ, что $\Theta(-g) = -\Theta(g)$, т. е. функція $\Theta(g)$ нечетная, формулу (23) можемъ представить еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$P = \frac{1}{2}\Theta(hb) + \frac{1}{2}\Theta(-ha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Задача 3. *Предполагается сдѣлать большое число m равноточныхъ измѣреній. Опредѣлить приблизительно число такихъ ошибокъ этихъ измѣреній, которыя будутъ заключаться между предѣлами a и b $(b > a)$.*

Обозначимъ искомое число черезъ n и замѣтимъ, что при большомъ m на основаніи теоремы Бернулли можно ожидать, что отношеніе $\frac{n}{m}$ будетъ весьма близко къ вѣроятности P того, что погрѣшность будетъ заключена въ предѣлахъ a и b. Помня, что вѣроятность эта опредѣляется формулою (24), приблизительно будемъ имѣть:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{2}[\Theta(hb) + \Theta(-ha)],$$

откуда слѣдуетъ, что приблизительно

$$n = \frac{m}{2}[\Theta(hb) + \Theta(-ha)]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Положимъ въ частности: $a = -\alpha$ и $b = +\alpha$; тогда формула (25) дастъ намъ приближенное число n ошибокъ, заключающихся между $-\alpha$ и $+\alpha$, а именно:

$$n = m \,.\, \Theta(h\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

§ 46. Мѣра точности наблюденія.

Въ функціи $\varphi(\Delta)$ количество h остается пока неопредѣленнымъ. Это количество принимается одинаковымъ для измѣреній равноточныхъ и различнымъ для измѣреній различной точности. Слѣдовательно величина h находится въ связи со степенью точности измѣренія. Эту-то связь мы теперь и разсмотримъ.

Представимъ себѣ два измѣренія различной точности. Пусть коэффиціентъ h для этихъ измѣреній имѣетъ значенія h_1 и h_2. Вѣроятность P_1 того, что ошибка 1-го измѣренія будетъ заключаться въ предѣлахъ: $-\alpha_1$ и $+\alpha_1$, есть

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h_1\alpha_1} e^{-y^2}\,dy = \Theta(h_1\alpha_1).$$

Вѣроятность P_2 того, что ошибка 2-го измѣренія будетъ заключаться между предѣлами: $-\alpha_2$ и $+\alpha_2$, есть

$$P_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h_2\alpha_2} e^{-y^2}\,dy = \Theta(h_2\alpha_2).$$

Количества α_1 и α_2 произвольны; выберемъ ихъ такъ, чтобы имѣло силу равенство:

$$P_1 = P_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Удовлетворяющіе такому условію предѣлы α_1 и α_2 абсолютныхъ значеній погрѣшностей того и другаго измѣренія называются равновѣроятными.

Изъ двухъ разсматриваемыхъ измѣреній принято считать то болѣе точнымъ, которому соотвѣтствуетъ меньшій изъ указанныхъ равновѣроятныхъ предѣловъ α_1 и α_2. Такъ, напримѣръ, если α_1 въ n разъ менѣе α_2, то 1-е измѣреніе въ n разъ точнѣе 2-го. Въ самомъ дѣлѣ, при $\alpha_1 < \alpha_2$ равенство (27) показываетъ, что съ одинаковой надеждой на выигрышъ можно держать пари какъ за то, что ошибка 1-го наблюденія заключается въ тѣсныхъ предѣлахъ $\pm\alpha_1$, такъ и за то, что ошибка 2-го наблюденія заключается въ болѣе широкихъ предѣлахъ $\pm\alpha_2$. Иначе говоря, за малыя ошибки 1-го наблюденія приходится держать такое же пари, какъ за большія ошибки 2-го измѣренія. Такимъ образомъ ошибки 2-го измѣренія грубѣе ошибокъ 1-го измѣренія, и поэтому степени точности измѣреній принято считать обратно пропорціональными равновѣроятнымъ предѣламъ α_1 и α_2 абсолютныхъ величинъ ихъ погрѣшностей.

Равенство (27) приводится къ виду,

$$\Theta(h_1\alpha_1) = \Theta(h_2\alpha_2).$$

Это равенство возможно только тогда, когда

$$h_1\alpha_1 = h_2\alpha_2;$$

а изъ этого послѣдняго равенства слѣдуетъ, что величины h_1 и h_2 обратно пропорціональны количествамъ α_1 и α_2, которыя, въ свою очередь,

какъ только что замѣчено, обратно пропорціональны точностямъ наблюденій; слѣдовательно точности измѣреній прямо пропорціональны количествамъ h_1 и h_2. По этой причинѣ величину h, соотвѣтствующую данному измѣренію, Гауссъ назвалъ *мѣрою точности измѣренія*. Чѣмъ болѣе коэффиціентъ h, тѣмъ точность измѣренія считается выше.

Примѣчаніе. Выше мы имѣли математическое ожиданіе квадрата погрѣшности, именно:

$$b = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi(\Delta)\, d\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta.$$

При помощи интеграціи по частямъ убѣждаемся, что

$$b = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta.$$

Далѣе на основаніи формулы (18) имѣемъ:

$$b = \frac{1}{2h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Съ другой стороны, на основаніи указаннаго въ § 18 индуктивнаго свойства математическихъ ожиданій, при большомъ m мы имѣемъ приблизительно:

$$b = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_m^2}{m} = \frac{\Sigma\Delta^2}{m}, \quad \ldots\ldots (29)$$

гдѣ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ суть погрѣшности результатовъ m измѣреній. Сопоставляя равенства (28) и (29), будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2h^2} = \frac{\Sigma\Delta^2}{m};$$

отсюда слѣдуетъ, что приблизительно:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Ниже мы получимъ приближенныя выраженія мѣры точности изъ иныхъ воззрѣній.

§ 47. Вѣроятность погрѣшности и мѣра точности средняго результата равноточныхъ наблюденій.

Предположимъ, что было произведено m измѣреній неизвѣстной величины, и получены результаты:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m.$$

Величину

$$\xi = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_m}{m} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

будемъ называть среднимъ результатомъ указанныхъ измѣреній. Этотъ результатъ, принимаемый за приближенное значеніе измѣряемой величины, заключаетъ въ себѣ нѣкоторую неизвѣстную погрѣшность, — и можно говорить о вѣроятности Δ этой погрѣшности, причемъ вѣроятность эта представится нѣкоторой функціей $\Phi(\Delta)\, d\Delta$.

Предложимъ себѣ вопросъ найти видъ функціи $\Phi(\Delta)$.

Выше найдено было выраженіе вѣроятности à posteriori (послѣ m измѣреній) гипотезы $C(x)$, состоящей въ предположеніи, что неизвѣстная измѣряемая величина есть x,—именно:

$$\omega(x)\, dx = \mu\varphi(x - A_1)\, \varphi(x - A_2) \ldots \varphi(x - A_m)\, dx.$$

Помня, что

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2},$$

будемъ имѣть:

$$\omega(x)\, dx = \mu \frac{h^m}{\sqrt{\pi^m}} e^{-h^2[(x-A_1)^2 + (x-A_2)^2 + \ldots + (x-A_m)^2]} dx. \quad (32)$$

Если имѣетъ силу гипотеза $C(x)$, состоящая въ предположеніи, что измѣряемая величина равна x, то погрѣшность Δ средняго результата ξ должна имѣть видъ:

$$\Delta = x - \xi; \text{ отсюда } d\Delta = dx. \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

Поэтому вѣроятность $\Phi(\Delta)\, d\Delta$ погрѣшности Δ результата ξ есть то же, что вѣроятность гипотезы $C(x)$, въ которой $x = \Delta + \xi$. Итакъ

$$\Phi(\Delta)\, d\Delta = \omega(\Delta + \xi)\, d\Delta \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

Равенство это при помощи (32) и (31) приводится къ виду:

$$\Phi(\Delta)\, d\Delta = \nu e^{-mh^2\Delta^2}\, d\Delta, \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

гдѣ ν есть величина, независящая отъ перемѣннаго Δ. Величина ν опредѣляется изъ условія:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Delta)\, d\Delta = 1,$$

которое приводится къ виду:

$$\nu \int e^{-h^2 m \Delta^2}\, d\Delta = 1,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\nu = \frac{h\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\Phi(\Delta)\, d\Delta = \frac{h\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 m \Delta^2} d\Delta = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 \Delta^2}\, d\Delta, \quad \ldots\ldots (37)$$

гдѣ

$$H = h\sqrt{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Найдя вѣроятность погрѣшности Δ средняго результа ξ отъ m равноточныхъ измѣреній, легко получить вѣроятность Q того, что погрѣшность этого средняго результата будетъ заключена между $-\alpha$ и $+\alpha$, именно:

$$Q = \frac{h\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-mh^2\Delta^2}\, d\Delta = \frac{2h\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-mh^2\Delta^2} d\Delta.$$

Полагая въ послѣднемъ интегралѣ

$$h\Delta\sqrt{m} = y \text{ и } d\Delta = \frac{dy}{\sqrt{m}},$$

будемъ имѣть:

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\alpha\sqrt{m}} e^{-y^2}\, dy = \Theta(h\alpha\sqrt{m}) = F(H\alpha). \quad \ldots\ldots (39)$$

Очевидно величина H въ вопросахъ о вѣроятностяхъ погрѣшности средняго результата ξ играетъ такую же роль, какъ коэффиціентъ h въ вопросахъ о вѣроятностяхъ погрѣшности отдѣльнаго измѣренія. По причинѣ этой аналогіи коэффиціентъ H принято называть мѣрою точности средняго результата ξ. Равенство (38) показываетъ, что *мѣра точности средняго результата отъ m равноточныхъ наблюденій болѣе мѣры точности отдѣльнаго наблюденія въ $\sqrt{m}$ разъ.*

Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе: съ одинаковой увѣренностью можно держать пари какъ за то, что погрѣшность отдѣльнаго наблюденія, мѣра точности котораго есть h, будетъ заключаться въ предѣлахъ $\pm\alpha$, такъ и за то, что погрѣшность средняго результата отъ m такихъ наблюденій будетъ заключаться въ болѣе узкихъ предѣлахъ $\pm\frac{\alpha}{\sqrt{m}}$.

§ 48. Вѣроятная ошибка отдѣльнаго наблюденія и средняго результата равноточныхъ наблюденій.

Вѣроятность P того, что погрѣшность отдѣльнаго наблюденія помѣстится въ предѣлахъ $\pm\alpha$, будетъ:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\alpha} e^{-y^2}\, dy = \Theta(h\alpha).$$

Выберемъ α подъ условіемъ: $P = \frac{1}{2}$. Нахожденіе этого α приводится къ рѣшенію слѣдующихъ уравненій:

$$\rho = h\alpha \text{ и } \Theta(\rho) = \frac{1}{2}.$$

Съ помощью таблицы находимъ: $\rho = 0{,}4769$. Далѣе находимъ:

$$\alpha = \frac{\rho}{h} = \frac{0{,}4769}{h}. \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

Эту величину α принято называть вѣроятною ошибкой, которую можно характеризовать такъ: *вѣроятная ошибка есть предѣлъ α, выбранный такъ, что съ одинаковою увѣренностью можно держать пари какъ за то, что погрѣшность отдѣльнаго наблюденія будетъ заключаться въ предѣлахъ $\pm\alpha$, такъ и за то, что она выйдетъ изъ этихъ предѣловъ, т. е. по абсолютной величинѣ превзойдетъ α.*

То, что мы нашли, есть вѣроятная ошибка отдѣльнаго измѣренія. Точно также найдемъ и вѣроятную ошибку средняго результата m равноточныхъ измѣреній; стоитъ только опредѣлить α изъ уравненія: $Q = \frac{1}{2}$, гдѣ Q есть вѣроятность того, что ошибка средняго результата помѣстится въ предѣлахъ $\pm\alpha$, т. е.

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\alpha\sqrt{m}} e^{-y^2}\, dy = \Theta(h\alpha\sqrt{m}).$$

Вопросъ этотъ приводится къ рѣшенію уравненій:

$$\rho = h\alpha\sqrt{m} \quad \text{и} \quad \Theta(\rho) = \frac{1}{2};$$

отсюда находимъ:

$$\rho = 0{,}4769 \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\rho}{h\sqrt{m}}.$$

Изъ сопоставленія этого результата съ равенствомъ (40) видно, что вѣроятная ошибка средняго результата отъ m равноточныхъ измѣреній въ $\sqrt{m}$ разъ менѣе вѣроятной ошибки отдѣльнаго наблюденія.

§ 49. Нахожденіе наивѣроятнѣйшихъ значеній мѣры точности.

Въ предшествующемъ мы считали мѣру точности h какъ бы за извѣстное количество, а на самомъ дѣлѣ она требуетъ опредѣленія, которое такъ же трудно выполнимо, какъ и опредѣленіе самой измѣряемой величины. Приходится довольствоваться опытными приближенными значеніями мѣры точности. Изъ этихъ значеній мы будемъ искать такъ называемыя наивѣроятнѣйшія à posteriori значенія въ томъ или другомъ смыслѣ.

Разсмотримъ здѣсь два случая.

1-й случай. Предположимъ, что измѣряемая величина извѣстна и есть a, и пусть величину эту желаютъ измѣрить даннымъ способомъ m разъ. Считая мѣру точности измѣренія неизвѣстною и разумѣя подъ h перемѣнное, способное принимать значенія:

$$0,\ dh,\ 2dh,\ \ldots,\ \infty,$$

будемъ обозначать черезъ $G(h)$ гипотезу, состоящую въ предположеніи, что неизвѣстная мѣра точности равна h. Будемъ считать всѣ эти гипотезы равновѣроятными до наблюденій. Пусть

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_m$$

будутъ ожидаемые результаты m предполагаемыхъ равноточныхъ измѣреній. Вѣроятность P такой системы результатовъ, при допущеніи гипотезы $G(h)$, будетъ:

$$P = \varphi(a - A_1)\,\varphi(a - A_2)\ldots\varphi(a - A_m)\,dA_1\,dA_2\ldots dA_m,$$

гдѣ

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}.$$

Слѣдовательно

$$P = \frac{h^m}{\sqrt{\pi^m}}e^{-h^2\Sigma(a-A_k)^2}\,dA_1\,dA_2\ldots dA_m,$$

гдѣ $\sum(a - A_k)^2 = (a - A_1)^2 + \ldots + (a - A_m)^2$.

Положимъ теперь, что указанныя m измѣреній произведены и результаты ихъ $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_m$ получены. Послѣ этихъ измѣреній, вѣроятность гипотезы $G(h)$ относительно мѣры точности будетъ, по теоремѣ Байе, пропорціональна величинѣ P. Поэтому à posteriori вѣроятность гипотезы $G(h)$ будетъ:

$$\Omega(h)\,dh = \mu h^m e^{-h^2\Sigma(a-A_k)^2}\,dh.$$

Выраженіе $\sum(a - A_k)^2$ представляетъ сумму квадратовъ погрѣшностей разсматриваемыхъ измѣреній, т. е.

$$\sum(a - A_k)^2 = \sum\Delta_k^2,$$

гдѣ

$$\Delta_k = a - A_k.$$

Корень квадратный изъ средняго ариѳметическаго квадратовъ погрѣшностей, т. е. количество

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta_k^2}{m}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

называется *среднею квадратическою ошибкою*. Введя это обозначеніе, получимъ:

$$\Omega(h)\,dh = \mu h^m e^{-h^2 m\varepsilon^2}\,dh.$$

Наивѣроятнѣйшее значеніе h будетъ, очевидно, то, при которомъ вѣроятность $\Omega(h)\,dh$ есть maximum, а слѣдовательно

$$h^m e^{-h^2 m\varepsilon^2} = \text{maximum}.$$

Для нахожденія maximum этого выраженія найдемъ maximum его логариѳма, т. е. функціи

$$mlgh - h^2 m\varepsilon^2.$$

Дифференцируя по h, находимъ условіе:

$$\frac{m}{h} - 2m\varepsilon^2 h = 0,$$

откуда

$$h = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41')$$

Итакъ, наивѣроятнѣйшее значеніе мѣры точности найдено, причемъ полученный нами результатъ согласенъ съ формулой (30), выведенной изъ другого воззрѣнія.

Нужно замѣтить, что указанный сейчасъ способъ опредѣленія мѣры точности на практикѣ рѣдко употребителенъ, такъ какъ обыкновенно измѣренія производятся надъ неизвѣстной величиной.

2-й случай. На практикѣ пользуются одними и тѣми же наблюденіями какъ для опредѣленія мѣры точности, такъ и для опредѣленія измѣряемой величины.

Здѣсь приходится имѣть дѣло съ двумя неизвѣстными величинами: 1) съ неизвѣстною измѣряемою величиною и 2) съ неизвѣстною мѣрою точности. Относительно нихъ можно сдѣлать безчисленное множество гипотезъ. Допустимъ гипотезу, что неизвѣстная измѣряемая величина равна x и въ то же время неизвѣстная мѣра точности равна h. Эту гипотезу обозначимъ черезъ $C(x, h)$. Очевидно, гипотеза $C(x, h)$ сложная, состоящая изъ совпаденія двухъ простыхъ, которыя раньше мы означали черезъ $C(x)$ и $G(h)$.

Мы будемъ считать гипотезы $C(x, h)$ равновѣроятными до наблюденій.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ обозначаютъ результаты измѣреній. До наблюденія этихъ результатовъ (à priori) и при допущеніи гипотезы $G(x, h)$ вѣроятность P этой системы результатовъ есть

$$P = \varphi(x - A_1)\,\varphi(x - A_2)\ldots\varphi(x - A_m)\,dA_1\,dA_2\ldots dA_m =$$

$$= \frac{h^m}{\sqrt{\pi^m}} e^{-h^2\Sigma(x - A_k)^2}\,dA_1\,A_2\ldots dA_m.$$

A posteriori (послѣ наблюденія результатовъ измѣреній) вѣроятность гипотезы $G(x, h)$ измѣнится: по теоремѣ Байе она будетъ пропорціональна вѣроятности P вышенаписанной системы результатовъ, т. е.

$$\Omega(x, h)\,dx\,dh = \mu h^m e^{-h^2\Sigma(x - A_k)^2}\,dx\,dh,$$

гдѣ μ постоянное количество.

Далѣе вычисленіе будемъ вести въ двухъ направленіяхъ.

Во-первыхъ, будемъ искать наивѣроятнѣйшую пару значеній неизвѣстныхъ x и h, т. е. будемъ искать такія значенія x и h, при которыхъ вѣроятность гипотезы $G(x, h)$ есть maximum. Вопросъ этотъ приводится къ нахожденію maximum выраженія

$$h^m e^{-h^2\Sigma(x - A_k)^2},$$

или его логариѳма, т. е. выраженія:

$$mlgh - h^2\sum(x - A_k)^2.$$

Для нахожденія maximum этой функціи нужно взять частныя производныя ея по x и по h и приравнять эти производныя нулю. Значенія x и h, выведенныя изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій, будутъ искомыя. Выполнивъ это, найдемъ:

$$x = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_m}{m} = \xi$$

и

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

гдѣ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\xi - A_k)^2}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Сличая значенія ε и σ, опредѣляемыя посредствомъ уравненій (41) и (43), мы видимъ, что σ получается изъ ε, если въ погрѣшностяхъ $\Delta_k = a - A_k$ вмѣсто точной измѣряемой величины a возьмемъ ея приближенное значеніе ξ. Такимъ образомъ σ есть корень квадратный изъ средняго ариѳметическаго квадратовъ приближенныхъ значеній погрѣшностей. Слѣдовательно σ можно разсматривать какъ приближенное значеніе ε, т. е. средней квадратической ошибки.

Разсмотримъ, *во-вторыхъ*, иное наивѣроятнѣйшее значеніе мѣры точности, наивѣроятнѣйшее въ другомъ смыслѣ. Выше мы вывели вѣроятность $\Omega(x, h)\,dx\,dh$ сложной гипотезы $C(x, h)$, что мѣра точности равна h и измѣряемая величина равна x. Найдемъ теперь вѣроятность простой гипотезы $G(h)$, что мѣра точности равна h. Очевидно, если въ гипотезѣ $C(x, h)$ перемѣнному x давать значенія: $0, \pm dx, \pm 2dx, \ldots, \pm\infty$, сохраняя h постояннымъ, то будемъ получать различные несовмѣстимые виды гипотезы $G(h)$. Поэтому, на основаніи теоремы сложенія, вѣроятность $\omega(h)\,dh$ гипотезы $G(h)$ будетъ:

$$\omega(h)\,dh = dh\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega(x, h)\,dx = \mu h^m\,dh\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Sigma(x - A_k)^2}dx.$$

Упростимъ это равенство, полагая

$$\xi = \frac{1}{m}(A_1 + A_2 + \ldots + A_m),\ x = \xi + \delta,\ dx = d\delta;$$

тогда будемъ имѣть:

$$\sum(x - A_k)^2 = \sum(\delta + \xi - A_k)^2 = \sum\delta^2 + \sum(\xi - A_k)^2,$$

и потому вѣроятность гипотезы $G(h)$ выразится такъ:

$$\omega(h)\,dh = \mu h^m e^{-h^2\Sigma(\xi - A_k)^2}\,dh \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 m\delta^2}\,d\delta.$$

Но при помощи формулы (18) убѣждаемся, что

$$h\sqrt{m}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 m\delta^2}\,d\delta = \sqrt{\pi},$$

а потому

$$\omega(h)\,dh = \frac{\mu\sqrt{\pi}}{\sqrt{m}}\,h^{m-1}\,e^{-h^2\Sigma(\xi - A_k)^2}\,dh.$$

Наивѣрнѣйшая изъ гипотезъ $G(h)$ будетъ, очевидно, соотвѣтствовать maximum выраженія

$$h^{m-1}\,e^{-h^2\Sigma(\xi - A_k)^2}$$

или maximum логариѳма этого выраженія, т. е. функціи

$$(m-1)\,lg\,h - h^2\sum(\xi - A_k)^2.$$

Слѣдовательно, наивѣроятнѣйшее значеніе h удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{m-1}{h} - 2h\sum(\xi - A_k)^2 = 0,$$

откуда

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Sigma(\xi - A_k)^2}{m-1}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Сравнивъ послѣднее наивѣроятнѣйшее значеніе мѣры точности h съ прежде найденнымъ выраженіемъ (42), замѣчаемъ, что значеніе h, опредѣляемое по формулѣ (44), менѣе значенія h, опредѣляемаго по формулѣ (42); но разница между ними незначительная и тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе m — число наблюденій.

Въ видахъ осторожности слѣдуетъ брать меньшую величину h, чтобы не имѣть преувеличенныхъ сужденій о мѣрѣ точности наблюденій измѣряемой величины.

§ 50. О вѣсахъ неравноточныхъ измѣреній.

Степень точности наблюденій, какъ было указано, опредѣляется посредствомъ мѣры точности. Но есть еще другой способъ выражать *относительную* степень точности измѣреній. Въ этомъ способѣ величина,

которою опредѣляется степень точности измѣренія, называется *вѣсомъ* измѣренія.

Положимъ, что мы имѣемъ m неравноточныхъ наблюденій, мѣры точности которыхъ пусть будутъ: $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Вообразимъ еще наблюденіе, мѣра точности котораго есть η, и примемъ вѣсъ его за единицу, причемъ наблюденіе это будемъ называть *нормальнымъ*; выберемъ затѣмъ числа $g_1, g_2, \ldots, g_m$, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\frac{h_1^2}{g_1} = \frac{h_2^2}{g_2} = \ldots = \frac{h_m^2}{g_m} = \frac{\eta^2}{1}.$$

Числа $g_1, g_2, \ldots, g_m$, 1 называются вѣсами соотвѣтствующихъ наблюденій.

Указанное опредѣленіе вѣсовъ показываетъ, что вѣса суть числа, пропорціональныя квадратамъ мѣръ точности. Тѣ же самыя числа имѣютъ особый смыслъ, который приводитъ къ иному опредѣленію понятія о вѣсѣ.

Изъ вышеуказанныхъ соотношеній будемъ имѣть:

$$h_1 = \eta\sqrt{g_1},\quad h_2 = \eta\sqrt{g_2}, \ldots,\quad h_m = \eta\sqrt{g_m}.$$

Эти равенства и даютъ намъ возможность нѣсколько иначе толковать понятіе о вѣсѣ наблюденія. Представимъ себѣ g нормальныхъ наблюденій (съ мѣрою точности η) и средній ихъ результатъ; мѣра точности его будетъ:

$$h = \eta\sqrt{g}.$$

Эта формула, если числу g приписывать значенія $g_1, g_2, \ldots, g_m$, дастъ мѣры точности $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Слѣдовательно, можно сказать, что *вѣсъ наблюденія есть число, показывающее, сколько нужно произвести нормальныхъ измѣреній, чтобы ихъ средній результатъ имѣлъ мѣру точности, равную мѣрѣ точности даннаго наблюденія.*

§ 51. Наивѣроятнѣйшее значеніе измѣряемой величины послѣ m неравноточныхъ измѣреній; вѣроятность погрѣшности, мѣра точности и вѣсъ этого наивѣроятнѣйшаго результата.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ будутъ результаты m неравноточныхъ измѣреній, вѣса которыхъ обозначимъ соотвѣтственно чрезъ $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Среднее значеніе ξ этихъ результатовъ при данныхъ различныхъ вѣсахъ опредѣляется какъ среднее ариѳметическое не изъ m количествъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а изъ $M = g_1 + g_2 + \ldots + g_m$ количествъ, получаемыхъ повтореніями каждаго результата $A_1, A_2, \ldots, A_m$ столько разъ, каковъ

его вѣсъ. Иначе говоря, нужно представить себѣ M нормальныхъ измѣреній (вѣса $= 1$) и притомъ вообразить, что изъ числа этихъ M измѣреній

g_1 измѣреній дали результатъ A_1,
g_2 » » » A_2,
. . . . . .
g_m » » » A_m.

Сумма всѣхъ этихъ M *воображаемыхъ* результатовъ будетъ:

$$g_1A_1 + g_2A_2 + \ldots + g_mA_m,$$

а среднее ариѳметическое этихъ M результатовъ будетъ:

$$\xi = \frac{g_1A_1 + g_2A_2 + \ldots + g_mA_m}{g_1 + g_2 + \ldots + g_m} = \frac{\Sigma gA}{M}. \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Этотъ средній результатъ *воображаемыхъ* M измѣреній трактуется какъ среднее значеніе по отношенію къ m вышеуказаннымъ *дѣйствительнымъ* неравноточнымъ измѣреніямъ.

Не трудно доказать, что à posteriori послѣ m вышеуказанныхъ неравноточныхъ наблюденій наивѣроятнѣйшее значеніе измѣряемой величины равно среднему результату ξ, получаемому какъ среднее ариѳметическое изъ вышепоказанныхъ M воображаемыхъ результатовъ равноточныхъ нормальныхъ измѣреній.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ гипотезу $C(x)$, что неизвѣстная измѣряемая величина равна x. При допущеніи этой гипотезы и прежде всякихъ наблюденій вѣроятность P того, что получится система результатовъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$, будетъ:

$$P = \varphi_1(x - A_1)\ \varphi_2(x - A_2) \ldots \varphi_m(x - A_m)\, dA_1\, dA_2 \ldots dA_m =$$

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_m}{\sqrt{\pi^m}}\, e^{-\Sigma h_k^2 (x - A_k)^2}\, dA_1\, dA_2 \ldots dA_m,$$

гдѣ вообще $h_k = \eta\sqrt{g_k}$. Вѣроятность же гипотезы $C(x)$ à posteriori, по теоремѣ Байе, будетъ:

$$\omega(x)\, dx = \mu e^{-\Sigma h_k^2 (x - A_k)^2}\, dx.$$

Такимъ образомъ нахожденіе наивѣроятнѣйшей гипотезы $C(x)$ сводится къ нахожденію maximum выраженія

$$e^{-\Sigma h_k^2 (x - A_k)^2},$$

или къ нахожденію minimum выраженія

$$\sum h_k^2 (x - A_k)^2,$$

т. е. приводится къ рѣшенію уравненія

$$\sum h_k^2 (x - A_k) = 0.$$

Отсюда находимъ наивѣроятнѣйшее значеніе измѣряемой величины:

$$x = \frac{\Sigma h_k^2 A_k}{\Sigma h_k^2} = \frac{h_1^2 A_1 + h_2^2 A_2 + \ldots + h_m^2 A_m}{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2}.$$

Исключивъ величины $h_1^2, h_2^2, \ldots, h_m^2$ при помощи вѣсовъ ($h_k^2 = \eta^2 g_k$), будемъ имѣть:

$$x = \frac{g_1A_1 + g_2A_2 + \ldots + g_mA_m}{g_1 + g_2 + \ldots + g_m} = \frac{\Sigma gA}{M} = \xi,$$

что и требовалось доказать.

Мы нашли наивѣроятнѣйшее значеніе ξ измѣряемой величины послѣ m неравноточныхъ наблюденій. Разсмотримъ теперь вѣроятность погрѣшности этого наивѣроятнѣйшаго результата. Замѣтимъ, что если измѣряемая величина равна x, то погрѣшность наивѣроятнѣйшаго результата ξ равна $\Delta = x - \xi$. При такомъ совпаденіи обстоятельствъ того и другого рода, очевидно, что вѣроятность $\Phi(\Delta)\, d\Delta$ погрѣшности Δ результата ξ есть то же, что вышеуказанная вѣроятность $\omega(x)\, dx$ гипотезы $C(x)$, т. е.

$$\Phi(\Delta)\, d\Delta = \omega(\xi + \Delta)\, d\Delta = \mu e^{-\Sigma h_k^2 (\Delta + \xi - A_k)^2}\, d\Delta.$$

Замѣтивъ, что

$$\sum h_k^2 (\Delta + \xi - A_k)^2 = \Delta^2 \sum h_k^2 + 2\Delta \sum h_k^2 (\xi - A_k) + \sum h_k^2 (\xi - A_k)^2$$

и

$$\sum h_k^2 (\xi - A_k) = 0,$$

находимъ:

$$\Phi(\Delta)\, d\Delta = \nu e^{-\Delta^2 \Sigma h_k^2}\, d\Delta,$$

гдѣ ν есть количество, не содержащее перемѣннаго Δ.

Полагая для краткости

$$H = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

будемъ имѣть:

$$\Phi(\Delta)\,d\Delta = e^{-H^2\Delta^2}\,d\Delta.$$

Коэффиціентъ ν опредѣлится изъ условія:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\Delta)\,d\Delta = 1,$$

при помощи котораго найдемъ $\nu = \frac{H}{\sqrt{\pi}}$. Слѣдовательно

$$\Phi(\Delta)\,d\Delta = \frac{H}{\sqrt{\pi}}e^{-H^2\Delta^2}\,d\Delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

гдѣ H есть величина, опредѣляемая по формулѣ (46).

Вѣроятность P того, что погрѣшность наивѣроятнѣйшаго результата ξ заключена между $-\alpha$ и $+\alpha$, выразится такъ:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\Delta)\,d\Delta = F(H\alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Очевидно, по аналогіи съ предыдущимъ величину H должно назвать *мѣрою точности наивѣроятнѣйшаго результата* ξ. Замѣняя въ равенствѣ (46) мѣры точности $h_1, h_2, \ldots, h_m$ выраженіями ихъ посредствомъ вѣсовъ ($h_k = \eta\sqrt{g_k}$), получимъ:

$$H = \eta\sqrt{M}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

гдѣ $M = g_1 + g_2 + \ldots + g_m$. Отсюда видно, что число M есть вѣсъ наивѣроятнѣйшаго результата ξ.

§ 52. Опредѣленіе мѣръ точности неравноточныхъ наблюденій при данныхъ вѣсахъ.

Обыкновенно вѣса отдѣльныхъ результатовъ измѣреній бываютъ наперед извѣстны; ихъ можно бываетъ сообразить по самымъ способамъ наблюденій. Пусть m измѣреній имѣютъ данные вѣса $g_1, g_2, \ldots, g_m$. При этихъ данныхъ мѣры точности $h_1, h_2, \ldots, h_m$ отдѣльныхъ измѣреній и мѣра точности $H = \sqrt{\sum h_k^2}$ средняго результата будутъ еще неизвѣстными. Всѣ эти неизвѣстныя можно выразить посредствомъ данныхъ вѣсовъ и неизвѣстной мѣры точности η нормальнаго измѣренія, именно:

$$h_1 = \eta\sqrt{g_1},\ h_2 = \eta\sqrt{g_2}, \ldots,\ h_m = \eta\sqrt{g_m},\ H = \eta\sqrt{\sum g_k}. \quad . \quad (50)$$

Слѣдовательно, для опредѣленія искомыхъ мѣръ точностей отдѣльныхъ измѣреній и наивѣроятнѣйшаго результата достаточно найти неизвѣстное η, т. е. мѣру точности нормальнаго измѣренія, вѣсъ котораго есть 1.

Для опредѣленія мѣры точности нормальнаго измѣренія будемъ пользоваться тѣми m наблюденіями, которыя служатъ для опредѣленія неизвѣстной измѣряемой величины, причемъ будемъ имѣть, слѣдовательно, двѣ неизвѣстныхъ величины: 1) неизвѣстную измѣряемую величину и 2) неизвѣстную мѣру точности нормальнаго наблюденія. Будемъ подъ x и η разумѣть перемѣнныя, служащія для выраженія гипотезъ относительно этихъ неизвѣстныхъ. Допустимъ гипотезу $C(x, \eta)$, состоящую въ предположеніи, что измѣряемая величина равна x, а мѣра точности нормальнаго измѣренія равна η. Всѣ эти гипотезы до наблюденій будемъ считать равновѣроятными.

Выразимъ при допущеніи гипотезы $C(x, \eta)$ вѣроятность P à priori того, что получится система результатовъ наблюденій $A_1, A_2 \ldots A_m$:

$$P = \varphi_1(x - A_1)\ \varphi_2(x - A_2) \ldots \varphi_m(x - A_m)\,dA_1\,dA_2 \ldots dA_m.$$

Но

$$\varphi_k(\Delta) = \frac{h_k}{\sqrt{\pi}}e^{-h_k^2\Delta^2} = \eta\,\frac{\sqrt{g_k}}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2 g_k\Delta^2},$$

а потому

$$P = \frac{\eta^m\sqrt{g_1\,g_2 \cdot \cdot \cdot g_m}}{\sqrt{\pi^m}}e^{-\eta^2\sum g_k(x - A_k)^2}\,dA_1\,dA_2 \ldots dA_m.$$

Послѣ наблюденія указанныхъ результатовъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ вѣроятность $\Omega(x, \eta)\,dx\,d\eta$ гипотезы $C(x, \eta)$, по теоремѣ Байе, будетъ пропорціональна количеству P, т. е.

$$\Omega(x, \eta)\,dx\,d\eta = \mu\eta^m e^{-\eta^2\Sigma g_k(x - A_k)^2}\,dx\,d\eta,$$

гдѣ μ есть коэффиціентъ пропорціональности, не содержащій перемѣнныхъ x и η.

Зная вѣроятность гипотезы $C(x, \eta)$, не трудно опредѣлить вѣроятность простой гипотезы $G(\eta)$, состоящей въ предположеніи, что мѣра точности нормальнаго измѣренія равна η. Гипотезы $C(x, \eta)$ при различныхъ значеніяхъ x можно разсматривать, какъ виды, въ которыхъ можетъ проявляться осуществленіе гипотезы $G(\eta)$; поэтому вѣроятность послѣдней гипотезы, на основаніи теоремы сложенія, выразится такъ:

$$\omega(\eta)\,d\eta = \mu\eta^m\,d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2\Sigma g_k(x - A_k)^2}\,dx.$$

Введемъ подъ интегралъ новое перемѣнное y, полагая $x = \xi + y$, гдѣ

$$\xi = \frac{g_1 A_1 + g_2 A_2 + \ldots + g_m A_m}{g_1 + g_2 + \ldots + g_m} = \frac{\Sigma g_k A_k}{M}$$

Замѣтивъ, что

$$\sum g_k (\xi - A_k) = 0,$$

убѣждаемся, что

$$\omega(\eta)\, d\eta = \mu \eta^m e^{-\eta^2 \Sigma g_k (\xi - A_k)^2}\, d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2 M y^2}\, dy.$$

Помня, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2 M y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\eta \sqrt{M}},$$

находимъ:

$$\omega(\eta)\, d\eta = \frac{\mu \sqrt{\pi}}{\sqrt{M}} \cdot \eta^{m-1} e^{-\eta^2 \Sigma g_k (\xi - A_k)^2}\, d\eta.$$

Чтобы получить значеніе η, соотвѣтствующее наивѣроятнѣйшей гипотезѣ $G(\eta)$, нужно найти maximum выраженія $\omega(\eta)\, d\eta$, а слѣдовательно maximum функціи

$$(m-1)\, lg\, \eta - \eta^2 \sum g_k (\xi - A_k)^2.$$

Вопросъ приводится къ рѣшенію уравненія

$$\frac{m-1}{\eta} - 2\eta \Sigma g_k (\xi - A_k)^2 = 0.$$

откуда находимъ:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Sigma g_k (\xi - A_k)^2}{m-1}}}.$$

Теперь, зная η, по формуламъ (50) найдемъ величины $h_1, h_2, \ldots, h_m$, H, т. е. искомыя мѣры точности.

ГЛАВА VIII.

Гауссова теорія способа наименьшихъ квадратовъ *).

§ 53. Начальныя уравненія, выводимыя изъ наблюденій.

Въ разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ вопросахъ мы научились опредѣлять апостеріорно наивѣроятнѣйшее значеніе неизвѣстной величины при непосредственномъ многократномъ ея измѣреніи. Отъ этого простѣйшаго случая перейдемъ къ болѣе общему. Часто приходится опредѣлять неизвѣстныя величины на основаніи независимыхъ наблюденій, произведенныхъ не надъ каждымъ изъ этихъ неизвѣстныхъ непосредственно, а надъ ихъ функціями.

Положимъ, что имѣемъ рядъ неизвѣстныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, число которыхъ есть ν. Пусть $m \geqq \nu$. Вообразимъ m функцій:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \end{aligned}$$

Положимъ, что величины этихъ функцій были измѣрены, и пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ будутъ результаты этихъ наблюденій. Такъ какъ результаты эти содержатъ въ себѣ нѣкоторыя независимыя случайныя погрѣшности $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, то будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) - A_1 &= -\Delta_1, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) - A_2 &= -\Delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) - A_m &= -\Delta_m. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Болѣе надежныя приближенныя значенія неизвѣстныхъ суть наивѣроятнѣйшія, которыя получаются на основаніи принциповъ теоріи вѣроятностей, примѣненныхъ къ системѣ уравненій (1). Нахожденіе этихъ

*) О другихъ теоріяхъ этого способа была рѣчь въ § 25.

наивѣроятнѣйшихъ значеній неизвѣстныхъ и составляетъ главную задачу апостеріорнаго способа наименьшихъ квадратовъ, который служитъ дополненіемъ къ изложенному выше (см. § 25) апріорному способу.

Начнемъ съ разбора простѣйшаго и основнаго случая, когда функціи $F_1, F_2, \ldots, F_m$ суть линейныя, именно:

$$\begin{aligned} F_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots + p_1x_\nu + q_1, \\ F_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots + p_2x_\nu + q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m &= a_mx_1 + b_mx_2 + c_mx_3 + \ldots + p_mx_\nu + q_m. \end{aligned}$$

Уравненія системы (1) будутъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + p_1x_\nu + q_1 - A_1 &= -\Delta_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + p_2x_\nu + q_2 - A_2 &= -\Delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_mx_1 + b_mx_2 + \ldots + p_mx_\nu + q_m - A_m &= -\Delta_m. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Будемъ называть уравненія (2) *начальными*. При помощи этой системы уравненій постараемся получить новую систему уравненій, которыя удовлетворяются наивѣроятнѣйшими значеніями неизвѣстныхъ и которыя будемъ называть *нормальными уравненіями*.

Нормальную систему уравненій мы выведемъ въ двухъ предположеніяхъ 1) что наблюденія, результаты которыхъ суть $A_1, A_2, \ldots, A_m$, равноточны или имѣютъ одинаковый вѣсъ и 2) что эти наблюденія не равноточны или имѣютъ различные вѣса.

§ 54. Выводъ нормальныхъ уравненій при наблюденіяхъ равноточныхъ.

Будемъ подъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ разумѣть не только неизвѣстныя величины, но и перемѣнныя количества, служащія для выраженія гипотезъ относительно этихъ неизвѣстныхъ. Допустимъ гипотезу $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ состоящую въ предположеніи, что первое неизвѣстное равно x_1, второе—равно x_2, и т. д. и наконецъ послѣднее равно x_ν.

Прежде всякихъ наблюденій всѣ эти гипотезы будемъ считать равновѣроятными, каковое допущеніе дѣлаемъ не безъ произвола *). При допущеніи гипотезы $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ погрѣшности будущихъ результатовъ измѣреній опредѣляются изъ уравненій (2). Помня выраженіе вѣроят-

*) Послѣдующіе выводы имѣютъ, слѣдовательно, значеніе лишь какъ приближенные. Критическія замѣчанія, находящіяся въ связи съ произвольными допущеніями этого рода, сдѣланы въ главѣ VI и здѣсь обобщаются.

ности системы погрѣшностей, убѣждаемся, что вѣроятность P системы результатовъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ при допущеніи этой гипотезы будетъ:

$$P = \frac{h^m}{\sqrt{\pi^m}} e^{-h^2[\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_m^2]}\, dA_1\, dA_2 \ldots dA_m,$$

причемъ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ опредѣляются при помощи начальныхъ уравненій (2). Когда наблюденія произведены, то вѣроятность гипотезы $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ à posteriori будетъ пропорціональна указанной выше вѣроятности P. Если обозначимъ названную вѣроятность гипотезы $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ черезъ

$$\omega dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu,$$

то будемъ имѣть:

$$\omega dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu = \mu e^{-h^2[\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_m^2]}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu,$$

гдѣ μ — коэффиціентъ пропорціональности, причемъ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_m$ опредѣляются при помощи уравненій (2).

Наивѣроятнѣйшая изъ гипотезъ $C(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$ соотвѣтствуетъ такимъ значеніямъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, при которыхъ обращается въ maximum ея указанная вѣроятность и, слѣдовательно, обращается въ minimum функція:

$$\theta = \frac{1}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_m^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Итакъ нахожденіе наивѣроятнѣйшихъ значеній неизвѣстныхъ сводится къ отысканію сказаннаго minimum'а полусуммы квадратовъ погрѣшностей. По этой причинѣ разсматриваемый способъ отысканія называется способомъ *наименьшихъ квадратовъ*. Условія minimum'а будутъ:

$$\frac{d\theta}{dx_1} = 0, \frac{d\theta}{dx_2} = 0, \frac{d\theta}{dx_3} = 0, \ldots, \frac{d\theta}{dx_\nu} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Это и есть искомая нормальная система уравненій, которую на основаніи (3) можно написать такъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1\frac{d\Delta_1}{dx_1} + \Delta_2\frac{d\Delta_2}{dx_1} + \ldots + \Delta_m\frac{d\Delta_m}{dx_1} &= 0, \\ \Delta_1\frac{d\Delta_1}{dx_2} + \Delta_2\frac{d\Delta_2}{dx_2} + \ldots + \Delta_m\frac{d\Delta_m}{dx_2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \Delta_1\frac{d\Delta_1}{dx_\nu} + \Delta_2\frac{d\Delta_2}{dx_\nu} + \ldots + \Delta_m\frac{d\Delta_m}{dx_\nu} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Замѣнивъ здѣсь $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ ихъ выраженіями, найденными изъ равенствъ (2), и принявъ слѣдующее обозначеніе Гаусса:

$$k_1 l_1 + k_2 l_2 + \ldots + k_m l_m = (kl),$$

мы можемъ представить систему нормальныхъ уравненій слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\, x_1 + (ab)\, x_2 + (ac)\, x_3 + \ldots + (ap)\, x_\nu + (aq) - (aA) = 0,\\
&(ba)\, x_1 + (bb)\, x_2 + (bc)\, x_3 + \ldots + (bp)\, x_\nu + (bq) - (bA) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(pa)\, x_1 + (bp)\, x_2 + (pc)\, x_3 + \ldots + (pp)\, x_\nu + (pq) - (pA) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Это есть окончательный видъ нормальныхъ уравненій при условіи, что наблюденія одинаковаго вѣса.

Разсматривая эту систему, легко замѣтить, что коэффиціенты при неизвѣстныхъ можно расположить въ слѣдующемъ квадратѣ:

(aa)	(ab)	(ac)	. . .	. . .	(ap)
(ba)	(bb)	(bc)	. . .	. . .	(bp)
(ca)	(cb)	(cc)	. . .	. . .	(cp)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
(pa)	(pb)	(pc)	. . .	. . .	(pp)

Изъ этой схемы видно, что коэффиціенты, лежащіе на такъ называемой главной діагонали детерминанта, т. е. коэффиціенты (aa), (bb), $(cc), \ldots, (pp)$ представляютъ собою суммы квадратовъ; слѣдовательно эти діагональные коэффиціенты положительны. Далѣе, коэффиціенты, расположенные симметрично относительно главной діагонали, между собою равны; дѣйствительно:

$$(ab) = (ba),\ (ac) = (ca),\ (bc) = (cb) \text{ и т. д.}$$

§ 55. Выводъ нормальныхъ уравненій въ случаѣ наблюденій неравноточныхъ.

Будемъ предполагать теперь, что наблюденія неравноточны, и пусть вѣса ихъ будутъ: $g_1, g_2, \ldots, g_m$ (см. §§ 50—52).

До наблюденій и при допущеніи гипотезы $C(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$ вѣ-

роятность p того, что получится опредѣленная система результатовъ $A_1, A_2, \ldots, A_m$, будетъ:

$$p = \frac{h_1 h_2 \ldots h_m}{\sqrt{\pi^m}}\, e^{-[h_1^2\Delta_1^2 + \ldots + h^2{}_m\Delta^3{}_m]}\, dA_1 dA_2 \ldots dA_m,$$

гдѣ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ суть функціи, опредѣляемыя при помощи начальныхъ уравненій (2). Мѣры точности каждаго наблюденія выразятся такъ:

$$h_1 = \eta\sqrt{g_1},\quad h_2 = \eta\sqrt{g_2}, \ldots,\ h_m = \eta\sqrt{g_m},$$

гдѣ η мѣра точности нормальнаго наблюденія. Если въ выраженіе указанной выше вѣроятности P подставимъ вмѣсто каждаго h его значеніе, то получимъ:

$$P = \frac{\eta^m \sqrt{g_1 g_2 \ldots g_m}}{\sqrt{\pi^m}}\, e^{-\eta^2[g_1\Delta^2{}_1 + \ldots + g_m\Delta^2{}_m]}\, dA_1 dA_2 \ldots dA_m.$$

Это — вѣроятность системы результатовъ до наблюденій ихъ и при допущеніи гипотезы

$$C(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu).$$

Послѣ же наблюденій по теоремѣ Байе вѣроятность гипотезы

$$C(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$$

будетъ:

$$\omega dx_1 dx_2 \ldots dx_\nu = \mu e^{-\eta^2[g_1^2\Delta_1^2 + g_2^2\Delta_2^2 + \ldots + g^2{}_m\Delta^2{}_m]}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_\nu \quad (7)$$

Отысканіе значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, соотвѣтствующихъ наивѣроятнѣйшей изъ всѣхъ подобныхъ гипотезъ, сводится опять къ отысканію maximum функціи

$$e^{-\eta^2[g_1\Delta_1^2 + g_2\Delta_2^2 + \ldots + g_m\Delta^2{}_m]}$$

или къ отысканію minimum функціи:

$$\theta = \frac{1}{2}(g_1\Delta_1^2 + g_2\Delta_2^2 \ldots + g_m\Delta_m^2) = \frac{1}{2}\Sigma g\Delta^2, \quad (8)$$

причемъ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ выразятся изъ начальныхъ уравненій въ функціи неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Система уравненій, удовлетворяющихъ указанному условію minimum, будетъ:

$$\frac{d\theta}{dx_1} = 0,\quad \frac{d\theta}{dx_2} = 0, \ldots,\ \frac{d\theta}{dx_\nu} = 0 \quad (9)$$

Это и есть искомая система нормальныхъ уравненій, которая при помощи (8), (2) и при обозначеніи:

$$(kl) = g_1k_1l_1 + g_2k_2l_2 + \ldots + g_mk_ml_m$$

можетъ быть полнѣе написана такъ:

$$\begin{aligned}
&(aa)\,x_1 + (ab)\,x_2 + (ac)\,x_3 + \ldots + (ap)\,x_\nu + (aq) - (aA) = 0,\\
&(ba)\,x_1 + (bb)\,x_2 + (bc)\,x_3 + \ldots + (bp)\,x_\nu + (bq) - (bA) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(pa)\,x_1 + (pb)\,x_2 + (pc)\,x_3 + \ldots + (pp)\,x_\nu + (pq) - (pA) = 0.
\end{aligned}$$

Не трудно убѣдиться, что коэффиціенты этой системы, расположенные по главной діагонали, положительны, а коэффиціенты, расположенные симметрично относительно главной діагонали, равны между собою.

§ 56. Рѣшеніе нормальной системы уравненій по способу Гаусса.

Перейдемъ теперь къ рѣшенію нормальной системы. При рѣшеніи этой системы требуется найти не только всѣ неизвѣстные этой системы, но также и вѣса найденныхъ раньше наивѣроятнѣйшихъ результатовъ и вѣроятности погрѣшностей этихъ результатовъ, что составляетъ одну изъ важныхъ задачъ способа наименьшихъ квадратовъ, такъ какъ тогда только мы можемъ судить о качествѣ этихъ результатовъ. Рѣшеніе, удовлетворяющее указаннымъ требованіямъ, далъ Гауссъ.

Возьмемъ нормальную систему въ общемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\,x_1 + (ab)\,x_2 + (ac)\,x_3 + \ldots + (ap)\,x_\nu + (aq) - (aA) = 0,\\
&(ba)\,x_1 + (bb)\,x_2 + (bc)\,x_3 + \ldots + (bp)\,x_\nu + (bq) - (bA) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(pa)\,x_1 + (pb)\,x_2 + (pc)\,x_3 + \ldots + (pp)\,x_\nu + (pq) - (pA) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Эту систему будемъ называть *основною* нормальною системою. При рѣшеніи этой системы по способу Гаусса, ее нужно преобразовать особымъ способомъ. Такъ какъ при этомъ весьма важную роль играютъ коэффиціенты преобразованной системы, то указанный ниже основной порядокъ Гауссова преобразованія нужно въ точности соблюдать, не допуская никакихъ дѣйствій, измѣняющихъ коэффиціенты преобразованной по способу Гаусса системы.

Преобразованная по способу Гаусса система получается изъ основной нормальной слѣдующимъ образомъ:

1-е уравненіе основной нормальной системы заносится въ преобразованную безъ всякихъ перемѣнъ.

2-е уравненіе преобразованной системы получается такими дѣйствіями: изъ 1-го уравненія основной системы опредѣляется первое неизвѣстное въ функціи всѣхъ остальныхъ, и это выраженіе вносится во 2-е уравненіе; въ полученномъ послѣ этого уравненіи допускается только сдѣлать приведеніе и не допускается ни умноженія, ни дѣленія этого уравненія на число, не равное единицѣ; полученное въ такомъ видѣ уравненіе заносится въ преобразованную систему, какъ 2-е уравненіе; оно будетъ имѣть видъ:

$$A_2x_2 + A_3x_3 + \ldots + A_\nu x_\nu + A_{\nu+1} = 0.$$

Чтобы получить 3-е уравненіе Гауссовой системы, нужно изъ двухъ первыхъ уравненій основной нормальной системы опредѣлить два первыхъ неизвѣстныхъ въ функціи всѣхъ остальныхъ, подставить полученныя выраженія въ 3-е уравненіе той же системы и сдѣлать въ немъ только приведеніе; полученное такимъ образомъ уравненіе будетъ 3-мъ уравненіемъ преобразованной системы; оно будетъ имѣть видъ:

$$B_3x_3 + B_4x_4 + \ldots + B_\nu x_\nu + B_{\nu+1} = 0.$$

И т. д.

Вообще, чтобы получить уравненіе, занимающее мѣсто k въ преобразованной по способу Гаусса системѣ, нужно взять $k-1$ первыхъ уравненій основной системы, вывести изъ нихъ $k-1$ первыхъ неизвѣстныхъ въ функціи остальныхъ, подстановить полученныя выраженія въ уравненіе, занимающее мѣсто k въ основной нормальной системѣ, по подстановкѣ должно сдѣлать только приведеніе. Полученное такимъ образомъ уравненіе принимается за уравненіе преобразованной системы, занимающее въ ряду другихъ уравненій этой системы мѣсто k. Уравненіе это не будетъ содержать неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$.

Послѣднее уравненіе преобразованной по способу Гаусса нормальной системы будетъ имѣть видъ:

$$P_\nu x_\nu + P_{\nu-1} = 0.$$

Такимъ образомъ преобразованная по способу Гаусса система представится такъ:

$$\left.\begin{aligned}
(aa)\,x_1 + (ab)\,x_2 + (ac)\,x_3 + \ldots + (ap)\,x_\nu + (aq) - (aA) &= 0,\\
A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + \ldots A_\nu x_\nu + A_{\nu+1} &= 0,\\
B_3x_3 + B_4x_4 + \ldots + B_\nu x_\nu + B_{\nu+1} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_\nu x_\nu + P_{\nu+1} &= 0.
\end{aligned}\right\} . \quad (11)$$

Рѣшить послѣднюю систему не трудно: сначала выводимъ изъ послѣдняго уравненія x_ν; затѣмъ подставляемъ найденное значеніе x_ν въ предпослѣднее уравненіе и получаемъ $x_{\nu-1}$, и т. д.

Прежде чѣмъ показать, какъ опредѣляется отсюда вѣсъ наивѣроятнѣйшаго значенія x_ν, выведеннаго по способу наименьшихъ квадратовъ, обратимъ вниманіе на свойства функціи:

$$2\theta = g_1\Delta_1^2 + g_2\Delta_2^2 + g_3\Delta_3^2 + \ldots + g_m\Delta^2_m \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Функція 2θ есть функція 2-й степени относительно перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots, x_\nu$, такъ какъ каждое Δ есть функція 1-й степени. Важно для насъ слѣдующее свойство функціи 2θ: *если нормальная система не есть неопредѣленная или невозможная, то функція 2θ можетъ быть представлена въ видѣ:*

$$2\theta = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \ldots + \omega_\nu^2 + K, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

гдѣ K есть постоянное; ω_1 есть функція линейная, содержащая непремѣнно x_1 и могущая содержать всѣ или нѣкоторыя изъ остальныхъ перемѣнныхъ, такъ что ω_1 вообще можно представить такъ:

$$\omega_1 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu + \alpha_{\nu+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

причемъ α_1 отлично отъ нуля; ω_2 есть линейная функція, совсѣмъ не содержащая x_1, непремѣнно содержащая x_2 и могущая содержать остальныя перемѣнныя, такъ что вообще можно написать:

$$\omega_2 = \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \ldots + \beta_\nu x_\nu + \beta_{\nu+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ β_2 отлично отъ нуля; ω_3 есть линейная функція, которая совсѣмъ не содержитъ ни x_1, ни x_2, непремѣнно содержитъ x_3 и можетъ содержать остальныя перемѣнныя, т. е.

$$\omega_3 = \gamma_3x_3 + \gamma_4x_4 + \ldots + \gamma_\nu x_\nu + \gamma_{\nu+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

гдѣ γ_3 отлично отъ нуля; и т. д.; наконецъ ω_ν есть линейная функція, зависящая только отъ одного перемѣннаго x_ν, такъ что

$$\omega_\nu = \pi_\nu x_\nu + \pi_{\nu+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

гдѣ π_ν отлично отъ нуля.

Покажемъ, какъ получается разложеніе 2θ по формулѣ (13) на самомъ дѣлѣ. Расположивъ функцію 2θ по нисходящимъ степенямъ x_1, будемъ имѣть:

$$2\theta = Ax_1^2 + 2P_1x_1 + Q_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

гдѣ A есть постоянный коэффиціентъ, отличный отъ нуля (такъ какъ x_1 входитъ по крайней мѣрѣ въ одну изъ функцій $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$), P_1 есть линейная функція, не содержащая x_1, и Q_1, есть функція второй степени, не содержащая x_1. Дополняя два первыхъ члена второй части равенства (18) до полнаго квадрата, будемъ имѣть:

$$2\theta = A\left(x_1 + \frac{P_1}{A}\right)^2 + Q_1 - \frac{P_1^2}{A}.$$

Полагая:

$$\omega_1 = \sqrt{A}\left(x_1 + \frac{P_1}{A}\right) \text{ и } \theta_1 = Q_1 - \frac{P_1^2}{A},$$

будемъ имѣть:

$$2\theta = \omega_1^2 + \theta_1.$$

Итакъ функція ω_1 выдѣлена. Замѣтимъ, что функція θ_1 второй степени, совсѣмъ не содержащая x_1. Если функція θ_1 содержитъ квадратъ x_2, то мы можемъ выдѣлить по указанному сейчасъ плану функцію ω_2. Дѣйствительно, расположивъ функцію θ_1 по нисходящимъ степенямъ x_2, найдемъ:

$$\theta_1 = Bx_2^2 + 2P_2x_2 + Q_2 = B\left(x_2 + \frac{P_2}{B}\right)^2 + Q_2 - \frac{P_2^2}{B},$$

гдѣ по условію B не равно нулю. Положивъ

$$\omega_2 = \sqrt{B}\left(x_2 + \frac{P_2}{B}\right) \text{ и } \theta_2 = Q_2 - \frac{P_2^2}{B},$$

будемъ имѣть:

$$\theta_1 = \omega_2^2 + \theta_2.$$

Слѣдовательно

$$2\theta = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \theta_2,$$

гдѣ функція θ_2 второй степени и не содержитъ ни x_1, ни x_2. Процессъ этотъ можемъ продолжать до тѣхъ поръ, пока не выдѣлимъ всѣхъ искомыхъ линейныхъ функцій $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$, лишь бы послѣдовательно получаемыя въ этомъ процессѣ вспомогательныя функціи $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\nu-1}$ содержали соотвѣтственно вторыя степени неизвѣстныхъ $x_2, x_3, \ldots, x_\nu$. Но если бы какая либо функція θ_k оказалась не содержащею въ себѣ квадрата перемѣннаго x_{k+1}, то было бы невозможно указаннымъ способомъ выдѣлить функцію ω_{k+1} и продолжать указанный процессъ. Можно доказать однако, что такого препятствія не встрѣтится, если только нормальная система есть система опредѣленная. Приводимъ это доказательство.

Предположимъ, что мы выдѣлили k искомыхъ функцій $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, такъ что

$$2\theta = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots \omega_k^2 + \theta_k, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

гдѣ θ_k есть функція, не содержащая перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Предположимъ, что θ_k не содержитъ квадрата x_{k+1}. При этомъ предположеніи могутъ представиться, повидимому, два случая 1) функція θ_k, не содержа квадрата x_{k+1}, содержитъ первую степень x_{k+1}, т. е. имѣетъ видъ:

$$\theta_k = \Omega x_{k+1} + R, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

гдѣ Ω есть линейная функція, не содержащая x_{k+1}; 2) функція θ_k вовсе не содержитъ x_{k+1}.

Докажемъ невозможность каждаго изъ этихъ случаевъ отдѣльно, начавъ съ разсмотрѣнія перваго случая. Въ этомъ случаѣ на основаніи равенствъ (I) и (II) будемъ имѣть:

$$2\theta = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_k^2 + \Omega x_{k+1} + R \quad \ldots \text{(III)}$$

Функціи Ω и R содержатъ только перемѣнныя $x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots, x_n$. Припишемъ этимъ перемѣннымъ такія частныя постоянныя значенія, для которыхъ Ω не обращается въ нуль, а перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ припишемъ такія значенія, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \ldots, \omega_k = 0.$$

При этихъ опредѣленныхъ значеніяхъ всѣхъ перемѣнныхъ, кромѣ x_{k+1}, равенство (III) получитъ видъ:

$$2\theta = \Omega x_{k+1} + R = \Omega\left(x_{k+1} + \frac{R}{\Omega}\right).$$

Такъ какъ x_{k+1} осталось еще вполнѣ произвольнымъ, то его можно выбрать такъ, чтобы $\Omega x_{k+1} + R$ было отрицательнымъ. Для этого x_{k+1} нужно выбрать такъ, чтобы сумма

$$x_{k+1} + \frac{R}{\Omega}$$

имѣла знакъ, противоположный знаку Ω. При указанномъ выборѣ перемѣнныхъ будемъ имѣть:

$$2\theta < 0.$$

Такой результатъ есть абсурдъ, ибо функція 2θ, какъ показываетъ равенство (12), никогда не можетъ принимать отрицательнаго значенія. Слѣдовательно, функція θ_k ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть не содержащею квадрата x_{k+1} и содержащею первую степень x_{k+1}.

Разсмотримъ теперь второй случай, т. е. предположимъ, что θ_k вовсе не содержитъ x_{k+1}, такъ что

$$\frac{d\theta_k}{dx_{k+1}} = 0.$$

При этомъ условіи, дифференцируя тождество (I) по x_{k+1}, получимъ:

$$\frac{d\theta}{dx_{k+1}} = \omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_{k+1}} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_{k+1}} + \ldots + \omega_k \frac{d\omega_k}{dx_{k+1}} \quad \ldots \text{(IV)}$$

Сверхъ того дифференцированіе тождества (I) по $x_1, x_2, x_k, \ldots$, приводитъ къ тождествамъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dx_1} &= \omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_1}, \\
\frac{d\theta}{dx_2} &= \omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_2} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\theta}{dx_k} &= \omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_k} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_k} + \ldots + \omega_k \frac{d\omega_k}{dx_k}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(V)}$$

Производныя отъ функцій $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ суть постоянныя величины и притомъ производныя вида: $\frac{d\omega_k}{dx_k}$, по свойству этихъ функцій, отличны отъ нуля. Поэтому рввенства (V) позволяютъ выразить каждую изъ величинъ $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ посредствомъ величинъ $\frac{d\theta}{dx_1}, \frac{d\theta}{dx_2}, \ldots, \frac{d\theta}{dx_k}$ линейными и притомъ однородными многочленами. Внеся эти выраженія въ тождество (IV), получимъ тождество вида:

$$\frac{d\theta}{dx_{k+1}} = M_1 \frac{d\theta}{dx_1} + M_2 \frac{d\theta}{dx_2} + \ldots + M_k \frac{d\theta}{dx_k},$$

гдѣ $M_1, M_2, \ldots, M_k$ суть постоянныя величины.

Послѣднее тождество показываетъ, что послѣднее изъ нормальныхъ уравненій:

$$\frac{d\theta}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\theta}{dx_2} = 0, \ldots, \frac{d\theta}{dx_{k+1}} = 0$$

есть результатъ сложенія предшествующихъ ему нормальныхъ уравненій, умноженныхъ соотвѣтственно на $M_1, M_2, \ldots, M_k$, и удовлетворяется само собою, когда удовлетворены предшествующія ему уравненія. Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ нормальная система должна быть не-

опредѣленною. Если же нормальная система опредѣленная, то этотъ парадоксальный случай представиться не можетъ.

Итакъ, если нормальная система—опредѣленная, то функція θ_k должна содержать квадратъ x_{k+1}, причемъ вполнѣ возможно выдѣленіе функціи ω_{k+1} изъ состава полинома θ_k.

На основаніи доказаннаго теперь тождества (13) основная нормальная система (9), вполнѣ совпадающая съ системою (10), можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} = 0,\\
&\omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_2} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_2} = 0,\\
&\omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_3} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_3} = \omega_3 \frac{d\omega_3}{dx_3} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_\nu} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_\nu} + \omega_3 \frac{d\omega_3}{dx_\nu} + \ldots + \omega_\nu \frac{d\omega_\nu}{dx_\nu} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (19)$$

Система (19) совершенно тождественна съ основной нормальной системой (9) или (10) и не имѣетъ отъ нея никакихъ отличій, кромѣ символовъ, посредствомъ которыхъ она выражена. Система (19) не только равносильна системѣ (10), но, по приведеніи подобныхъ членовъ, должна имѣть съ этой системой совершенно одинаковые коэффиціенты при соотвѣтственныхъ неизвѣстныхъ.

Примѣнимъ къ системѣ (19) преобразованіе Гаусса, причемъ получимъ систему вполнѣ совпадающую съ системою (11). Не трудно при этомъ видѣть, что преобразованная по способу Гаусса система (19) будетъ имѣть другой, тождественный съ нею видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} = 0,\\
&\omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_2} = 0,\\
&\cdots\cdots\\
&\omega_\nu \frac{d\omega_\nu}{dx_\nu} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Дѣйствительно 1-е уравненіе основной нормальной системы (19) осталось безъ перемѣны. Выведя изъ него x_1 и подставивъ во 2-е уравненіе основной системы (19), мы найдемъ, что первый членъ втораго изъ уравненій (19) обратится въ нуль, ибо значеніе x_1, выведенное изъ уравненія 1-го, обращаетъ ω_1 въ нуль. Слѣдовательно, второе уравненіе преобразованной системы будетъ:

$$\omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_2} = 0.$$

Выведя x_1 и x_2 изъ двухъ первыхъ уравненій и внеся это выраженіе въ третье изъ уравненій (19), замѣтимъ, что два первыхъ члена третьяго изъ уравненій (19) обратятся въ нули, причемъ третье уравненіе преобразованной системы будетъ:

$$\omega_3 \frac{d\omega_3}{dx_3} = 0.$$

И т. д.

Система (20) не только равносильна системѣ (11), но и вполнѣ тождественна системѣ (11) по составу коэффиціентовъ, стоящихъ въ первыхъ частяхъ соотвѣтственныхъ уравненій той и другой системы; ибо обѣ эти системы выводятся изъ одной и той же основной системы одними и тѣми же преобразованіями. Иначе говоря, при *произвольныхъ* значеніяхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, будемъ имѣть тождества:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} = (aa)\,x_1 + (ab)\,x_2 + \ldots + (ap)\,x_\nu + (aq) - (aA),\\
&\omega_2 \frac{d\omega_2}{dx_2} = A_2x_2 + A_3x_3 + \ldots + A_\nu x_\nu + A_{\nu+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega_\nu \frac{d\omega_\nu}{dx_\nu} = P_\nu x_\nu + P_{\nu+1}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся только послѣднимъ изъ этихъ тождествъ. Замѣтивъ, что согласно формулѣ (17)

$$\omega_\nu = \pi_\nu x_\nu + \pi_{\nu+1},$$

откуда

$$\frac{d\omega_\nu}{dx_\nu} = \pi_\nu,$$

находимъ:

$$\pi_\nu{}^2 x_\nu + \pi_\nu \pi_{\nu+1} = P_\nu x_\nu + P_{\nu+1}.$$

Это тождество даетъ возможность опредѣлить π_ν и $\pi_{\nu+1}$ посредствомъ P_ν и $P_{\nu+1}$, а именно:

$$\pi_\nu = \sqrt{P_\nu} \quad \text{и} \quad \pi_{\nu+1} = \frac{P_{\nu+1}}{\sqrt{P_\nu}}.$$

Слѣдовательно

$$\omega_\nu = \sqrt{P_\nu}\left(x_\nu + \frac{P_{\nu+1}}{P_\nu}\right).$$

Обозначимъ черезъ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ наивѣроятнѣйшія значенія неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, которыя получаются рѣшеніемъ системы (11). Очевидно

$$\xi_\nu = -\frac{P_{\nu+1}}{P_\nu}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

и слѣдовательно

$$\omega_\nu = \sqrt{P_\nu}\,(x_\nu - \xi_\nu). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Считая ξ_ν за приближенную величину послѣдняго неизвѣстнаго, т. е. x_ν, будемъ искать теперь вѣроятность погрѣшности и вѣсъ результата ξ_ν.

Выше мы нашли, что вѣроятность гипотезы $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, послѣ m неравноточныхъ наблюденій есть:

$$\omega\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu = \mu e^{-\eta^2 [g_1\Delta_1{}^2 + g_2\Delta_2{}^2 + \ldots + g_m\Delta_m{}^2]}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu.$$

Такъ какъ

$$g_1\Delta_1{}^2 + g_2\Delta_2{}^2 + \ldots + g_m\Delta_m{}^2 = 2\theta = \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \ldots + \omega_\nu{}^2 + K,$$

то

$$\omega dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_\nu = \mu e^{-\eta^2 [\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \ldots + \omega_\nu{}^2 + K]}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu. \quad (23)$$

Будемъ теперь искать вѣроятность простой гипотезы $C(x_\nu)$, состоящей въ предположеніи, что послѣднее неизвѣстное равно x_ν. Замѣтимъ, что гипотезы $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, соотвѣтствующія данному значенію x_ν и всевозможнымъ значеніямъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, суть всевозможные и несовмѣстимые виды, въ которыхъ можетъ состояться осуществленіе гипотезы $C(x_\nu)$. А потому по теоремѣ сложенія вѣроятность $\Omega(x_\nu)\,dx_\nu$ гипотезы $C(x_\nu)$ равна суммѣ вѣроятностей гипотезъ $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, причемъ суммованіе сводится къ многократному интегралу, въ которомъ интегрированіе должно распространяться на всевозможныя значенія перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$.

Итакъ, будемъ имѣть:

$$\Omega(x_\nu)\,dx_\nu =$$

$$= \mu\, dx_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta [\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \ldots + \omega_{\nu-1}{}^2 + \omega_\nu{}^2 + K]}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{\nu-1}$$

Замѣтимъ теперь, что выраженіе

$$e^{-\eta^2(\omega_\nu{}^2 + K)},$$

какъ не зависящее ни отъ одного изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$, по которымъ производятся интегрированія, можетъ быть вынесено за знаки всѣхъ интеграловъ. Далѣе функція $\omega_{\nu-1}$ содержитъ только перемѣнныя $x_{\nu-1}$ и x_ν, а потому множитель, зависящій отъ $\omega_{\nu-1}$, можетъ быть вынесенъ за знаки всѣхъ интегрированій, кромѣ послѣдняго, которое производится по перемѣнному $x_{\nu-1}$; и т. д.; наконецъ $e^{-\eta^2\omega_2{}^2}\,dx_2$ можетъ быть вынесено за знакъ перваго интегрированія, производящагося по x_1, такъ какъ функція ω_2 содержитъ всѣ перемѣнныя, кромѣ x_1; подъ знаками всѣхъ интегрированій остается лишь $e^{-\eta^2\omega_1{}^2}\,dx_1$, потому что ω_1 содержитъ всѣ перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\Omega(x_\nu)\,dx_\nu = \mu e^{-\eta^2(\omega_\nu{}^2 + K)}\,dx_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_{\nu-1}{}^2}\,dx_{\nu-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_{\nu-2}{}^2}\,dx_{\nu-1} \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_2{}^2}\,dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_1{}^2}\,dx_1.$$

Будемъ теперь производить всѣ указанныя здѣсь послѣдовательныя интегрированія, начиная съ перваго по x_1, т. е. начиная съ интеграла

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_1{}^2}\,dx_1.$$

Замѣтимъ, что

$$\omega_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu + \alpha_{\nu+1};$$

а потому въ интегралѣ J_1 можно положить:

$$dx_1 = \frac{d\omega_1}{\alpha_1},$$

и слѣдовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_1{}^2}\,dx_1 = \frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_1{}^2}\,d\omega_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha_1\eta}. \quad \ldots\ldots (24)$$

Мы получили, по выполненіи перваго интегрированія, постоянное количество, которое можно вынести за знаки всѣхъ дальнѣйшихъ интегри-

рованій. Будемъ производять второе интегрированіе, которое сводится къ вычисленію интеграла

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_2^2}\, dx_2.$$

Замѣтимъ, что

$$\omega_2 = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_\nu x_\nu + \beta_{\nu+1},$$

а потому въ интегралѣ J_2 можно положить

$$dx_2 = \frac{d\omega_2}{\beta_2},$$

и слѣдовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_2^2}\, dx_2 = \frac{1}{\beta_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2\omega_2^2}\, d\omega_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_2\eta}. \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Такимъ образомъ, результатъ второго интегрированія приводитъ къ постоянному, которое можетъ быть вынесено за знаки всѣхъ дальнѣйшихъ интегрированій.

Такъ какъ всѣ послѣдующія интегрированія будутъ совершенно того же типа, какъ два первыхъ, то отъ каждаго изъ нихъ мы будемъ получать подобные постоянные множители.

Будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$\Omega(x_\nu)\, dx_\nu = \frac{\mu\sqrt{\pi^{\nu-1}}}{\eta^{\nu-1}\alpha_1\beta_2\gamma_3\ldots\rho_{\nu-1}}\, e^{-\eta^2(\omega^2_\nu + K)}\, dx_\nu \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Иначе, обозначивъ всѣ постоянные факторы черезъ λ, найдемъ:

$$\Omega(x_\nu)\, dx_\nu = \lambda e^{-\eta^2\omega_\nu^2}\, dx_\nu.$$

Ранѣе мы видѣли, что

$$\omega_\nu = \sqrt{P_\nu}\,(x_\nu - \xi_\nu),$$

а потому

$$\Omega(x_\nu)\, dx_\nu = \lambda e^{-\eta^2 P_\nu (x_\nu - \xi_\nu)^2}\, dx_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Разсматривая ξ_ν, какъ приближенное значеніе послѣдняго неизвѣстнаго, замѣтимъ, что при допущеніи гипотезы $C(x_\nu)$ погрѣшность результата ξ_ν есть $\delta_\nu = x_\nu - \xi_\nu$. А потому вѣроятность погрѣшности δ_ν результата ξ_ν, обозначенная ниже черезъ $\Phi(\delta_\nu)\, d\delta_\nu$, равна вѣроятности гипотезы $C(x_\nu)$, въ которой $x_\nu = \xi_\nu + \delta_\nu$. Поэтому будемъ имѣть:

$$\Phi(\delta_\nu)\, d\delta_\nu = \Omega(\xi_\nu + \delta_\nu)\, d\delta_\nu = \lambda e^{-\eta^2 P_\nu \delta_\nu^2}\, d\delta_\nu.$$

Факторъ λ опредѣляется изъ того условія, что погрѣшность δ_ν съ достовѣрностью заключается въ предѣлахъ $-\infty$ и $+\infty$, т. е. изъ условія:

$$\lambda\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2 P_\nu \delta_\nu^2}\, d\delta_\nu = 1,$$

откуда

$$\lambda = \frac{\eta\sqrt{P_\nu}}{\sqrt{\pi}}.$$

Полагая при этомъ

$$H_\nu = \eta\sqrt{P_\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

будемъ имѣть:

$$\Phi(\delta_\nu)\, d\delta_\nu = \frac{H_\nu}{\sqrt{\pi}}\, e^{-H_\nu^2\delta_\nu^2}\, d\delta_\nu.$$

Коэффиціентъ H_ν, по анологіи съ подобными же коэффиціентами въ выраженіяхъ вѣроятностей погрѣшностей отдѣльныхъ наблюденій, нужно назвать мѣрою точности наивѣроятнѣйшаго значенія ξ_ν неизвѣстнаго x_ν. Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ формулы (28) видно, что вѣсъ G_ν этого наивѣроятнѣйшаго значенія есть P_ν.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее данное Гауссомъ правило опредѣленія вѣсовъ результатовъ, выведенныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ

Правило. *Вѣсъ послѣдняго неизвѣстнаго нормальной системы уравненій, преобразованной по способу Гаусса, равенъ коэффиціенту при этомъ неизвѣстномъ въ послѣднемъ уравненіи этой системы.*

Порядокъ неизвѣстныхъ въ начальной и нормальной системахъ уравненій совершенно произволенъ, и любое неизвѣстное можетъ быть сдѣлано послѣднимъ. Слѣдовательно, по способу Гаусса можно опредѣлить вѣса $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ всѣхъ наивѣроятнѣйшихъ значеній неизвѣстныхъ; но при этомъ всякій разъ приходится дѣлать перемѣну порядка неизвѣстныхъ, а всякому новому порядку ихъ соотвѣтствуетъ новая система, преобразованная по способу Гаусса. Поэтому для нахожденія вѣсовъ результатовъ всѣхъ неизвѣстныхъ, нужно нѣсколько разъ передѣлывать преобразованную систему Гаусса, что въ случаѣ многихъ неизвѣстныхъ значительно усложняетъ вычисленія. Въ этихъ передѣлкахъ весьма важно соблюдать экономію труда; нужно заботиться о томъ, чтобы не дѣлать передѣлокъ, безъ которыхъ можно обойтись. Здѣсь полезно сдѣлать такое замѣчаніе.

Положимъ, что Гауссова преобразованная система для даннаго порядка неизвѣстныхъ подготовлена. Если въ этомъ порядкѣ неизвѣстныхъ n-ое неизвѣстное и послѣднее взаимно перемѣстимъ, то этому новому порядку будетъ соотвѣтствовать новая преобразованная система уравне-

ній; но въ этой новой системѣ $n-1$ первыхъ уравненій вполнѣ будутъ совпадать съ $n-1$ первыми уравненіями старой, подготовленной ранѣе системы, а потому передѣлка, при составленіи новой системы уравненій, должна касаться только послѣднихъ уравненій, начиная съ n-го уравненія. Пользуясь разумно этимъ замѣчаніемъ, можно соблюсти значительную экономію въ трудѣ.

При маломъ числѣ неизвѣстныхъ вычисленіе вѣсовъ по способу Гаусса не составляетъ затрудненія; такъ при одномъ неизвѣстномъ нормальное уравненіе только одно и коэффиціентъ при неизвѣстномъ прямо будетъ вѣсъ результата.

§ 57. Опредѣленіе мѣръ точностей выводовъ, полученныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ.

Вѣса $g_1, g_2, \ldots, g_m$ отдѣльныхъ наблюденій можно считать извѣстными. Вѣса наивѣроятнѣйшихъ значеній $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ можно опредѣлить по способу Гаусса.

Но для того, чтобы знать мѣры точностей какъ наблюденій, такъ и наивѣроятнѣйшихъ результатовъ, нужно знать мѣру точности η нормальнаго измѣренія.

Величина η должна быть опредѣлена на основаніи тѣхъ же наблюденій, изъ которыхъ опредѣляются наивѣроятнѣйшіе результаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ При этомъ намъ придется имѣть дѣло съ неизвѣстными $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ и η число которыхъ равно $\nu+1$. Разумѣя подъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \eta$ не только указанныя неизвѣстныя, но и перемѣнныя, служащія для выраженія гипотезъ, обозначимъ черезъ $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \eta)$ гипотезу, состоящую въ предположеніи, что разсматриваемыя неизвѣстныя имѣютъ соотвѣтственно значенія $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \eta$.

Найдемъ, вѣроятность этой гипотезы a posteriori.

Замѣтимъ, что вѣроятность P опредѣленной системы результатовъ $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ при допущеніи этой гипотезы будетъ:

$$P = \varphi_1(\Delta_1)\,\varphi_2(\Delta_2)\ldots\varphi_m(\Delta_m)\,dA_1\,dA_2\ldots dA_m.$$

Замѣтимъ также, что, по теоремѣ Байе, вѣроятность á posteriori гипотезы $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \eta)$ будетъ пропорціональна величинѣ P. Обозначая искомую вѣроятность черезъ

$$\Omega\,dx_1\,dx_2\ldots dx_\nu\,d\eta,$$

найдемъ:

$$\Omega\,dx_1\,dx_2\ldots,\ dx_\nu\,d\eta = \mu\varphi_1(\Delta_1)\,\varphi_2(\Delta_2)\ldots\varphi_m(\Delta_m)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_\nu\,d\eta,$$

гдѣ μ есть постоянная величина. Но

$$\varphi_k(\Delta) = \frac{\eta\sqrt{g_k}}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2 g_k\Delta^2},$$

а потому

$$\Omega\,dx_1\,dx_2\ldots dx_\nu\,d\eta = \frac{\mu\eta^m\sqrt{g_1 g_2\ldots g_m}}{\sqrt{\pi^m}}e^{-2\eta^2\theta}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_\nu\,d\eta,$$

гдѣ

$$2\theta = g_1\Delta_1^2 + g_2\Delta_2^2 + \ldots + g_m\Delta_m^2 + K.$$

Имѣя въ виду наивѣроятнѣйшее значеніе мѣры точности η нормальнаго измѣренія, опредѣлимъ вѣроятность простой гипотезы $G(\eta)$, состоящей въ предположеніи, что сказанная мѣра точности равна η. Очевидно, что гипотезы вида $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \eta)$, соотвѣтствующія данному значенію η и всевозможнымъ значеніямъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, суть всевозможные и несовмѣстимые виды, въ которыхъ можетъ состояться осуществленіе гипотезы $G(\eta)$; поэтому вѣроятность $\omega(\eta)\,d\eta$ гипотезы $G(\eta)$ будетъ опредѣляться суммою вѣроятностей гипотезъ $C(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \eta)$, т. е. суммою дифференціальныхъ элементовъ вида:

$$\Omega\,dx_1\,dx_2\ldots dx_\nu\,d\eta,$$

причемъ всѣ перемѣнныя, кромѣ η, должны принимать всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Такая сумма есть многократный опредѣленный интегралъ, т. е.

$$\omega(\eta)\,d\eta = d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega\,dx_1\,dx_2\ldots dx_\nu =$$

$$= \frac{\mu\sqrt{g_1 g_2\ldots g_m}}{\sqrt{\pi^m}}\eta^m\,d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\eta^2\theta}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_\nu.$$

Съ этимъ многократнымъ интегралomъ мы поступимъ такъ же, какъ съ многократнымъ интеграломъ въ предыдущемъ параграфѣ, т. е., замѣнивъ 2θ черезъ $\omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_\nu^2+K$, представимъ интегралъ такъ:

$$\omega(\eta)\,d\eta = \frac{\mu\sqrt{g_1 g_2\ldots g_m}}{\sqrt{\pi^m}}e^{-\eta^2 K}\eta^m\,d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2\omega^2\nu}dx_\nu\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2\omega^2\nu-1}\,dx_{\nu-1}\ldots$$

$$\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2\omega_1^2}\,dx_1$$

и выполнимъ послѣдовательно интегрированія порядкомъ, указаннымъ выше. Получимъ:

$$\omega(\eta)\,d\eta = \frac{\mu\sqrt{g_1 g_2 \ldots g_m}}{\sqrt{\pi^{m-\nu}}} \cdot \frac{1}{\alpha_1\beta_2\ldots\pi_\nu}\,\eta^{m-\nu}\,e^{-K\eta^2}\,d\eta.$$

Наивѣроятнѣйшее значеніе η будетъ соотвѣтствовать maximum вѣроятности $\omega(\eta)\,d\eta$ и, слѣдовательно, maximum функціи

$$(m-\nu)\,lg\,\eta - \eta^2 K.$$

Слѣдовательно, наивѣроятнѣйшее значеніе η должно удовлетворять уравненію:

$$\frac{m-\nu}{\eta} - 2\eta K = 0;$$

отсюда

$$\eta = \sqrt{\frac{m-\nu}{2K}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{K}{m-\nu}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Опредѣлимъ величину K, входящую въ послѣднее равенство. Для этой цѣли обратимся къ тождеству:

$$g_1\Delta_1^2 + g_2\Delta_2^2 + \ldots + g_m\Delta_m^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_\nu^2 + K, \quad . \quad (30)$$

гдѣ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ опредѣляются начальными уравненіями. Замѣтимъ, что наивѣроятнѣйшія значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія нормальной системѣ, преобразованной по спосссбу Гаусса, которую можно представить въ формѣ (20), должны удовлетворять и такой системѣ:

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0, \ldots,\ \omega_\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Замѣтивъ это, подставимъ въ тождество (30) вмѣсто $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ значенія $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_\nu$ и обозначимъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ величины $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ послѣ подстановки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ вмѣсто $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ въ начальныя уравненія. Очевидно, въ правой части тождества (30) всѣ члены, кромѣ K, послѣ указанной подстановки, обратятся въ нули, и мы получимъ:

$$K = g_1\lambda_1^2 + g_2\lambda_2^2 + \ldots + g_m\lambda^2{}_m = \sum g\lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Количества λ опредѣляются изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_1 &= a_1\xi_1 + b_1\xi_2 + \ldots + p_1\xi_\nu + q_1 - A_1,\\ -\lambda_2 &= a_2\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + p_2\xi_\nu + q_2 - A_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\lambda_m &= a_m\xi_1 + b_m\xi_2 + \ldots + p_m\xi_\nu + q_m - A_m. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (33)$$

Подставивъ въ формулу (29) вмѣсто K его выраженіе (32), получимъ:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Sigma g\lambda^2}{m-\nu}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Такъ какъ здѣсь всѣ λ могутъ быть вычислены по формуламъ (33), то η будетъ извѣстно.

§ 58. Приложеніе предшествующихъ формулъ къ случаю одного и двухъ неизвѣстныхъ.

Случай одного неизвѣстнаго. Система начальныхъ уравненій въ этомъ случаѣ будетъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1 - A_1 &= -\Delta_1,\\ a_1x + b_2 - A_2 &= -\Delta_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_mx + b_m - A_m &= -\Delta_m, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ суть результаты m измѣреній, вѣса которыхъ представляются данными числами $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Вся система нормальныхъ уравненій въ разсматриваемомъ случаѣ сведется къ одному только уравненію, которое будетъ имѣть видъ:

$$\left(\sum gaa\right)x + \sum ga\,(b - A) = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

отсюда

$$x = \frac{\Sigma ga\,(A-b)}{\Sigma gaa} =$$

$$= \frac{g_1a_1\,(A_1-b_1) + g_2a_2\,(A_2-b_2) + \ldots + g_m\,a_m\,(A_m-b_m)}{g_1a_1^2 + g_2a_2^2 + \ldots + g_ma_m^2} = \xi.$$

По теоремѣ Гаусса, вѣсъ этого результата ξ есть

$$G = \sum gaa = g_1a_1^2 + g_2a_2^2 + \ldots + g_ma_m^2, \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

а мѣра точности H того же результата, на основаніи равенства $H = \eta\sqrt{\sum gaa}$ и формулы (34), представится такъ:

$$H = \frac{\sqrt{\Sigma gaa}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Sigma g\lambda^2}{m-1}}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

гдѣ вообще

$$\lambda_k = a_k\xi + b_k - A_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

Случай двухъ неизвѣстныхъ. Въ этомъ случаѣ система начальныхъ уравненій должна имѣть видъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 - A_1 = -\Delta_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 - A_2 = -\Delta_2, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_mx_1 + b_mx_2 + c_m - A_m = -\Delta_m. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (40)$$

Система нормальныхъ уравненій будетъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\sum gaa\right)x_1 + \left(\sum gab\right)x_2 + \sum ga\,(c - A) = 0, \\ \left(\sum gba\right)x_1 + \left(\sum gbb\right)x_2 + \sum gb\,(c - A) = 0, \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; (41)$$

гдѣ вообще $\sum gpq = g_1p_1q_1 + g_2p_2q_2 + \ldots + g_mp_mq_m$. Послѣднее уравненіе преобразованной по способу Гаусса нормальной системы будетъ:

$$\left\{\frac{(\Sigma gaa)\,(\Sigma gbb) - (\Sigma gab)^2}{\Sigma gaa}\right\} x_2 +$$

$$+ \frac{(\Sigma gaa)\,[\Sigma gb\,(c - A)] - (\Sigma gab)\,[\Sigma ga\,(c - A)]}{\Sigma gaa} = 0 \quad . \; . \; (42)$$

Поэтому наивѣроятнѣйшее значеніе послѣдняго неизвѣстнаго будетъ:

$$x_2 = \xi_2 = \frac{(\Sigma gab)\,[\Sigma ga\,(c - A)] - (\Sigma gaa)\,[\Sigma gb\,(c - A)]}{(\Sigma gaa)\,(\Sigma gbb) - (\Sigma gab)^2}, \; . \; (43)$$

а вѣсъ этого значенія будетъ:

$$G_2 = \frac{(\Sigma gaa)\,(\Sigma gbb) - (\Sigma gab)^2}{\Sigma gaa} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (44)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ наивѣроятнѣйшее значеніе ξ_1 неизвѣстнаго x_1 и вѣсъ G_1 этого неизвѣстнаго, а именно:

$$x_1 = \xi_1 = \frac{(\Sigma gab)\,[\Sigma gb\,(c - A)] - (\Sigma gbb)\,[\Sigma ga\,(c - A)]}{(\Sigma gaa)\,(\Sigma gbb) - (\Sigma gab)^2}, \; . \; (45)$$

$$G_1 = \frac{(\Sigma gaa)\,(\Sigma gbb) - (\Sigma gab)^2}{\Sigma gbb} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

Мѣры точности результатовъ ξ_1 и ξ_2 будутъ:

$$H_1 = \eta\sqrt{G_1} \text{ и } H_2 = \eta\sqrt{G_2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

гдѣ

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{\Sigma g\lambda^2}{m-1}}},$$

причемъ вообще

$$\lambda_k = a_k\xi_1 + b_k\xi_2 + c_k - A_k.$$

§ 59. Детерминантныя выраженія вѣсовъ результатовъ, выведенныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ. Признакъ надежной и ненадежной постановки наблюденій.

Будемъ разумѣть подъ D детерминантъ основной нормальной системы, именно:

$$D = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), & \ldots, & (ap) \\ (ba), & (bb), & \ldots, & (bp) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (pa), & (pb), & \ldots, & (pp) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum gaa, & \sum gab, & \ldots, & \sum gap \\ \sum gba, & \sum gbb, & \ldots, & \sum gbp \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum gpa, & \sum gpb, & \ldots, & \sum gpp \end{vmatrix} \; . \; . \; (48)$$

Миноръ, получаемый изъ детерминанта D зачеркиваніемъ строки k и столбца l, будемъ обозначать ниже чрезъ $D_{k,\,l}$.

Послѣднее уравненіе преобразованной по способу Гаусса нормальной системы получается изъ основной нормальной системы (10) слѣдующимъ образомъ: изъ первыхъ $\nu - 1$ уравненій системы (10) выражаются $\nu - 1$ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ черезъ x_ν; эти выраженія вносятся въ послѣднее уравненіе преобразованной по способу Гаусса системы. Полученное такимъ образомъ уравненіе вполнѣ характеризуется во 1-хъ тѣмъ, что оно содержитъ одно только неизвѣстное x_ν, и во-вторыхъ тѣмъ, что оно должно содержать сумму $\sum gp\,(q - A)$ непремѣнно съ коэффиціентомъ $+1$. Поэтому, какимъ бы способомъ мы ни исключили изъ системы (10) неизвѣстныя $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$, если результатъ исключенія будетъ обладать указанными характерными признаками, то онъ будетъ представлять собою послѣднее уравненіе преобразованной по способу Гаусса системы.

Замѣтивъ это и исключивъ изъ системы (10) неизвѣстныя x_1, $x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ при помощи детерминантовъ, будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix} \sum gaa, \sum gab, \ldots, \left(\sum gap\right) x_\nu + \sum ga\,(q-A) \\ \sum gba, \sum gbb, \ldots, \left(\sum gqp\right) x_\nu + \sum gb\,(q-A) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum gpa, \sum gpb, \ldots, \left(\sum gpp\right) x_\nu + \sum gp\,(q-A) \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$Dx_\nu + D_{\nu,\nu} \sum gp\,(q-A) - \ldots + (-1)^{\nu-1} D_{2,\nu} \sum gb\,(q-A) + \\ + (-1)^\nu D_{1,\nu} \sum ga\,(q-A) = 0 \quad \ldots \quad (49)$$

Въ это уравненіе сумма $\sum gp\,(q-A)$ входитъ съ коэффиціентомъ $D_{\nu,\nu}$. Раздѣливъ это уравненіе на $D_{\nu,\nu}$, получимъ послѣднее уравненіе преобразованной по способу Гаусса нормальной системы:

$$\frac{D}{D_{\nu,\nu}} x_\nu + \sum gp\,(q-A) - \ldots + (-1)^\nu \frac{D_{1,\nu}}{D_{\nu,\nu}} \sum ga\,(q-A) = 0 \quad . \quad (50)$$

Поэтому вѣсъ G_ν наивѣроятнѣйшаго значенія неизвѣстнаго x_ν представится такъ:

$$G_\nu = \frac{D}{D_{\nu,\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Подобнымъ образомъ, сдѣлавъ неизвѣстное x_k послѣднимъ, можно сообразить вѣсъ G_k наивѣроятнѣйшаго значенія этого неизвѣстнаго, именно:

$$G_k = \frac{D}{D_{k,k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Формула (52) показываетъ, что вѣса неизвѣстныхъ $x_1, \ldots, x_\nu$, опредѣляемыхъ системою уравненій (6), будутъ ничтожными, *ненадежными*, если детерминантъ D ничтоженъ, почти нуль въ отношеніи къ своимъ минорамъ D_{11}, $D_{22}, \ldots, D_{\nu\nu}$. Это заключеніе Гауссовой теоріи способа наименьшихъ квадратовъ, даваемое заднимъ числомъ, т. е. послѣ наблюденія, согласуется съ апріорнымъ разсужденіемъ Лапласовской теоріи, изложенной выше (см. § 25). При аннулированіи детерминанта D нормальная система дѣлается негодною, т. е. самая постановка или планъ наблюденій не выдерживаетъ критики. Признакъ, при которомъ выводы по способу наименьшихъ квадратовъ оказываются парадоксальными и ненадежными, одинаковый съ обѣихъ точекъ зрѣнія (Лапласа и Гаусса).

§ 60. Случай нелинейныхъ уравненій. Случай условныхъ уравненій.

I. Мы предполагали, что начальныя уравненія суть линейныя. Перейдемъ теперь къ случаю, когда наблюдаемыя функціи нелинейныя, а потому и начальныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2 \ldots x_\nu) - A_1 &= -\Delta_1, \\ F_2(x_1, x_2 \ldots x_\nu) - A_2 &= -\Delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F_m(x_1, x_2 \ldots x_\nu) - A_m &= -\Delta_m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

суть также нелинейныя.

Наивѣроятнѣйшія à posteriori значенія неизвѣстныхъ должны удовлетворять и въ этомъ случаѣ слѣдующей системѣ уравненій:

$$\frac{d\theta}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\theta}{dx_2} = 0, \ldots, \frac{d\theta}{dx_\nu} = 0,$$

гдѣ $2\theta = \sum g\Delta^2$. Но при нелинейности функцій F_1, $F_2, \ldots$, F_m система, которой удовлетворяютъ наивѣроятнѣйшія значенія перемѣнныхъ, будетъ также нелинейной. Прямое рѣшеніе этой системы бываетъ въ большинствѣ случаевъ весьма трудно, и поэтому приходится здѣсь прибѣгать къ вычисленію по способу послѣдовательныхъ приближеній, состоящему въ слѣдующемъ. Стараются получить сначала первыя приближенія къ неизвѣстнымъ величинамъ, которыя можно найти хотя бы такъ: выбираютъ тѣ изъ уравненій системы (53), которыя проще по своему составу, и, подставивъ во вторыхъ частяхъ нуль, вмѣсто каждаго Δ, рѣшаютъ ихъ относительно неизвѣстныхъ; найденныя величины и будутъ первыя приближенія неизвѣстныхъ. Пусть они будутъ: ξ_1', ξ_2', $\xi_3', \ldots, \xi_\nu'$. Неизвѣстныя можно выразить такъ:

$$x_1 = \xi_1' + \delta_1, \; x_2 = \xi_2' + \delta_2, \ldots, x_\nu = \xi_\nu' + \delta_\nu, \quad \ldots \quad (54)$$

гдѣ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ суть поправки и, слѣдовательно, весьма малыя величины. Замѣнивъ въ функціи F_1 перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ выраженіями (54), затѣмъ, разложивъ ее по степенямъ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ при помощи строки Тейлора и ограничиваясь членами 1-го порядка, будемъ имѣть:

$$F_1 = n_1 + a_1\delta_1 + b_1\delta_2 + \ldots + q_1\delta_\nu.$$

Тѣмъ же самымъ порядкомъ всѣ остальныя функціи представятся такъ:

$$F_2 = n_2 + a_2\delta_1 + b_2\delta_2 + \ldots + q_2\delta_\nu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_m = n_m + a_m\delta_1 + b_m\delta_2 + \ldots + q_m\delta_\nu,$$

Внося эти приближенныя выраженія въ начальныя уравненія, получимъ приближенную линейную систему начальныхъ уравненій съ неизвѣстными

$\delta_2, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$. Этой приближенной начальной системѣ будетъ соотвѣтствовать приближенная линейная нормальная система. Рѣшивъ эту послѣднюю систему, получимъ значенія $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_\nu'$ близкія къ наивѣроятнѣйшимъ значеніямъ неизвѣстныхъ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$. Придавъ найденныя значенія соотвѣтственно къ первымъ приближеніямъ $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_\nu'$: получимъ вторыя приближенія неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, а именно

$$\xi_1'' = \xi_1' + \delta_1', \ \xi_2'' = \xi_2' + \delta_2', \ldots, \ \xi_\nu'' = \xi_\nu' + \delta_\nu'.$$

Эти величины обыкновенно бываютъ достаточно близки къ наивѣроятнѣйшимъ значеніямъ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, въ особенности, если первыя приближенія взяты удачно. Но если бы замѣчено было, что вторыя приближенныя величины $\xi_1'', \xi_2'', \ldots, \xi_\nu''$ не достаточно удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\frac{d\theta}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\theta}{dx_2} = 0, \ldots, \frac{d\theta}{dx_\nu} = 0,$$

то можно было бы тѣмъ же самымъ пріемомъ найти вторыя поправки и, слѣдовательно, третьи приближенія для наивѣроятнѣйшихъ значеній неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ и т. д. Такими послѣдовательными приближеніями всегда бываетъ возможно опредѣлить наивѣроятнѣйшія значенія неизвѣстныхъ съ желаемою степенью точности.

II. Предположимъ, что неизвѣстныя $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ начальной системы уравненій (53) должны удовлетворять въ точности слѣдующимъ строго опредѣленнымъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \psi_p(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (55)$$

гдѣ $p < \nu$. Разсуждая какъ въ первомъ случаѣ, мы должны будемъ искать максимумъ функціи $2\theta = \Sigma g \Delta^2$, но считая p перемѣнныхъ: $x_{\nu-p+1}, x_{\nu-p+2}, \ldots, x_\nu$ функціями остальныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-p}$. Этотъ максимумъ будетъ условнымъ. Считая $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ пока неопредѣленными постоянными, можно искать безусловный максимумъ функціи

$$\Phi = 2\theta + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \ldots + \lambda_p\psi_p \quad \ldots\ldots (56)$$

Это исканіе приведетъ къ системѣ уравненій:

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx_2} = 0, \ldots, \quad \frac{d\Phi}{dx_\nu} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (57)$$

при чемъ и постоянныя $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ теперь опредѣляются присоединеніемъ системы (55) къ системѣ (57). Будемъ имѣть $\nu + p$ уравненій съ $\nu + p$ неизвѣстными $x_1, \ldots, x_\nu, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Часть III.

Критеріи антропологіи, этнологіи и біологіи. Графическое символическое исчисленіе массовыхъ явленій, въ ихъ взаимоотношеніи, логической средней и крайней связи, сосуществованіи и исторической послѣдовательности. Варіаціи вѣроятій и системъ подъ дѣйствіемъ поводовъ. Асимптотическія выраженія вѣроятностей итоговъ.

ГЛАВА I.

Теорія взаимоотношеній, комбинируемая съ теоріей среднихъ. Графическія символическія тѣла. Схемы изслѣдованія антропологическихъ и другихъ законовъ сосуществованія, или онтологической статики.

§ 1. Взаимоотношеніе различныхъ явленій среды, индивидуумы которой поддаются точному измѣренію абсолюными мѣрами. Средніе люди этничес ихъ массъ. Символическія многомѣрныя тѣла.

I. Достовѣрность теоріи среднихъ величинъ, какъ мы видѣли (см. §§ 26—31), распространяется (съ извѣстными изъянами) на болѣе или менѣе зависимые большіе массивы явленій. Изъятія соотвѣтствуютъ неустойчивости, или парадоксальнымъ и катастрофальнымъ состояніямъ процесса.

Если этого изъятія нѣтъ, если на данной значительной территоріи общій порядокъ болѣе или менѣе отстоятся (что характеризуется отмѣткою статистическаго модуля M устойчивости массивныхъ явленій на опредѣленномъ кускѣ его скалы), то теорію среднихъ можно съ увѣренностью примѣнять къ дѣлу изслѣдованія *нестрого опредѣленныхъ*, но характерныхъ взаимоотношеній (A) (см. ниже) между различными, но тяготѣющими другъ къ другу средними величинами и отдѣльными явленіями.

Этою нестрогою опредѣленностію регулируются загадочныя свободныя эмпирическія функціональныя соотношенія или связи различныхъ совмѣстныхъ явленій, при чемъ вѣроятностію оцѣниваются степени и направленія вліянія различныхъ факторовъ на изслѣдуемую ихъ функцію; а попутно изучаются діаграммы вѣроятности Z отклоненія Δ отъ нуля самой формулы взаимоотношенія при разныхъ гипотезахъ относительно входящей въ формулу группы варьирующихся среднихъ факторовъ. Эти отклоненія Δ какъ бы повѣряются въ долгъ и чѣмъ либо выкупаются по тарифу.

Если соотношеніе при тѣхъ же общихъ условіяхъ повторяется въ данной странѣ изъ года въ годъ, изъ десятилѣтія въ десятилѣтіе, изъ вѣка въ вѣкъ съ нѣкоторыми варіаціями вліяющихъ и производящихъ факторовъ, то приблизительное соотношеніе (эмпирическій законъ) совершенствуется и получаетъ какъ бы пророческое значеніе, графически открывающее улучшенныя *закономѣрности сосуществованія* *) и подсказывающее поправки взаимоотношеній съ большою вѣроятностью удачной онтологической статики.

Законодатель будетъ предписывать исполнимые законы массамъ населенія страны, если будетъ совѣтоваться съ этими зрячими, не слѣпыми предсказаніями. Общественные круги и классы не ошибутся смертельно въ своихъ предположеніяхъ, если будутъ полагаться на тѣ же предсказанія.

Теорія соотношеній или взаимоотношеній популяризована преимущественно англійскими математиками-статистиками: Francis Galton, Karl Pearson, Udny Yule и др. **), издающими журналъ «Biometrica». Нѣмецкіе антропологи сближаютъ ее съ теоріей Гаусса и Фехнера ***). Мы сближаемъ ее съ теоріей среднихъ Чебышева и съ графическимъ исчисленіемъ Бугаева, д'Окань и пр. (см. часть I).

Разсматриваютъ записи измѣренія разнородныхъ величинъ, совершаемаго надъ множествомъ отдѣльныхъ объектовъ или индивидуумовъ численно извѣстнаго массива, подводя потомъ среднія измѣренныхъ величинъ по даннымъ областямъ пространства, времени и числа душъ населенія. Среднія $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu$ потомъ замѣняются новыми перемѣнными

$$x_0 = y,\ x_1,\ x_2,, \ldots,\ x_\nu$$

такъ, *чтобы ихъ ожиданія были нулями*. Эта принципіальная замѣна

*) О закономѣрностяхъ послѣдовательности рѣчь будетъ въ другой главѣ; здѣсь же будемъ говорить только о закономѣрностяхъ сосуществованія, о статикѣ.

**) *G. Udny Yule*: An Instroduction to Theory of Statistics. London, 1911.

***) *Karl E. Ranke*: Die Theorie der Korellation. (Archiv für Antropologie—Neue Folge, Band. IV, Heft 2 und 3. Braunschweig. 1906).

J. Czekanowski: Untersuchungen über das Verhältnis der Kopfmasse zu den Schädelmassen. (Archiv für Antropologie—Neue Folge, Band. VI, H. 1. 1907).

достигается перенесеніемъ *начала* (нуля) координатъ $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu$ графическаго $\nu + 1$ — мѣрнаго пространства въ серединное *центральное положеніе*, какъ бы въ центръ тяжести, куда графическая чернильная «точка» $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ *чаще всего попадаетъ*.

Предполагается, что $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu$ суть различныя среднія величины—каждая типа, указаннаго въ концѣ страницы 317. Эти величины, взятыя, положимъ, изъ различныхъ свойствъ и принадлежностей какого либо антропологическаго массива, бываютъ связаны такими эмпирически угадываемыми *законами*, благодаря которымъ *очень часто* (но не всегда) эти среднія по приближенію удовлетворяютъ соотношеніямъ, выраженнымъ въ формѣ *невполнѣ опознанныхъ* уравненій типа:

$$f_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu) = \Delta^{(i)};\ i = 1, 2, \ldots, m,\ m < \nu + 1; \quad . \ . \quad (A)$$

здѣсь величины $\Delta^{(i)}$ суть неизвѣстныя малыя, рискуемыя числа; онѣ ниже опускаются, а знакъ $=$ замѣщается знакомъ $(=)$ приближеннаго равенства; къ этимъ соотношеніямъ присоединяются еще условія въ формѣ *неравенствъ*, ограничивающихъ варіаціи величинъ $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu$ нѣкоторыми достовѣрными предѣлами, помѣченными на ихъ скалахъ; наконецъ, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ суть *искомыя* постоянныя.

Кромѣ, такъ сказать, легальныхъ значеній, для которыхъ данныя уравненія типа (A) приближенно удовлетворяются, пусть возможны еще совокупности значеній $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu$, неудовлетворяющія уравненіямъ (A).

Выходы какъ этихъ нелегальныхъ «точекъ» $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu)$, такъ и легальныхъ оцѣниваются соотвѣтственными вѣроятностями. Символъ

$$\Delta P_{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu}$$

есть вѣроятность, что выйдетъ какая либо данная «точка» $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu)$. Эта вѣроятность будетъ функціей названной «точки», которой координаты $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu$ могутъ измѣняться въ предѣлахъ данныхъ скалъ. Производящая функція этой вѣроятности будетъ:

$$F(u_0, u_1, \ldots, u_\nu) = \sum\sum \ldots \sum \Delta P_{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu}\, u_0^{\xi_0} u_1^{\xi_1} \ldots u_\nu^{\xi_\nu} . \quad (Б)$$

Теорія взаимоотношеній (A) можетъ быть обоснована съ помощію производящихъ функцій $(Б)$ очень строго. Но здѣсь мы разсмотримъ ее въ болѣе популярномъ, упрощенномъ англичанами, изложеніи, измѣняя нѣкоторыя англійскія критеріи примѣнительно къ нашей теоріи среднихъ и къ нашей номографіи и идіографіи.

Въ числѣ соотношеній типа (A) могутъ быть и алгебраически нелинейныя; но разложеніями въ ряды они такъ или иначе сводятся къ линейнымъ. Таковы соотношенія между потенціалами пользъ V и цѣнами

благъ (см. стр. 367); они принадлежатъ къ типу (A) и содержатъ функціи, разлагаемыя въ ряды; потомъ отбрасываютъ малые остаточные члены рядовъ.

Итакъ, въ числѣ функціональныхъ соотношеній, выражающихъ связь массовыхъ явленій, играютъ *основную* роль группы *линейныхъ* соотношеній (корреляцій) между различными *варіаціями* среднихъ (біологическими, антропологическими, экономическими, моральными).

Простѣйшая линейная связь представляетъ случай взаимоотношенія

$$y\,(=)\,b + ax, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

связывающаго двѣ среднихъ варьирующихся величины:

$$x_0 = y \quad \text{и} \quad x_1 = x.$$

Общій алгебраически линейный случай представляется взаимоотношеніями вида:

$$\left.\begin{aligned} y_1\,(=)\,b_1 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n,\\ y_2\,(=)\,b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_m\,(=)\,b_m + a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1')$$

связывающими значенія $m + n$ среднихъ варьирующихся количествъ:

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,$$
$$y_1,\ y_2, \ldots,\ y_m.$$

Антропометрическая теорія изучаетъ, путемъ измѣренія многихъ индивидуумовъ данной этнической массы, соотношеніе: 1) всей фигуры и 2) отдѣльныхъ органовъ человѣческаго тѣла. Между общею фигурою средняго человѣка Кетле и его органами существуетъ среднее соотвѣтствіе.

Такъ, существуетъ соотвѣтствіе между среднимъ ростомъ y человѣка данной этнической массы и среднею длиною x какого либо органа, напримѣръ, руки. Приблизительно это *антропологическое* соотношеніе будетъ линейное, т. е. вида (1).

Соотвѣтствіе этого рода для небольшихъ по числу массъ индивидуумовъ можетъ быть несовершенное.

Массовыя наблюденія этого рода совершаются изъ года въ годъ надъ рекрутами и апостеріорно подтверждаютъ какъ теорію взаимоотношеній, такъ и теорію среднихъ.

II. Соотношенія вида (1) обнаруживаются теоріей среднихъ и для массовыхъ *соціально-экономическихъ* явленій, повторяющихся ежегодно, исчисляемыхъ въ среднемъ счетѣ на сто или тысячу душъ населенія и связанныхъ нерѣшительною причинною зависимостью.

Примѣръ подобнаго соотношенія представляетъ связь $y = b + ax$

между цѣною x единицы товара и количествомъ y товара, выпущеннаго на рынокъ. Торговая статистика подтверждаетъ это соотвѣтствіе. При этомъ какъ теорія спроса и предложенія, такъ и покровительственная для мелкой промышленности таксологическая теорія, изложенная выше (см. стр. 336—337), показываютъ, что должно быть:

$$a < 0.$$

III. Изъ области *моральной* статистики примѣръ соотвѣтствія представляютъ явленія цѣнъ x ржи и числа y кражъ. Приведенная въ части I, § 18_2, діаграмма этихъ нерѣшительно связанныхъ явленій за рядъ лѣтъ наглядно показываетъ, что между этими явленіями существуетъ приблизительное соотношеніе, выраженное уравненіемъ $y = b + ax$. При этомъ будемъ имѣть $a > 0$, ибо названная діаграмма показываетъ, что съ поднятіемъ цѣны x ржи на Δx число y кражъ *увеличивается*.

IV. Дифференціальное соотношеніе, введенное изъ уравненія (1), будетъ имѣть видъ:

$$\Delta y\,(=)\,a\,.\,\Delta x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Если $a > 0$, то будемъ говорить, что приращенія Δy и Δx связаны *положительнымъ сродствомъ*; напротивъ, при $a < 0$ будемъ говорить, что Δy и Δx связаны *отрицательнымъ сродствомъ*.

§ 2. Случай взаимоотношенія среднихъ значеній двухъ варьирующихся различныхъ факторовъ. Двухмѣрное символическое тѣло.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію схемы работъ, опредѣляющихъ эмпирическую зависимость типа (1) съ помощью большого числа наблюденій надъ варьирующимися свойствами x и y антропологической массы.

Пусть область наблюденій дѣлится на уѣзды (1), (2), . . ., (n). Пусть x_k и y_k представляютъ пару наблюденныхъ соотвѣтственныхъ значеній среднихъ величинъ x и y для уѣзда (k). Приблизительно эти значенія удовлетворяютъ соотношенію (1), т. е.

$$\Delta_k = ax_k + b - y_k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ Δ_k есть малая величина и $k = 1,\ 2, \ldots,\ n$.

Опредѣляя по этимъ наблюденіямъ взаимоотношеіе типа (1) между x и y, можемъ принять выраженіе $b + ax$ за интерполяціонную формулу, приблизительно опредѣляющую функцію y перемѣннаго x. Загѣмъ можемъ воспользоваться *интерполяціоннымъ способомъ наименьшихъ квадратовъ*, изложеннымъ въ части I, § 15. Приписывая начальному уравненію (3) вѣсъ g_k (вѣса, положимъ, опредѣляются по абсолютному числу

правильно, равномѣрно сдѣланныхъ *основныхъ* наблюденій въ уѣздахъ), приводимъ названнымъ интерполяціоннымъ способомъ вопросъ о неизвѣстныхъ a и b къ нахожденію минимума функціи

$$\sum_{k=1}^{n} g_k \cdot \Delta_k^2 = \sum g_k \cdot (a \cdot x_k + b - y_k)^2$$

перемѣнныхъ параметровъ a и b.

Эти значенія a и b будутъ удовлетворять нормальнымъ уравненіямъ:

$$\sum g_k \cdot y_k = b \sum g_k + a \cdot \sum g_k x_k, \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\sum g_k \cdot x_k y_k = b \sum g_k x_k + a \cdot \sum g_k x_k^2 \quad \ldots\ldots (5)$$

Ради упрощенія предположимъ, что форма связи (1) есть преобразованная, полученная изъ первоначальной связи вида:

$$\eta = \beta + a \cdot \xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

съ помощью формулъ

$$\xi = \xi_0 + x \quad \text{и} \quad \eta = \eta_0 + y \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Непосредственному наблюденію по уѣздамъ пусть подлежатъ цифровыя значенія связанныхъ по уѣздамъ величинъ ξ и η. Затѣмъ вспомогательныя величины ξ_0 и η_0 пусть опредѣляются такъ:

$$\xi_0 = \frac{\Sigma g_k \xi_k}{\Sigma g_k} \quad \text{и} \quad \eta_0 = \frac{\Sigma g_k \eta_k}{\Sigma g_k} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Очевидно, ξ_0 есть средняя изъ величинъ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и η_0 есть средняя изъ величинъ $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Перемѣнныя x и y суть варіаціи, или отклоненія $\xi - \xi_0$ и $\eta - \eta_0$ отъ *центральныхъ* среднихъ ξ_0 и η_0. Въ самомъ дѣлѣ точка (ξ_0, η_0) займетъ серединное центральное положеніе на плоскости прямоугольныхъ координатъ ξ и η въ массивѣ точекъ $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$; подобно центру тяжести точечнаго физическаго тѣла съ массами g_k, она есть средоточіе *выявливающихся* силъ процесса. При этомъ будемъ имѣть:

$$b = \beta + a\xi_0 - \eta_0, \quad x_k = \xi_k - \xi_0, \quad y_k = \eta_k - \eta_0,$$

$$\sum g_k x_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum g_k y_k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Отсюда и изъ уравненій (4) и (5) будетъ слѣдовать

$$b = 0, \quad a = \frac{\Sigma g_k x_k y_k}{\Sigma g_k x_k^2} \quad \text{и} \quad y = a \cdot x \quad \ldots\ldots (10)$$

Если введемъ обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} N \cdot \sigma_1^2 &= \sum g_k x_k^2, \quad N \cdot \sigma_2^2 = \sum g_k y_k^2, \\ N &= \sum g_k, \quad r = \frac{\Sigma g x_k y_k}{\sqrt{\Sigma (g_k x_k^2) \cdot \Sigma (g_k y_k^2)}} = \frac{\Sigma g x_k y_k}{N \sigma_1 \sigma_2}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

то будемъ имѣть эмпирическій законъ:

$$y\,(=)\, r \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x \text{ или } \eta - \eta_0\,(=)\, r \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\xi - \xi_0) \quad \ldots\ldots (12)$$

Величины σ_1 и σ_2 суть *среднія квадратическія отклоненія* x и y отъ нуля; вѣсъ вывода a, примѣнительно къ аналогической Гауссовой теоріи (см. стр. 422), будетъ $N\sigma_1^2$.

Если бы мы изъ тѣхъ же наблюденій искали соотвѣтствіе между x и y подъ формой

$$x = b' + a' \cdot y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

то нашли бы тѣмъ же порядкомъ:

$$b' = 0 \quad \text{и} \quad a' = r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Вѣсъ вывода a' будетъ $N \cdot \sigma_2^2$, а соотношеніе (13) получитъ видъ:

$$x\,(=)\, r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot y \text{ или } \xi - \xi_0\,(=)\, r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\eta - \eta_0) \quad \ldots\ldots (15)$$

Количество r называется *коэффиціентомъ взаимоотношенія* или *связи* между значеніями x и y. Значеніе этого коэффиціента впервые разъяснено въ трудахъ Гальтона и затѣмъ Пирсона. Очевидно,

$$-1 < r < +1.$$

Крѣпостное строгое взаимоотношеніе будетъ при $r = \pm 1$; тогда уравненія (12) и (15) опредѣляютъ совпадающія прямыя линіи на плоскости декартовыхъ координатъ x и y; вся масса точекъ (ξ_k, η_k) размѣщается по прямой линіи (12), имѣя центръ въ точкѣ (ξ_0, η_0). Въ остальныхъ случаяхъ уравненія (12) и (15) опредѣлятъ прямыя, образующія острый уголъ, величина котораго растетъ вмѣстѣ съ величиною $1 - r^2$; соотвѣтствіе между значеніями x и y при этомъ портится болѣе и болѣе; но всетаки, пока этотъ уголъ малъ, массивъ точекъ (ξ_k, η_k) стремится распредѣляться плотнѣе всего въ области этого угла, какъ это видно изъ приведенной ниже таблицы (см. стр. 441). При

$$r = 0$$

взаимоотношеніе въ линейной формѣ между значеніями x и y будетъ отсутствовать; прямыя линіи (12) и (15) образуютъ прямой уголъ, и массивъ точекъ (ξ_k, η_k) не будетъ вытягиваться въ опредѣленномъ направленіи на плоскости координатъ ξ и η, какъ млечный путь на картѣ неба.

Вообще если связь въ линейной формѣ отсутствуетъ или получилась слабая (коэффиціентъ связи r весьма малъ), то при тѣхъ же матеріалахъ наблюденія можно искать соотношеніе съ помощію нелинейной интерполяціонной формулы, напримѣръ, съ помощію формулъ

$$y = c + bx + ax^2 \text{ или } y = (a + bx) : (c + dx) \text{ и т. д.}$$

§ 3. Некатегорическія сужденія, ихъ термины и система ихъ логики. Взаимное отношеніе субъективныхъ сужденій къ объективнымъ, среднимъ и крайнимъ, идіографическаго исчисленія къ номографическому и малой статистики къ большой.

Неопредѣленный анализъ имѣетъ своеобразную логическую систему, продолжающую *опредѣленный* логическій анализъ. Разсмотримъ двѣ составныя части этой системы.

Уравненіе (12) есть, съ точки зрѣнія логики, сужденіе или *предложеніе*. Лѣвую его часть назовемъ *подлежащимъ*, правую — сказуемымъ; знакъ (=) есть *связка*. Уравненія (12) и (15) представляютъ *обращенныя* логическія предложенія—одно относительно другого; сказуемое одного предложенія переходитъ при этомъ логическомъ оборотѣ въ подлежащее другого и наоборотъ; но тождества между прямымъ и обратнымъ предложеніями не получается, что и выражается «угломъ». Этотъ уголъ можно назвать угломъ обращенія.

Эти предложенія по ихъ діалектологической или интуитивной природѣ можно назвать *некатегорическими* включенными *средними* или *опосредствованными* сужденіями, ибо формы ихъ вытекаютъ изъ интуицій (умозрѣній и наблюденій) ученія о среднихъ, апріорныхъ и апостеріорныхъ.

Система уравненій (1′) представляетъ болѣе сложную объединенную группу опосредствованныхъ предложеній, связывающихъ $m + n$ подразумѣваемыхъ (позади терминовъ) предметовъ, при чемъ предметы лѣвыхъ частей этихъ уравненій суть подлежащія, а правыя части представляютъ сложныя, составныя сказуемыя.

Заключенія силлогизмовъ, построенныхъ изъ опосредствованныхъ сужденій, также назовемъ опосредствованными или средними выводами.

Логика опосредствованныхъ разсужденій *вяжетъ* члены предложеній иначе, нежели логика неравенствъ и ихъ предѣловъ: низшаго и высшаго. Эту послѣднюю логическую систему, которая скалярно ограничиваетъ

варіаціи признаковъ $\xi_0, \ldots, \xi_\nu$ (стр. 429), назовемъ логикой *крайнихъ* сужденій; связку этой логики Л. Кутюра удачно обозначилъ символомъ $<$, или, точнѣе, $\leqq$, ибо основное взаимоотношеніе, разсматриваемое въ «Алгебрѣ логики» Кутюра и Шредера, оказывается формально аналогичнымъ математическому отношенію $<$ (меньше) и $\leqq$ (небольше). *Обѣ эти логики составляютъ вмѣстѣ систему неопредѣленнаго логическаго анализа.*

Та и другая логическія системы (т. е. наша логика среднихъ и логика крайнихъ Л. Кутюра) дополняютъ другъ друга и достигаютъ опредѣленныхъ рѣшеній въ *предѣльныхъ* предложеніяхъ своихъ, выраженныхъ *совершенно опредѣленными* уравненіями. Тутъ же обѣ логики сходятся съ Аристотелевской логикой тождества $A = A$ или «трехъ законовъ», о которой мы говоримъ въ «Предисловіи» и въ §§ 4 (ч. I) и 31 (ч. II).

По природѣ сужденій слѣдуетъ еще различать сужденія на *объективныя*, или номографическія, и *субъективныя*, или идіографическія,—различать по большему или меньшему приближенію сужденій къ *общимъ* и, наоборотъ, къ *частнымъ* достовѣрностямъ. При конечномъ, но чрезвычайно большомъ числѣ N основныхъ наблюденій, равномъ Σg_k, возможно достигнуть почти божески-объективныхъ критеріевъ; совершенно объективные критеріи, какъ общія достовѣрности для множествъ или массъ, будутъ *предѣломъ*, или *асимптотическимъ случаемъ*, когда $N = \infty$; эти сужденія будутъ отражать наиболѣе прочныя, «окаменѣлыя» закономѣрности сосуществованія, наиболѣе надежную статику, конституцію рода.

При конечномъ N сужденія будутъ болѣе или менѣе субъективными, отражая въ себѣ *идіотизмы* мѣста, времени и *идолы* личнаго темперамента, кипѣнія страстей.

Отъ объективныхъ положеній субъективныя сужденія, идіотизмы мѣста, времени и личныхъ настроеній могутъ безнаказанно отклоняться, но лишь до извѣстныхъ некатастрофальныхъ, не адскихъ предѣловъ.

Идіографическое исчисленіе, работающее надъ числами неошеломляющей величины, представляющее *частный интересъ* для малыхъ *оазисовъ* земли и *острововъ* мысли, въ то же время представляетъ важный *всеобщій*, номографическій интересъ; ибо постепенно изъ основныхъ частичныхъ элементарныхъ наблюденій и небольшихъ чиселъ планомѣрно выводится познаніе интересовъ общаго блага и общихъ законовъ природы, являющихся общею опорою или устоемъ.

Идіографическое мышленіе примыкаетъ къ номографическому такъ, какъ волны морского прибоя даннаго берега примыкаютъ къ океану, образцу твердыхъ законовъ природы и законовъ волненія, способнаго захлестывать корабли и прибрежныя мѣста. Для иного прибрежнаго жителя, пожалуй, болѣе интересны именно частныя явленія жизни моря,

которыя осаждаютъ его хижину, нежели общіе законы движеній океана, которые его не осаждаютъ.

Малая частная статистика есть составная часть большой статистики. Такъ и малый интересъ частнаго права не пренебрегается большимъ интересомъ объективнаго государственнаго права.

Объективированіе частныхъ наблюденій и сужденій, спокойное—sine ira et studio, есть дѣло большой статистики и большого коллективнаго труда свѣдущихъ (см. стр. 358), суммирующаго и хранящаго частныя наблюденія, превращая ихъ въ руководящія графическія тѣла по правиламъ непростой, но стройной аритмологики, непростого, но надежнаго идіографическаго и номографическаго исчисленія и опытнаго критицизма. Графическія многомѣрныя тѣла могутъ обнять своими скалами и штрихами гражданскіе кодексы, обычно выражаемыя иначе: популярнымъ языкомъ.

Монополія правильности связыванія частей *Всего* не принадлежитъ ни одной изъ формальныхъ логическихъ системъ; но взаимопомощь какъ этихъ теоретическихъ системъ, такъ и опытныхъ интуицій способна при вѣрной зсписи и публикаціи давать наилучшіе выводы въ результатѣ старательной работы, отыскивающей выходы и выкупы изъ «ложныхъ круговъ»; лишь въ техническомъ словоупотребленіи можно предложенія одной изъ трехъ логическихъ системъ называть «правильными», не забывая возможности «правильнаго софизма», «Прокрустова ложа», какъ въ постулированіи знанія и интерпретаціи понятій, такъ и въ интерпретаціи и стилизаціи руководящихъ сужденій (см. Предисловіе). *При этомъ системы сужденій дуалистическаго типа (1) или (12) затушевываютъ принципъ множественности причинъ и основаній своею партикулярностію.*

§ 4. Случай прямого взаимоотношенія трехъ и многихъ различныхъ варьирующихся факторовъ.

I. Разсмотримъ теперь соотношеніе, въ которомъ средняя величина y является функціей многихъ факторовъ (напримѣръ, ростъ человѣка сопоставляется съ длиною руки, съ размѣрами головы и пр.). Эти соотношенія принадлежатъ къ типу (1′) при $m = 1$.

Средняя величина y свойства, наблюдаемаго у большого антропологическаго массива, можетъ быть поставлена въ соотвѣтствіе какъ съ антропометрическими признаками индивидуумовъ массива и съ классификаціями ихъ по какому либо основанію, родовому или соціальному, такъ и съ средствами удовлетворенія его насущныхъ нуждъ.

Пусть, напримѣръ, наблюдаются варіаціи роста рекрутъ, поступающихъ въ армію изъ данной населенной области, раздѣленной на уѣзды. Въ массивѣ рекрутъ будемъ различать въ $^0/_0$ къ нему отношеніи рекрутъ

$x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$, принадлежащихъ къ различныхъ этническимъ составнымъ группамъ. Далѣе учтемъ вліяніе на средній ростъ населенія его матеріальнаго благосостоянія, напримѣръ, вліяніе средней величины x_ν, или z, земельнаго крестьянскаго владѣнія.

При этихъ условіяхъ можно пытаться интерполяціей установить изъ массы наблюденій по уѣздамъ приблизительное соотношеніе вида:

$$y\ (=)\ b + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{\nu-1}x_{\nu-1} + a_\nu z \ldots . \quad (16)$$

Въ этомъ соотношеніи коеффиціенты $b, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ будутъ искомыми; они своими величинами и алгебраическими знаками будутъ характеризовать степень вліянія факторовъ $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ и z на среднюю роста y рекрутъ.

II. Числовое опредѣленіе зависимости типа (16) совершается, при данномъ массивѣ наблюденій, по слѣдующей рабочей схемѣ.

Вообразимъ помянутое дѣленіе данной области на уѣзды (1), (2), . . ., (n), въ коихъ сдѣланы наблюденія. Пусть $y_k, x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{(\nu-1)\,k}$ и z_k, или $x_{\nu k}$, представляютъ группу значеній перемѣнныхъ $y, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ и z (или x_ν) для уѣзда (k). Приблизительно эти значенія удовлетворяютъ соотношенію (16), т. е. будемъ имѣть:

$$\Delta_k = b + a_1x_{1k} + a_2x_{2k} + \ldots + a_{\nu-1}x_{(\nu-1)\,k} + a_\nu z_k - y_k, \ldots (17)$$

гдѣ Δ_k есть незначительная погрѣшность и $k = 1, 2, \ldots n$.

Принимая вторую часть равенства (16) за интерполяціонную формулу, приблизительно опредѣляющую функцію y перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ и z, будемъ искать коеффиціенты $b, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ этой формулы по способу наименьшихъ квадратовъ, исходя изъ начальныхъ уравненій (17) и приписывая вѣса g_k соотвѣтственнымъ изъ нихъ. Вопросъ сводится къ опредѣленію этихъ коеффиціентовъ такъ, чтобы функція

$$\sum_{k=1}^{n} g_k\,(b + a_1x_{1k} + a_2x_{2k} + \ldots + a_{\nu-1}x_{(\nu-1)\,k} + a_\nu z_k - y_k)^2 \ldots (18)$$

перемѣнныхъ $b, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ обращалась въ минимумъ.

Изъ этого условія выведутся требуемыя нормальныя уравненія, опредѣляющія искомую группу величинъ $b, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$.

Ради упрощенія предположимъ, что форма связи (16) есть преобразованная, полученная изъ первоначальной связи

$$\eta\ (=)\ \beta + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_{\nu-1}\,\xi_{\nu-1} + a_\nu\,\xi_\nu \ldots . \quad (19)$$

съ помощью формулъ преобразованія:

$$\eta = \eta_0 + y,\ \xi_1 = \xi_{10} + x_1, \ldots,\ \xi_{\nu-1} = \xi_{(\nu-1)\,0} + x_{\nu-1},\ \xi_\nu = \xi_{\nu 0} + z \ldots (20)$$

Непосредственному наблюденію по уѣздамъ подлежатъ цифровыя значенія величинъ η, ξ_1, ξ_2, . . ., ξ_ν. Затѣмъ выбираются вспомогательныя величины η_0, ξ_{10}, ξ_{20}, . . . , $\xi_{\nu 0}$ какъ *центральныя* среднія вида:

$$\eta_0 = \frac{\Sigma g_k \eta_k}{\Sigma g_k}, \quad \xi_{i0} = \frac{\Sigma g_k \xi_{ik}}{\Sigma g_k}, \quad \xi_{\nu 0} = \frac{\Sigma g_k \xi_{\nu k}}{\Sigma g_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Величины y, x_1, x_2, . . ., x_ν являются варіаціями или отклоненіями наблюдаемыхъ величинъ отъ центральныхъ среднихъ.

Если формула (16) получена изъ (19) съ помощью этого упрощающаго преобразованія (20)—(21), то уравненія (20) покажутъ, что

$$\sum g_k y_k = 0 \text{ и } \sum g_k x_{ik} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu \quad . \quad . \quad (21')$$

Поэтому искомая величина b опредѣлится такъ:

$$b = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

и форма нормальной системы уравненій упростится, она будетъ обращать въ минимумъ функцію

$$L = \sum_{k=1}^{n} g_k \left(a_1 x_{1k} + a_2 x_{2k} + \ldots + a_{\nu-1} x_{(\nu-1)k} + a_\nu z_k - y_k\right)^2$$

ν перемѣнныхъ:

$$a_1, \; a_2, \ldots, \; a_\nu .$$

Эту нормальную систему запишемъ такъ:

$$\left.\begin{aligned} A_{i1} a_1 + A_{i2} a_2 + \ldots + A_{i\nu} a_\nu = A_{io}, \\ i = 1, \; 2, \ldots, \; \nu, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

при чемъ

$$A_{is} = \sum_{k=1}^{n} g_k x_{ik} x_{sk}, \; s = 1, \; 2, \ldots, \; \nu - 1;$$

$$A_{i\nu} = \sum_{k=1}^{n} g_k x_{ik} z_k; \quad A_{io} = \sum_{k=1}^{n} g_k x_{ik} y_k.$$

Рѣшивъ систему уравненій (23) и введя найденныя величины b, a_1, a_2, . . ., a_ν въ формулу (16), получимъ искомое соотношеніе между перемѣнными y, x_1, . . ., $x_{\nu-1}$, z.

Введемъ еще обозначенія:

$$N = \sum g_k,$$

$$N\sigma_{x_1}^2 = \sum g_k x_{1k}^2, \quad N\sigma_{x_2}^2 = \sum g_k x_{2k}^2, \ldots, \; N\sigma_{x_{\nu-1}}^2 = \sum g_k x_{(\nu-1)k}^2,$$

$$N\sigma_{x_\nu}^2 = N\sigma_z^2 = \sum g_k z_k^2, \; N\sigma_{x_0}^2 = N\sigma_y^2 = \sum g_k y_k^2, \quad r_{is} = \frac{A_{is}}{N\sigma_{x_i}\sigma_{x_s}}.$$

При этихъ обозначеніяхъ искомое соотношеніе (16) представится такъ:

$$y\,(=)\,\frac{D_1}{D}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}}\cdot x_1 + \frac{D_2}{D}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}}\cdot x_2 + \ldots + \frac{D_{\nu-1}}{D}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_{\nu-1}}}\cdot x_{\nu-1} + \\ + \frac{D_\nu}{D}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_z}\cdot z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

гдѣ

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} r_{12} r_{13} \ldots r_{1\nu} \\ r_{21} r_{22} r_{23} \ldots r_{2\nu} \\ r_{31} r_{32} r_{33} \ldots r_{3\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{\nu 1} r_{\nu 2} r_{\nu 3} \ldots r_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

а D_k есть детерминантъ, получаемый изъ детерминанта D замѣною столбца k столбцомъ, члены котораго суть:

$$r_{10}, \; r_{20}, \ldots, \; r_{\nu 0}.$$

Количества:

$$\frac{D_1}{D}, \quad \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad \frac{D_\nu}{D}$$

назовемъ *коэффиціентами связи* перемѣнныхъ x_1, x_2, . . ., z съ величиною y. Эти коэффиціенты по своему значенію аналогичны съ коэффиціентомъ r, входящимъ въ формулу (12). Если коэффиціентъ $\frac{D_k}{D}$ есть нуль, то вовсе не существуетъ зависимости между измѣненіями соотвѣтственнаго перемѣннаго x_k и перемѣннаго y; если же этотъ коэффиціентъ есть ± 1, то существуетъ полная зависимость между измѣненіями x_k и y.

При существованіи несовершенной связи будемъ имѣть возможность получить діаграмму вѣроятности отклоненій Δ_k съ помощью § 7.

§ 5. Индуктивная близость умозрительной и статистической теоріи взаимоотношеній между средними. Относительныя и абсолютныя единицы вѣса наблюденія. Вѣсы Ѳемиды.

I. Будемъ считать всѣ вѣса g_k *одинаковыми* и равными g; тогда онѣ дѣленіемъ на g сократятся во всѣхъ приведенныхъ выше уравненіяхъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ выраженія r_{is}, A_{is} и $\sigma^2_{x_i}$, входящія въ систему уравненій (23) и (24), можно будетъ опредѣлить такъ:

$$n \cdot \sigma_{x_i} \cdot \sigma_{x_s} r_{is} = A_{is} = \sum x_{ik} x_{sk} \text{ и } n \cdot \sigma_{x_i}^2 = \sum x_{ik}^2.$$

Обратимъ вниманіе на то, что эти количества опредѣляются статистическими средними (по Пирсону, статист. «моментами»), имѣющими,

по § 18, ч. II, *индуктивную близость* съ математическими ожиданіями c_{is} и b_i количествъ $x_i x_s$ и x_i^2. Иначе говоря, приблизительно будемъ имѣть:

$$c_{is} = \frac{A_{is}}{n} \text{ и } b_i = \sigma_{x_i}{}^2,$$

при чемъ точность этихъ индуктивно-приблизительныхъ уравненій повышается съ увеличеніемъ числа n.

Благодаря этимъ индуктивнымъ уравненіямъ формулы теоріи взаимоотношеній сближаются съ формулами, указанными выше на стр. 320—321, и съ вопросами какъ умозрительной, такъ и статистической теоріи среднихъ, а слѣдовательно съ вопросами о большей или меньшей устойчивости или, наоборотъ, неустойчивости общаго статическаго равновѣсія среды, для которой обсуждается разсматриваемое взаимоотношеніе варіацій. Въ этомъ индуктивномъ сближеніи теорія онтологической статики и опытъ статики образуютъ синтезъ, повѣряя другъ друга. Конечно, опытъ даетъ отвѣты заднимъ числомъ, а теорія судитъ, упреждая факты.

II. Понятіе «вѣсъ наблюденія» имѣетъ чрезвычайно важный гносеологическій, идіографическій и номографическій смыслъ. Къ сожалѣнію, статистики въ погонѣ за упрощеніями пропускаютъ это понятіе.

Указанное сейчасъ сокращеніе одинаковыхъ вѣсовъ въ уравненіяхъ (23)—(24) дѣленіемъ на g можно замѣнить принятіемъ g за *единицу вѣсовъ*; эта единица будетъ вообще *относительная, неабсолютная.*

Абсолютная же единица вѣсовъ наблюденія соотвѣтствуетъ каждому изъ *основныхъ* неразложимыхъ элементарныхъ наблюденій, ясно отвѣчающихъ на требуемый отъ наблюденія вопросъ.

Сама Ѳемида, образъ правосудія, рисуется съ завязанными глазами и съ вѣсами въ рукахъ. Вѣсы Ѳемиды должны, по вопросамъ жизненныхъ насущныхъ нуждъ человѣка и его повинностей государству, опираться на мысль закона, требующаго не взирать на лица массы, т. е. не приносить въ жертву однихъ частей населенія другимъ; соотвѣтствующее правосудное наблюденіе должно *равномѣрно* распредѣлять основныя юридическія наблюденія по душамъ населенія.

Взаимоотношеніе всѣхъ существъ можетъ охватить основными наблюденіями развѣ лишь Всевидящій. Статистика *большая* дѣлаетъ поголовныя основныя переписи населенія въ связи лишь съ важнѣйшими предметами народнаго быта, *малая* статистика дѣлаетъ лишь выборочныя основныя наблюденія, заботясь о равномѣрномъ распредѣленіи выборочныхъ основныхъ наблюденій по участкамъ времени, пространства и общаго числа душъ народонаселенія, стараясь сдѣлать много такихъ наблюденій и охватывая остальное, непосильное, общимъ взглядомъ и круглымъ счетомъ.

§ 6. Примѣръ цифровой выработки эмпирическихъ законовъ по схемамъ предшествующихъ параграфовъ. Взаимоотношеніе между среднимъ ростомъ рекрутъ, среднимъ крестьянскимъ хозяйствомъ и племеннымъ составомъ въ данной территоріи.

I. Схемы, приведенныя въ §§ 2 и 4, нынѣ являются рабочими въ антропологическихъ и этнологическихъ изслѣдованіяхъ. Приведемъ, для примѣра произведенную этнографомъ *Я.В. Чекановскимъ* разработку цифровыхъ матеріаловъ по рекрутскому призыву, извлеченныхъ изъ XXII т. Трудовъ Варшавскаго Статистическаго Комитета (Варшава, 1906 *).

Соберемъ эти матеріалы въ слѣдующую *двухмѣрную* таблицу соотвѣтствій между среднимъ роста и среднимъ крестьянскаго землевладѣнія въ Царствѣ Польскомъ.

Средній ростъ η призывныхъ въ уѣздахъ (вершки).	Средняя величина ξ крестьянскаго хозяйства въ уѣздахъ (десятины).												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
36,5			1										1
36,6													—
36,7	1	2	1										4
36,8		1	4	1	2								8
36,9	1	1	3	5	2	1							13
37,0		1	3	7	1		1						13
37,1		1	2	4	2	1							10
37,2			3	4	1	2	1		1				12
37,3				1	3				1				5
37,4			2	1	1								4
37,5		1		1			2						4
37,6				1									1
37,7												1	1
37,8			1	1		2	1						5
37,9		1							1				2
	2	8	20	26	12	6	5	—	3	—	—	1	83

Цифры клѣтокъ этой таблицы обозначаютъ числа уѣздовъ съ даннымъ ростомъ η и съ данною величиною ξ землевладѣнія; онѣ помѣщены въ соотвѣтственныхъ пересѣченіяхъ горизонтальной строки съ вертикальною колонною.

*) Авторъ этой работы, этнографъ музея Имп. Академіи Наукъ *Я. В. Чекановскій*, печатающій ее въ Варшавскомъ изданіи: Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, 1912, подъ заглавіемъ: «Zarys metod statystycznych.—Antropologiczne zastowania», любезно предоставилъ мнѣ извлеченіе изъ своихъ рукописей.

II. Цифровыми матеріалами этой таблицы можемъ воспользоваться для установленія соотвѣтствія между среднимъ ростомъ η призывныхъ и среднимъ крестьянскимъ хозяйствомъ ξ, выраженнымъ въ десятинахъ землевладѣнія.

Представляя себѣ это соотношеніе подъ формой: $\eta\,(=)\,\beta + a\xi$, затѣмъ, считая вѣса g_k по уѣздамъ равными 1 и приведя это соотношеніе съ помощью уравненій: $\eta - \eta_0 = y$ и $\xi - \xi_0 = x$ и уравненій (8) къ виду (1), Я. В. Чекановскій получаетъ искомую связь между y и x, исчисляя ростъ въ сантиметрахъ вмѣсто вершковъ.

При этомъ выводятся слѣдующіе цифровые результаты:

$$r = +\,0{,}43203;$$

$\sigma_1 = 1{,}8546$ дес. для ср. крестьянскаго хозяйства;

$\sigma_2 = 1{,}3748$ cm. для ср. роста призывныхъ.

Средняя (для всѣхъ уѣздовъ) роста:

$$\eta_0 = 165{,}051 \text{ cm.}$$

Средняя (для всѣхъ уѣздовъ) среднихъ крестьянскихъ хозяйствъ:

$$\xi_0 = 6{,}24 \text{ десятинъ.}$$

Центральная точка $(\xi_0,\ \eta_0)$ опредѣлилась; она служитъ началомъ o координатъ x и y въ двухмѣрной таблицѣ на стр. 441.

Искомая связь между ростомъ η и хозяйствомъ ξ будетъ:

$$\eta - \eta_0\,(=)\,0{,}43203 \cdot \frac{1{,}3748}{1{,}8546}\,(\xi - \xi_0)$$

$$= 0{,}32026\ (\xi - \xi_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Коэффиціентъ r этой связи болѣе нуля, т. е. ростъ въ среднемъ счетѣ поднимается съ поднятіемъ величины хозяйства.

Нужно изслѣдовать законъ отклоненій Δ отъ полученной формулы. По этой формулѣ можно вычислить ростъ η соотвѣтственно различнымъ уѣздамъ и сличить эти теоретическіе результаты $\overline{\eta_k}$ съ фактическими η_k по уѣздамъ опредѣляя отклоненія $\Delta_k = \overline{\eta_k} - \eta_k$ и ихъ діаграмму или же таблицу. Изъ этой таблицы и по правиламъ, установленнымъ ниже (см. § 7), можно ввести «вѣроятное отклоненіе Δ», «мѣру точности», вообще оцѣнку устойчивости эмпирическаго закона, свойственную этому приложенію теоріи вѣроятностей.

Кромѣ *количества* средняго землевладѣнія можно было бы разсматривать *интенсивность* земледѣльческой дѣятельности, какъ вліяющій факторъ. Она будетъ дѣйствовать на среднее роста подобно увеличенію количества землевладѣнія; сама же она будетъ зависѣть отъ агрономи-

ческаго знанія, отъ снаряженія инвентаремъ, отъ промышленной борьбы на рынкахъ и отъ щита въ формѣ сѣти сельско-хозяйственныхъ (крестьянскихъ) банковъ, способствующихъ выдержкѣ продуктовъ и отысканію для нихъ хорошихъ рынковъ, — короче говоря, отъ духовныхъ и интеллектуальныхъ культурныхъ факторовъ.

III. Тѣ же матеріалы Стат. Комитета даютъ возможность установить вліяніе на ростъ призывныхъ, проистекающее отъ примѣси къ коренной массѣ населенія другихъ этническихъ элементовъ, именно евреевъ и нѣмцевъ.

Приспособляя къ этому изслѣдованію схему § 4, установимъ слѣдующія обозначенія:

η средняя роста призывныхъ по данному уѣзду
ξ_1 % евреевъ среди » » » »
ξ_2 % нѣмцевъ » » » »
ξ, или ξ_3, ср. крестьянск. хозяйство по данному уѣзду.

Связь ищется подъ формой

$$\eta\,(=)\,\beta + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3.$$

Эта связь съ помощью уравненій

$$\eta = \eta_0 + y,\quad \xi_1 = \xi_{10} + x_1,\quad \xi_2 = \xi_{20} + x_2,\quad \xi_3 = \xi_{30} + x_3$$

и формулъ (21) приведется къ соотношенію:

$$y\,(=)\,a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3;$$

при чемъ цифровой матеріалъ даетъ слѣдующее *):

$$\xi_{10} = 14{,}81;\quad \xi_{20} = 5{,}53,$$

а цифровыя значенія η_0 и ξ_{30}, или ξ_0, указаны выше.

Формула (24) получитъ видъ:

$$y\,(=)\,\frac{D_1}{D}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}}\,x_1 + \frac{D_2}{D}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}}\,x_2 + \frac{D_3}{D}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_3}}\,x_3,$$

при чемъ детерминанты D, D_1, D_2 и D_3 зависятъ отъ группы величинъ:

r_{00}	r_{01}	r_{02}	r_{03}
r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}
r_{20}	r_{21}	r_{22}	r_{23}
r_{30}	r_{31}	r_{32}	r_{33}

*) Цифры сообщены изъ вышеуказанной работы Я. В. Чекановскаго.

кои представляются соотвѣтственно цифрами слѣдующей таблицы

1	— 0,0336	+ 0,1384	+ 0,4320
— 0,0336	1	— 0,2283	+ 0,0080
+ 0,1384	— 0,2283	1	+ 0,1392
+ 0,4320	+ 0,0080	+ 0,1392	1

При помощи этой таблицы найдемъ:

$$\frac{D_1}{D} = -\ 0{,}087912;\quad \frac{D_2}{D} = +\ 0{,}075954;\quad \frac{D_3}{D} = +\ 0{,}420658.$$

Въ окончательномъ же счетѣ будемъ имѣть эмпирическій законъ:

$$y\ (=) -\ 0{,}02164\,x_1 + 0{,}01828\,x_2 + 0{,}31183\,x_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Изъ этого соотношенія вытекаютъ слѣдующіе выводы.

1. Примѣсь евреевъ понижаетъ средній ростъ призывныхъ.
2. Примѣсь нѣмцевъ повышаетъ средній ростъ призывныхъ.
3. Уѣзды съ повышенными средними крестьянскими хозяйствами даютъ повышенный ростъ призывныхъ.

Кромѣ того, соотношеніе (26) своими коеффиціентами численно измѣряетъ степень вліянія каждаго изъ этихъ совмѣстно дѣйствующихъ факторовъ на средній ростъ, дозволяя предсказать самое вѣроятное его измѣненіе, если варьируется процентъ евреевъ, процентъ нѣмцевъ и величина крестьянскаго землевладѣнія.

Наблюденія изъ года въ годъ, изъ десятилѣтія въ десятилѣтіе, изъ вѣка въ вѣкъ въ самомъ дѣлѣ обнаруживаютъ эти варіаціи и ихъ эффектъ.

Любопытно отмѣтить, что если бы *не различить* нѣмцевъ и евреевъ въ составѣ населенія, то это *затушевало бы* положительное дѣйствіе на ростъ нѣмецкой примѣси и отрицательное еврейской примѣси.

§ 7. Нормальная дисперсія отклоненій Δ отъ эмпирическихъ законовъ.

Отклоненія Δ отъ эмпирическихъ законовъ по ихъ многочисленности иногда похожи на отклоненія живаго языка отъ грамматическихъ правилъ и на отклоненія метеорологическихъ явленій отъ законовъ метеорологіи. Можно придти въ отчаяніе отъ этой нелегальщины. Но можно

также, не впадая въ пессимизмъ, искать законы этихъ самыхъ нелегальностей и поправлять существенный наплывъ ошибокъ существенными коррективами.

I. Относительно нормальной дисперсіи отклоненія Δ, какъ формы, зависящей отъ точки $(y, x_1, \ldots, x_\nu)$, сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній.

Пирсонъ устанавливаетъ для весьма большого числа n наблюденій нормальную формулу частости даннаго отклоненія Δ типа (17) отъ соотношенія (16). Формулу эту можно получить слѣдующими разсужденіями.

Пусть въ процессѣ дѣйствуютъ *независимыя* причины, опредѣляющія связанныя величины $y, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ по какимъ-то неизвѣстнымъ формамъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= c_{10}\varepsilon_1 + c_{20}\varepsilon_2 + \ldots + c_{s0}\varepsilon_s, \\ x_k &= c_{1k}\varepsilon_1 + c_{2k}\varepsilon_2 + \ldots + c_{sk}\varepsilon_s, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$ *независимыя* перемѣнныя, производимыя соотвѣтственными *самостоятельными факторами*. Вѣроятность, что эти перемѣнныя будутъ заключаться соотвѣтственно между ε_1 и $\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_1$, ε_2 и $\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_2, \ldots$, ε_s и $\varepsilon_s + \delta\varepsilon_s$, выразится (при употребленіи Гауссовской формулы) такъ:

$$p = Ce^{-(h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + h_s^2\varepsilon_s^2)}\,\delta\varepsilon_1\delta\varepsilon_2 \ldots \delta\varepsilon_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}a)$$

Число s не менѣе $\nu + 1$; въ противномъ случаѣ между варіаціями $y, x_1, \ldots, x_\nu$ существовала бы не одна искомая связь типа (16). Перемѣнныя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\nu+1}$ можемъ съ помощью уравненій (I) исключить посредствомъ $\nu + 1$ перемѣнныхъ $y, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Тогда получимъ:

$$p = C' \cdot e^{-\Phi}\,\delta y\,\delta x_1 \ldots \delta x_\nu\,\delta\varepsilon_{\nu+2} \ldots \delta\varepsilon_s, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

гдѣ Φ есть *квадратическая* функція перемѣнныхъ $y, x_1, \ldots, x_\nu, \varepsilon_{\nu+2}, \ldots, \varepsilon_s$. Съ помощью этого выраженія p и на основаніи теоремы сложенія вѣроятностей можемъ получить вѣроятность Z того, что перемѣнныя $y, x_1, \ldots, x_\nu$ будутъ заключены соотвѣтственно между y и $y + \delta y$, x_1 и $x_1 + \delta x_1, \ldots, x_\nu$ и $x_\nu + \delta x_\nu$. Интеграція равенства (II) по перемѣннымъ $\varepsilon_{\nu+2}, \ldots, \varepsilon_s$ даетъ въ результатѣ:

$$Z = C'' \cdot e^{-\theta}\,dy\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_\nu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III})$$

гдѣ θ *квадратическая* функція перемѣнныхъ $y, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Приблизительно Z есть искомая частость выхода отклоненія Δ вида:

$$\Delta = b + a_1x_1 + \ldots + a_\nu x_\nu - y.$$

Формула (III) даетъ возможность естествоиспытателямъ отвѣчать на вопросъ, какова вѣроятность, что индивидуальный случай $(x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$ подходитъ подъ нормальный опредѣленный предѣлами варіацій типъ.

II. Ради простоты положимъ $\nu = 1$, т. е. примѣнимъ формулу (III) къ соотношенію (1) и къ отклоненію

$$\Delta = b + ax - y.$$

Вѣроятность Z теперь получитъ видъ:

$$Z = C'' \cdot e^{-(l_1x^2 + 2hxy + l_2y^2)}\, dx\, dy \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

Интегралъ этого выраженія, взятый по x и по y въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, есть 1. Этимъ условіемъ опредѣлится коэффиціентъ C'', именно:

$$C'' = (\sqrt{l_1 l_2 - h^2}) : \pi.$$

Слѣдовательно,

$$Z = \frac{\sqrt{l_1 l_2 - h^2}}{\pi}\, e^{-(l_1x^2 + 2hxy + l_2y^2)}\, dx\, dy.$$

Чтобы отыскать *цифровое* значеніе постоянныхъ величинъ l_1, h и l_2 съ помощью наблюденій, трактуемыхъ въ § 2, будемъ вѣса g принимать за данныя числа наблюденій и вообразимъ рядъ несовмѣстимыхъ гипотезъ $G\ (l_1, h, l_2)$ относительно совокупностей значеній неизвѣстныхъ l_1, h и l_2, считая всѣ гипотезы равновѣроятными до наблюденій. Послѣ же N наблюденій вѣроятность $\omega \cdot \delta l_1 \cdot \delta h \cdot \delta l_2$ гипотезы $G\ (l_1, h, l_2)$ представится по теоремѣ Байе такъ:

$$\omega \delta l_1 \delta h \delta l_2 = \mu\, (\sqrt{l_1 l_2 - h^2})^N e^{-\Sigma g_k (l_1 x_k^2 + 2hx_k y_k + l_2 y_k^2)}.$$

Наивѣроятнѣйшая изъ этихъ гипотезъ соотвѣтвуетъ минимуму функціи

$$\sum_{k=1}^{n} g_k (l_1 x_k^2 + 2hx_k y_k + l_2 y_k^2) - \frac{N}{2} log\, (l_1 l_2 - h^2)$$

перемѣнныхъ l_1, h и l_2.

Изъ этого условія находимъ:

$$l_2 : (l_1 l_2 - h^2) = 2\sigma_1^2, \quad l_1 : (l_1 l_2 - h^2) = 2\sigma_2^2, \quad h = -r\sqrt{l_1 l_2},$$

гдѣ σ_1, σ_2, и r суть указанныя въ § 2 количества.

Слѣдовательно,

$$Z = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho}\, e^{-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2xyr}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}\, dx\, dy, \quad \ldots\ldots \text{(V)}$$

гдѣ $\rho = \sqrt{1 - r^2}$.

Приложенія этой формулы къ оцѣнкѣ отклоненій отъ эмпирическихъ

законовъ антропологіи находимъ у Гальтона, Пирсона, Ранке, Я. В. Чекановскаго и другихъ.

III. Не нужно думать, что типъ вѣроятности Z отклоненій Δ всегда бываетъ нормальнымъ. Существуетъ множество изъятій и такихъ случаевъ, когда дисперсія отклоненія имѣетъ особенныя формы, кои мы изучаемъ ниже въ вопросахъ простого исчисленія типическихъ явленій.

Особенно примѣчательная несостоятельность нормальныхъ типовъ (III) и (V) законовъ отклоненія Δ имѣетъ мѣсто для случаевъ, когда числа g_k участковыхъ основныхъ наблюденій не велики, а число N всѣхъ наблюденій, равное Σg_k, весьма велико (см. ниже стр. 445 и 460).

VI. Эмпирическимъ законамъ взаимности большихъ антропологическихъ массивовъ и законамъ вліянія на нихъ физическихъ, экономическихъ, расовыхъ условій, при морально-соціальныхъ выкупахъ общихъ погрѣшностей Δ, можно столько же довѣрять, сколько мы довѣряемъ, напримѣръ, нестойкому закону $f\ (y, x, t) = 0$, связывающему для даннаго газа, заключеннаго въ баллонъ, его плотность y, съ давленіемъ x и температурой t. При критическихъ температурахъ самая форма этой связи рѣзительно преобразуется, и газъ переходитъ въ другое состояніе (въ состояніе либо жидкаго, либо вязкаго, либо твердаго тѣла).

Критическіе моменты въ состояніяхъ антропологическихъ массъ соотвѣтствуютъ парадоксальнымъ и катастрофальнымъ моментамъ, когда опрокидываются признаки оперативнаго закона большихъ чиселъ (см. часть II, §§ 23, 26—29).

§ 8. Случай сочетанія нестрого опредѣленныхъ эмпирическихъ формулъ съ формулами, строго опредѣленными. Ариѳметическая разнородность составныхъ частей эмпирическихъ формулъ и вліяніе на нихъ измѣненія абсолютныхъ физическихъ мѣръ.

I. Разсмотримъ слѣдующій случай сочетанія *индетерминизма* (нестрогой опредѣленности) однѣхъ формулъ, содержащихъ знакъ (=), напоминающій о дедуктивной приближенности равенства и объ отброшенныхъ *неопредѣленныхъ* величинахъ, съ *детерминизмомъ* (строгою опредѣленностью) другихъ формулъ.

Раціональныя системы знанія и правооборота часто напередъ (à priori) ограничиваютъ искомыя нестрого опредѣленныя эмпирическія соотношенія между варьирующимися средними величинами x_0 (или y), $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ предписаніемъ или условіемъ строго выполнять опредѣленную зависимость въ формѣ уравненій:

$$\left.\begin{array}{c} \psi_i\ (b, a_1, \ldots, a_\nu, x_0, x_1, \ldots, x_\nu) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, q. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(VI)}$$

Такъ поступаетъ геодезія и прикладная механика въ отношеніи своихъ варьирующихся величинъ. Подобнымъ образомъ «Математическая Статистика» устанавливаетъ уравненія типа (VI) для рѣшенія экономическихъ междуклассовыхъ проблемъ (различая классы потребителей, капиталистовъ, рабочихъ), регулируя экономическіе выпуски и всасыванія. Точно также международныя экономическія всасыванія и выпусканія раціонально регулируются опредѣленными тарифными уравненіями типа (VI) и, съ другой стороны, не строго опредѣленными взаимоотношеніями типовъ (1) и (1′).

Вышеизложенный (§ 4) планъ опредѣленія коэффиціентовъ $b, a_1, \ldots, a_\nu$ при условіяхъ (VI) долженъ измѣниться. Тутъ нужно примѣнять правила интерполяціоннаго способа наименьшихъ квадратовъ, аналогичныя тѣмъ, кои указаны въ части II, § 60, пункт. II.

При этомъ, если уравненія (VI) окажутся нелинейными относительно $b, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, то нормальная система уравненій, опредѣляющая искомые коэффиціенты, окажется также нелинейною. Она будетъ разрѣшима способомъ послѣдовательныхъ приближеній.

Искомые коэффиціенты $b, a_1, \ldots, a_\nu$ должны въ точности удовлетворять уравненіямъ (VI), число которыхъ, конечно, должно быть менѣе ν.

II. Пусть рѣшеніе найдено, коэффиціенты опредѣлены. Остается оцѣнить результатъ и его погрѣшность вѣроятностями.

Съ помощью уравненій (I) и (VI) мы можемъ исключить изъ формулы (Ia) $\nu + q$ перемѣнныхъ, въ томъ числѣ перемѣнныя $x_{\nu-q+1}, \ldots, x_\nu$. Потомъ отыскивается вѣроятность Z выхода точки $(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-q})$; она представится теперь не формулой вида (III), а формулой вида:

$$Z = C \cdot e^{-\varphi}\, dx_0\, dx_1 \ldots dx_{\nu-q}, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VII)}$$

гдѣ φ будетъ функціей перемѣнныхъ $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-q}$ и C — постоянное. Эта функція φ будетъ квадратической лишь въ томъ случаѣ, когда всѣ уравненія (VI) будутъ линейными относительно $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$; въ противномъ случаѣ φ будетъ неквадратическая функція.

III. Эмпирическія формулы часто бываютъ ариѳметически разнородными; въ нихъ длины складываются съ десятинами, цѣны съ упругостью и проч. Замѣна принятыхъ абсолютныхъ мѣръ физическихъ величинъ другими мѣрами измѣняетъ составъ формулъ. При этомъ уравненія, строго опредѣленныя, даваемыя въ Геометріи и Механикѣ, распадаются на однородныя относительно длины и массы *).

Но нестрого опредѣленныя эмпирическія разнородныя уравненія и формулы не будутъ обладать свойствомъ распадаться отъ замѣны абсолютныхъ мѣръ на однородныя группы, по причинѣ своей числовой приблизительности и логической неопредѣленности (индетерминистичности). Переводы формулъ изъ однихъ мѣръ, отъ которыхъ зависятъ коэффиціенты эмпирическихъ формулъ, въ другія существеннымъ образомъ измѣняютъ коэффиціенты *).

*) *П. А. Некрасовъ:* Приложеніе алгебры къ геометріи, §§ 8—12. Москва, 1897.

Неоднородныя формулы для непривыкшаго къ оцѣнкѣ и выкупу неустоекъ вѣроятностной связи и къ *графическимъ критеріямъ* или мѣриламъ кажутся странными, непонятными, хотя техника, экономика и политика употребляютъ въ практикѣ массы такихъ, иногда выписанныхъ изъ заграницы, формулъ; дѣльцы и ремесленники часто не спрашиваютъ себя, какъ онѣ произошли. Однако же, руководители и инженеры должны самостоятельно знать, испытывать и критически оцѣнивать предѣлы ихъ годности и *запасныя* условія, при которыхъ онѣ могутъ быть приложены *надежно*, т. е. безъ невыгоднаго и опаснаго риска.

§ 9. Можетъ ли теорія взаимоотношеній фиксировать и предписывать съ помощью графическихъ тѣлъ закономѣрности сосуществованія (статику) въ тѣхъ случаяхъ, когда измѣренія абсолютными мѣрами уже не пригодны и когда вступаютъ въ свои права только ариѳметическіе подсчеты людей и сопутствующихъ имъ жизненныхъ явленій и чисто графическіе ариѳметическіе критеріи или руководящія числовыя нормы—мѣры (мѣрила), номографическія (предѣльно общія, предѣльно объективныя) и идіографическія (предѣльно-частныя, субъективныя)?

На этотъ вопросъ возможенъ утвердительный отвѣтъ: 1) благодаря технически удобнымъ, точнымъ и изящнымъ графическимъ тѣламъ Номографіи (см. часть I, §§ 12 — 17_2), иначе говоря, Числовой Геометріи, 2) благодаря графикамъ Теоріи Вѣроятностей и Математической Статистики и 3) при условіи хорошей организаціи точной записи фактовъ и гласной отчетности.

Дѣятельность многихъ причинъ въ людяхъ и вообще въ живой природѣ невозможно измѣрить аршиномъ, рублемъ или вообще какими нибудь физическими абсолютными мѣрами; но наблюдатель можетъ исчислять категорическія явленія по признакамъ и степени ихъ яркости и можетъ иногда сравнивать и опредѣлять интуитивно, на «глазомѣръ» и «кругымъ счетомъ», относительное значеніе явленій; напримѣръ, сравнивать блескъ свѣчи и лампы, цвѣтъ глазъ, цвѣтъ кожи, волосъ; сравнивать работоспособность и техническую ловкость взрослаго, подростка,

*) *А. И. Сидоровъ*: Задачи по деталямъ машинъ (со включеніемъ задачъ на переводъ формулъ изъ однихъ мѣръ въ другія). Москва, 1909. Стр. 119.

мужчины, женщины; сравнивать талантливость ученика, артиста; смѣлость, отвагу, геройство воина; жестокость, великодушіе побѣдителя; сравнивать любовь къ родинѣ, преданность, вѣрность долгу; искренность, правдивость; притворство, уклончивость, лукавство, лживость, измѣну, уголовную разбойность.

Числа людей, вещей и простыхъ явленій, учитываемыхъ по признакамъ, яркость или сравнительная степень коихъ неизмѣрима абсолютными мѣрами, отмѣчаются, по принятой системѣ, мазками краски, баллами, марками, матеріальными «точками» и наслояются въ графическихъ пространствахъ какъ пропорціональный имъ *грузъ д доказательства надлѣ*, или *фактическій вѣсъ*; а нагруженныя и окрашенныя или заштрихованныя условныя графическія тѣла суть уже матеріальные предметы, съ которыми можно оперировать, какъ съ матеріалами, капиталами, величинами, измѣримыми посредствомъ абсолютныхъ мѣръ.

Эти тѣла, созидающія изъ отображенія наблюденныхъ фактовъ условныя *величины*, способны интерполяціонными формулами выражать связи самихъ явленій и пригодны въ среднемъ счетѣ къ обозначенію надежности ожиданія и къ предписанію линій надежнаго и цѣлесообразнаго поведенія.

Конечно, распространеніе теоріи взаимоотношеній, изложенной въ предшествующихъ параграфахъ, на эти фиксаціи закономѣрностей сосуществованія требуетъ точныхъ ритуаловъ, гласныхъ (предъ кѣмъ слѣдуетъ) отчетовъ и правилъ, соблюдаемыхъ строго и честно, какъ въ систематическихъ играхъ, связанныхъ съ частными и общими интересами и правами. Въ противномъ случаѣ процессъ обратился бы въ жизненную ложь, въ махинацію клубныхъ игроковъ съ крапленными картами.

Дальнѣйшіе примѣры выяснятъ правильную постановку дѣла. Начнемъ съ простѣйшихъ примѣровъ.

§ 10. Взаимоотношеніе двойного комплекса явленій E_1 и E_2 среды, повторяющихся въ связанныхъ испытаніяхъ. Ритуалъ записи въ графическомъ пространствѣ съ двухмѣрнымъ основаніемъ. Критеріи сродства. Распредѣлительные эффекты, обязанные ± сродству. Идеальные мелкіе участки. Объективированіе и субъективированіе критеріевъ.

I. Вообразимъ совмѣстныя, отчасти связанныя явленія E_1 и E_2, свойственныя связаннымъ опытамъ, способнымъ аналогически повторяться въ данной наблюдаемой средѣ, раздѣленной на участки по пространству, времени и людямъ. Противоположныя явленія соотвѣтственно обозначимъ чрезъ F_1, или не — E_1, и F_2 или не — E_2.

Браки, положимъ, блондиновъ на брюнеткахъ могутъ служить поясни-тельнымъ примѣромъ.

Ритуалъ записи результата каждаго отдѣльнаго элементарнаго наблюденія свяжемъ съ разсмотрѣніемъ двухъ перемѣнныхъ X и Y, фиксируемыхъ такъ:

$X = 1$ или 0, смотря по тому, состоится ли E_1 или F_1;

$Y = 1$ » 0, » » » » » E_2 » F_2.

Вся естественная область задуманныхъ наблюденій пусть раздѣлена по пространству, времени и людямъ на n участковъ (1), (2), ... (n). Въ участкѣ (k) пусть дѣлается g_k наблюденій.

При каждомъ элементарномъ основномъ наблюденіи вышедшая «точка» (X, Y) записывается, какъ грузъ, на плоскости прямоугольныхъ координатъ X и Y. Изъ массива этихъ точекъ образуется въ нашемъ графическомъ пространствѣ символическое «точечное тѣло».

Каждая вышедшая точка (X, Y) въ графическомъ пространствѣ должна занять одно и только одно изъ четырехъ положеній: (1,1), (1,0), (0,1) и (0,0), соотвѣтствующихъ возможнымъ въ отдѣльномъ наблюденіи четыремъ событіямъ: (E_1E_2), (E_1F_2), (F_1E_2), (F_1F_2). «Средняя точка» (ξ_k, η_k) для участка (k) тутъ будетъ фиксирована, какъ центръ тяжести, координатами:

$$\xi_k = \frac{\Sigma X}{g_k} = \frac{m_k}{g_k},$$

$$\eta_k = \frac{\Sigma y}{g_k} = \frac{s_k}{g_k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VIII)}$$

числа m_k и s_k будутъ цѣлыми, представляющими соотвѣтственно числа выходовъ явленій E_1 и E_2 при разсматриваемыхъ g_k участковыхъ наблюденіяхъ. Всего будемъ имѣть n графическихъ «среднихъ точекъ»:

(ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), ..., (ξ_n, η_n) съ «массами» $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Очевидно, къ изслѣдованію связи или взаимоотношенія перемѣнныхъ η и ξ можно примѣнить методъ, установленный въ § 2, считая числа g_k за вѣса. Будемъ при этомъ имѣть:

$$\xi_0 = \frac{\Sigma g_k \xi_k}{N} = \frac{m}{N}, \quad \eta_0 = \frac{\Sigma g_k \eta_k}{N} = \frac{s}{N}, \quad N = \Sigma g_k,$$

$$\xi = \xi_0 + x, \quad \eta = \eta_0 + y, \quad \sum g_k x_k = \sum g_k (\xi_k - \xi_0) = 0,$$

$$\sum g_k y_k = \sum g_k (\eta_k - \eta_0) = 0,$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\Sigma g x_k^2}{N} = \frac{\Sigma g_k (\xi_k - \xi_0)^2}{N}, \quad \sigma_2^2 = \frac{\Sigma g_k y_k^2}{N} = \frac{\Sigma g_k (\eta_k - \eta_0)^2}{N},$$

$$r = \frac{\Sigma g_k x_k y_k}{N \sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \left(\frac{\Sigma g_k \xi_k \cdot \eta_k}{N} - \xi_0 \cdot \eta_0 \right).$$

Здѣсь N есть число всѣхъ основныхъ элементарныхъ наблюденій; m и s суть числа явленій E_1 и E_2, зарегистрованныхъ наблюденіемъ по всѣмъ участкамъ.

Искомое взаимоотношеніе между средними числами ξ и η будетъ:

$$\eta - \eta_0 \,(=)\, r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\xi - \xi_0), \text{ или } y \,(=)\, r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot x \quad \ldots \text{(IX)}$$

По установленной въ § 3 терминологіи, y есть *подлежащее* предложенія, выраженнаго приблизительнымъ уравненіемъ (IX); оно соотвѣтствуетъ явленію E_1. *Сказуемое*, т. е. вторая часть уравненія (IX), соотвѣтствуетъ явленію E_2. Назовемъ явленія E_1 и E_2, какъ ненаписанные термины сужденія (IX), также подлежащимъ и сказуемымъ; эти термины назовемъ естественными или явочными въ отличіе отъ графическихъ или алгебраическихъ.

Логически «обращенная» связь явленій E_1 и E_2 выразится уравненіемъ:

$$x \,(=)\, r \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot y \quad \ldots \text{(IX')}$$

Здѣсь графическія подлежащее и сказуемое соотвѣтствуютъ естественномъ подлежащему E_2 и сказуемому E_1.

Любопытно замѣтить, что аналогическій методъ (при тѣхъ же матеріалахъ наблюденія) можно примѣнить къ выясненію связи явленій F_1 и F_2. *При этомъ коэффиціентъ связи r сохранитъ свое значеніе*, и получатся уравненія—*прямое*:

$$y' \,(=)\, r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x', \quad \ldots \text{(IX'')}$$

обращенное:

$$x' \,(=)\, r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} y', \quad \ldots \text{(IX''')}$$

гдѣ x' и y' суть варіаціи среднихъ частостей выходовъ явленій F_1 и F_2 по участкамъ.

Уравненіе (IX) принимается за опору для мысли и для оцѣнки дисперсіи формъ отклоненія Δ. Вѣроятность Z формы отклоненія Δ будетъ оцѣниваться по формулѣ типа (V), но лишь при достаточно большихъ числахъ $g_1, g_2, \ldots, g_n$ наблюденій по отдѣльнымъ участкамъ.

Это заключеніе обезпечивается примѣнимостью здѣсь Лапласовскаго и Чебышевскаго выраженія вѣроятностей выхода тѣхъ простыхъ явленій (см. часть II, § 17, часть III, § 26, и часть I, § 31, стр. 197), изъ коихъ составляются разсматриваемыя сложныя явленія (E_1E_2), (E_1F_2), (F_1E_2), (F_1F_2).

Формула (V) не годится при небольшихъ числахъ g_k. Полезно съ цѣлью объясненія *химизма* явленій обсудить уравненіе (IX) и отклоненіе Δ въ этомъ послѣднемъ случаѣ, считая число N, или $\sum g_k$, большимъ.

II. Коэффиціентъ r связи между группами явленій E_1 и E_2 и среднія квадратическія отклоненія σ_1 и σ_2 сохраняютъ формальный смыслъ и тогда, когда вѣса g не велики, а число N большое. При этомъ вѣса g зависятъ отъ распредѣленія N наблюденій по участкамъ.

Вообразимъ, что каждое отдѣльное основное наблюденіе пріурочивается къ отдѣльному участку; при чемъ будемъ имѣть N участковъ, *наиболѣе мелкихъ* въ ритуалѣ вышеуказаннаго графическаго исчисленія. Это дѣленіе на участки назовемъ *идеальнымъ*, а прежнее дѣленіе—*обыкновеннымъ*. При идеальномъ дѣленіи на участки всѣ вѣса g наблюденія обратятся въ 1; коэффиціентъ r перейдетъ въ число Q, которое назовемъ объективнымъ *критеріемъ сродства* явленій E_1 и E_2.

Вышеуказанныя формулы приведутъ къ слѣдующему результату Юля:

$$Q = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)\,(a+c)\,(d+b)\,(d+c)}}, \quad \ldots \text{(X)}$$

гдѣ a, b, c и d суть числа, показывающія соотвѣтственно, сколько разъ зарегистровано каждое изъ событій (E_1E_2), (E_1F_2), (F_1E_2) и (F_1F_2) въ ряду N наблюденій. Среднія квадратическія отклоненія x и y отъ нуля при этомъ опредѣляются такъ:

$$\sigma_1' = \frac{\sqrt{(a+b)\,(c+d)}}{a+b+c+d}, \quad \sigma'_2 = \frac{\sqrt{(a+c)\,(b+d)}}{a+b+c+d} \quad \ldots \text{(XI)}$$

Если вообще частость выхода даннаго явленія A въ данномъ рядѣ наблюденій будемъ обозначать чрезъ p_A, то равенства (X) и (XI) можно переписать въ такомъ видѣ:

$$Q = \frac{p_{(E_1E_2)} - p_{E_1} \cdot p_{E_2}}{\sqrt{p_{E_1} \cdot p_{F_1} \cdot p_{E_2} \cdot p_{F_2}}}, \quad \ldots \text{(XII)}$$

$$\sigma_1' = \sqrt{p_{E_1} \cdot p_{F_1}}, \quad \sigma_2' = \sqrt{p_{E_2} \cdot p_{F_2}} \quad \ldots \text{(XIII)}$$

Въ предѣлѣ, когда N стремится къ ∞, получаются *асимптотическія выраженія* того же вида; въ силу теоремы Пуассона частости превратятся въ *среднія вѣроятности* соотвѣтствующихъ явленій.

Это *предѣльное* значеніе коэффиціента Q сродства есть объективнѣйшее изъ объективныхъ; оно божески точно, совершенно измѣряетъ степени зависимости попарно связанныхъ явленій; оно, какъ критерій зависимости, подобно варіаціи δp_{E_1} подъ впечатлѣніемъ E_2 указанной въ части II, § 7. Если $Q = 0$, то явленія E_1 и E_2 будутъ *независимыми*. Если $Q > 0$, то сродство будетъ положительнымъ, и вѣроятность, положимъ, невидимаго мнѣ явленія E_1 *поднимается* въ моемъ разсудкѣ подъ впечатлѣніемъ факта E_2. Если $Q = +1$, то зависимость или связь фактовъ E_1 и E_2 будетъ совершенно *крѣпостная*, *положительная*, а

именно наступленіе одного изъ нихъ достовѣрно влечетъ за собою наступленіе другого; наступленіе одного изъ противоположныхъ фактовъ F_1 и F_2 достовѣрно влечетъ наступленіе другого изъ этихъ послѣднихъ; факты E_1 и F_2, E_2 и F_1 будутъ совершенно несовмѣстимыми. Если $Q < 0$, то сродство будетъ отрицательное, и вѣроятность явленія E_1 *опускается* подъ впечатлѣніемъ факта E_2. Если $Q = -1$, то связь или зависимость фактовъ E_1 и E_2 будетъ совершенно *крѣпостная*, *отрицательная*, т. е. факты эти будутъ совершенно несовмѣстимыми, а факты E_1 и F_2 будутъ связаны совершенною крѣпостною связью *).

Если возвратимся изъ области предѣльныхъ вычисленій къ конечному числу N, то критерій Q сродства будетъ все еще почти объективнымъ, номографическимъ мѣриломъ, пока N весьма велико.

При неслишкомъ значительномъ числѣ N критерій Q будетъ субъективнымъ, интереснымъ *идіографически*. Такъ при наблюденіи вышеупомянутыхъ «обыкновенныхъ участковъ» можно для уѣзда (k) положить $N = g_k$ и, обращаясь къ подробнымъ матеріаламъ статистики, опредѣлить соотвѣтственныя уѣзду (k) числа a_k, b_k, c_k, d_k и соотвѣтственный «уѣздный» субъективный критерій Q_k. Разность $Q - Q_k$ будетъ идіографическимъ отклоненіемъ субъективнаго критерія Q_k отъ объективнаго критерія Q.

III. **Примѣръ.** Въ видѣ числового примѣра возьмемъ матеріалы, собранные по уѣздамъ въ двухмѣрной таблицѣ § 6 относительно средняго роста призывныхъ и средняго крестьянскаго хозяйства. Сопоставляя эти среднія съ центральными средними, будемъ отождествлять съ E_1 и съ E_2 соотвѣтственно: 1) явленіе средняго роста η *ниже* центральнаго средняго η_0 (когда $y < 0$) и 2) явленіе по тому же уѣзду средняго крестьянскаго ξ хозяйства также *ниже* центральнаго средняго ξ_0 (когда $x < 0$). Оси ox и oy, проведенные въ двухмѣрной таблицѣ, § 6, раздѣляютъ тамъ подсчеты въ территоріи Царства Польскаго, на четыре цифровыя категоріи, соотвѣтственно событіямъ (E_1E_2), (E_1F_2), (F_1E_2), (F_1F_2). Подсчеты повторенія этихъ событій, раздѣленные тамъ на 83 уѣзда, даютъ:

$$a = 39, \quad b = 10, \quad c = 17, \quad d = 17;$$

$$N = a + b + c + d = 83;$$

*) Юль предложилъ и другое выраженіе критерія Q сродства, алгебраически болѣе простое, но менѣе точное, не столь тѣсно связанное съ простѣйшей формой закона большихъ чиселъ. Формула Юля такова:

$$Q = \frac{ad - bc}{ad + bc}.$$

Повидимому, Юль ради популяризаціи предложилъ эту неточную формулу. Оба выраженія Q даютъ одинъ и тотъ же результатъ въ слѣдующихъ случаяхъ: 1) при независимости E_1 и E_2, 2) при совершенной несовмѣстимости E_1 и E_2 и 3) при совершенной несовмѣстимости E_1 и F_2.

$$Q = \frac{39 \cdot 17 - 10 \cdot 17}{\sqrt{49 \cdot 56 \cdot 27 \cdot 34}} = 0{,}414\ldots;$$

$$\sigma_1' = \frac{\sqrt{56 \cdot 27}}{83}, \quad \sigma_2' = \frac{\sqrt{49 \cdot 34}}{83}.$$

Критерій Q сродства оказался весьма близкимъ къ коеффиціенту связи r, найденному въ § 6, именно: $r = 0{,}43203$. Эта близость не случайная, хотя коеффиціенты Q и r, аналогическія по смыслу, численно различаются.

IV. Числа a, b, c и d, показывающія, сколько разъ попадающая въ наше графическое пространство грузная символическая точка (X, Y) упадетъ соотвѣтственно въ точки (1,1), (1,0), (0,1) и (0,0), примемъ за *массы* этихъ точекъ. Прямая линія (IX), опредѣляемая при дѣленіи N наблюденій по n обыкновеннымъ участкамъ, перейдетъ въ случаѣ распредѣленія ихъ по N идеально мелкимъ участкамъ, въ другую прямую, опредѣляемую уравненіемъ:

$$Y - \frac{c+d}{N} (=) Q \cdot \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} \left(X - \frac{a+b}{N} \right); \quad \ldots\ldots \text{(XII)}$$

эта прямая пройдетъ чрезъ центръ тяжести (ξ_0, η_0) названныхъ массивныхъ точекъ, помѣщающійся ближе къ тѣмъ изъ нихъ, кои окажутся болѣе нагружены.

Надлежитъ затѣмъ оцѣнить вѣроятность Z формы отклоненія Δ [какъ функціи ожидаемой точки (X, Y)] отъ линіи (XII). Эта форма Δ будетъ:

$$\Delta = Q \cdot \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} \left(X - \frac{a+b}{N} \right) + \frac{c+d}{N} - Y \quad \ldots \text{(XIII)}$$

Вѣроятность Z этого отклоненія, какъ сказано выше, нельзя вычислять по аналитической формулѣ типа (V); что и составляетъ отличіе разсматриваемой чисто числовой (аритмологической) теоріи взаимоотношенія отъ теоріи взаимоотношенія, изложенной въ §§ 2—7. Въ настоящемъ случаѣ форма отклоненія Δ будетъ имѣть четыре и только четыре вида: Δ_{11}, Δ_{10}, Δ_{01}, Δ_{00}, соотвѣтствующіе четыремъ вышеуказаннымъ возможнымъ положеніямъ точки (X, Y); эти виды представятся такъ:

$$\Delta_{11} = Q \cdot \frac{\sigma_2'(c+d)}{N \cdot \sigma_1'} - \frac{a+b}{N}, \quad \Delta_{10} = Q \frac{\sigma_2'(c+d)}{N\sigma_1'} + \frac{c+d}{N},$$

$$\Delta_{01} = -Q \cdot \frac{\sigma_2'(a+b)}{N\sigma_1'} - \frac{a+b}{N}, \quad \Delta_{00} = -Q \frac{\sigma_2'(a+b)}{N\sigma_1'} + \frac{c+d}{N}.$$

Соотвѣтственныя значенія вѣроятности Z будутъ:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{a}{N} = p_{(E_1E_2)}, \quad Z_{10} = \frac{b}{N} = p_{(E_1F_2)}, \\ Z_{01} &= \frac{c}{N} = p_{(F_1E_2)}, \quad Z_{00} = \frac{d}{N} = p_{(F_1F_2)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(XIII')}$$

Итакъ, всѣ элементы выкупа формы Δ раскрыты на столько, чтобы исключить злостныя махинаціи, правильно уравновѣсить риски, связанныя съ выходомъ и невыходомъ нерѣшительно связанныхъ явленій E_1 и E_2.

V. Изученіе критеріевъ попарнаго ± сродства явленій E_1 и E_2, F_1 и F_2, E_1 и F_2, F_1 и E_2 ведетъ къ пониманію *химизма* физическихъ явленій въ природѣ и въ печахъ химика и діалектологическаго и графическаго *метахимизма* культурныхъ жизненныхъ явленій, когда въ область сравниваемыхъ попарно категорическихъ явленій включаются научно, юридически и политически ревизуемыя средства выкупа, учета, страховаго мышленія, храненія и предметы культа, идейныя обозначенія, графики, символическія живыя тѣла (службы). Тутъ подъ вещественнымъ или матеріальнымъ внѣшнимъ обликомъ бываютъ прагматически, юридически и даже мистически выражены идея, смыслъ, одушевленіе, воля и проч.

При фактическомъ изслѣдованіи установившагося наплыва и распредѣленія массивовъ вещей E_1 и E_2 въ какую либо землю или область обнаруживается, что *положительному* сродству явленій, принадлежащихъ къ двумъ различнымъ экономическимъ или культурнымъ комплексамъ, соотвѣтствуютъ и на самомъ дѣлѣ наличность уплотненнаго или сгущеннаго проникновенія одного изъ явленій въ область чужого комплекса и тенденція ихъ располагаться въ метахимическія группы *intra se* (внутри другъ друга). Наоборотъ, *отрицательному* сродству сотвѣтствуетъ выключеніе сгущенности явленія изъ области чужого комплекса и тенденція сгустковъ того и другого явленія располагаться въ группы по отдѣльнымъ областямъ *inter se* (внѣ другъ друга).

Эти распредѣлительныя притяженія и отталкиванія обнаруживаютъ себя при каждомъ толчкѣ какъ въ передвиженіяхъ народонаселенія (см. часть I, §§ 10—11), такъ и въ обмѣнахъ произведеніями народовъ, культурно-экономическими и культурно-просвѣтительными (этическими и эстетическими). Достаточное *насыщеніе* жадности отмѣчается «точкой» на скалѣ эффекта λ, какъ указано на стр. 344. Потенціальныя натяженія среды, подобныя химико-электромагнитнымъ, могутъ представлять *статическое* равновѣсіе, которое *предрасположено* нарушаться въ опредѣленномъ направленіи, *по линіи наименьшихъ сопротивленій.*

Примѣръ. Въ статьѣ Я. В. Чекановскаго: «Объективные критеріи въ этнологіи» *) сравниваются степени сродства, по парно, 17 предметовъ, распространенныхъ въ культурѣ негритянской Африки. Эти предметы суть:

I. Деревянный щитъ.—II. Санза.—III. Двускатная крыша.—IV. Ткани

*) Статья эта была предметомъ сообщенія въ засѣданіи Отдѣленія Этнографіи Имп. Русск. Геогр. Общества, 28 октября 1911 г.; она печатается въ «Korrespondenzblatt der Deutschen Gesellschaft für Antropologie, Ethnologie und Urgeschichte», № 8—12. 1911.

изъ пальмовыхъ волоконъ.—V. Деревянный барабанъ.—VI. Матеріи изъ лубка.—VII. Ротановый щитъ.—VIII.—Мечъ.—IX. Обрѣзаніе.—X. Арфа.—XI. Маримба.—XII. Конусообразная крыша.—XIII. Головная скамья.—XIV. Кожаная одежда.—XV. Палица.—XVI. Кожаный щитъ.—XVII. Улеобразная хижина.

Предметы эти входятъ въ метахимію двойныхъ комплексовъ негритянской культуры. Значенія Юлевскаго коеффиціента Q ± сродства между каждою парою предметовъ внесены въ слѣдующую таблицу.

Таблица мѣръ Q ассоціаціи.

Африканскія культурныя явленія.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.	XVII.
I	**+1.0**	+0.2	+0.5	+0.8	+0.4	+1.0	+0.5	−0.8	−0.3	−0.1	−0.1	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2	−0.9	+0.6
II	+0.2	**+1.0**	+0.8	+1.0	+0.8	+0.9	+0.7	−0.4	−0.1	0.0	+0.6	−0.3	+0.5	−0.1	−0.7	−0.5	−0.2
III	+0.5	+0.8	**+1.0**	+1.0	+0.9	+1.0	+0.9	+0.9	+0.5	+0.2	−0.6	−0.8	−0.8	−0.9	−0.9	−1.0	−1.0
IV	+0.8	+1.0	+1.0	**+1.0**	+0.9	+1.0	+0.8	+0.9	+0.9	−0.6	−0.4	−1.0	−0.9	−1.0	−0.9	−1.0	−0.7
V	+0.4	+0.8	+0.9	+0.9	**+1.0**	+1.0	+1.0	+0.6	+0.5	+0.5	+0.5	−0.7	−0.9	−0.8	−0.9	−1.0	−0.4
VI	+1.0	+0.9	+1.0	+1.0	+1.0	**+1.0**	+0.9	+0.5	+0.4	+0.5	+0.5	−0.4	−0.5	−0.7	−0.8	−0.9	−0.2
VII	+0.5	+0.7	+0.9	+0.8	+1.0	+0.9	**+1.0**	+0.9	+0.6	+0.8	+0.5	−0.4	−0.8	−0.7	−1.0	−0.8	−0.9
VIII	−0.8	−0.4	+0.9	+0.9	+0.6	+0.5	+0.9	**+1.0**	+0.8	+0.9	−0.1	−0.3	−0.7	−1.0	−1.0	+0.1	−0.8
IX	−0.3	−0.1	+0.5	+0.9	+0.5	+0.4	+0.6	+0.8	**+1.0**	+0.2	−0.2	−0.2	0.0	−0.9	−1.0	+0.4	−0.8
X	−0.1	−0.0	+0.2	−0.6	+0.5	+0.5	+0.8	+0.9	+0.2	**+1.0**	+0.9	+0.4	−0.9	−0.4	−0.7	−0.3	−1.0
XI	−0.1	+0.6	−0.6	−0.4	+0.5	+0.5	+0.5	−0.1	−0.2	+0.9	**+1.0**	+0.7	+0.4	0.0	−0.2	−0.2	0.0
XII	−0.8	−0.3	−0.8	−1.0	−0.7	−0.4	−0.4	−0.3	−0.2	+0.4	+0.7	**+1.0**	+0.4	+0.7	+0.9	+0.8	−0.9
XIII	−0.6	+0.5	−0.8	−0.9	−0.9	−0.5	−0.8	−0.7	0.0	−0.9	+0.4	+0.4	**+1.0**	+1.0	+1.0	+0.8	+0.1
XIV	−0.4	−0.1	−0.9	−1.0	−0.8	−0.7	−0.7	−1.0	−0.9	−0.4	0.0	+0.7	+1.0	**+1.0**	+0.8	+0.3	+0.8
XV	−0.2	−0.7	−0.9	−0.9	−0.9	−0.8	−1.0	−1.0	−1.0	−0.7	−0.2	+0.9	+1.0	+0.8	**+1.0**	+0.8	+1.0
XVI	−0.9	−0.5	−1.0	−1.0	−1.0	−0.9	−0.8	+0.1	+0.4	−0.3	−0.2	+0.8	+0.8	+0.3	+0.8	**+1.0**	−0.5
XVII	+0.6	−0.2	−1.0	−0.7	−0.4	−0.2	−0.9	−0.8	−0.8	−1.0	0.0	−0.9	+0.1	+0.8	+1.0	−0.5	**+1.0**

Въ этой таблицѣ коеффиціентъ Q сродства, напримѣръ, предмета VIII (меча) и предмета VII (ротанового щита) помѣщенъ въ пересѣченіи вертикальной графы VIII съ горизонтальною графою VII. По главной діагонали помѣщены чисто формальные коеффиціенты (+ 1), играющіе роль высшихъ предѣловъ при сравненіи степей сродства, считаясь съ логикой крайнихъ предположеній и сужденій.

§ 11. Взаимоотношеніе тройного комплекса явленій: E_0, E_1 и E_2. Ритуалы записи и объективированіе критеріевъ ± сродства, соотвѣтствующихъ тройной ассоціаціи. Значеніе этихъ критеріевъ въ вопросахъ біологіи, наслѣдственности и традиціи.

I. Случай взаимоотношенія трехъ совмѣстныхъ явленій E_0, E_1 и E_2 въ связанныхъ опытахъ (какъ связаны явленія въ семьѣ съ признакомъ

E_0 у отца, съ признакомъ E_1 у матери и съ признакомъ E_2 у ихъ ребенка), представляетъ огромный біологическій и политико-ариѳметическій интересъ.

Обозначимъ чрезъ F_0, F_1 и F_2 соотвѣтственно явленія: не — E_0, не — E_1 и не — E_2. Ритуалъ записи результатовъ элементарныхъ наблюденій свяжемъ съ графическимъ пространствомъ трехъ измѣреній. Снабдимъ это пространство прямоугольными осями координатъ X_0, X_1 и X_2, соотвѣтствующихъ разсмотрѣнію трехъ перемѣнныхъ: X_0, X_1 и X_2, опредѣляемыхъ такъ:

$X_0 = 1$ или 0, смотря по тому, состоится ли E_0 или F_0;
$X_1 = 1$ » 0, » » » » » E_1 » F_1;
$X_2 = 1$ » 0, » » » » » E_2 » F_2.

Физическая область задуманныхъ наблюденій пусть раздѣлена по пространству, времени и людямъ на n участковъ (1), (2), . . ., (n); въ участкѣ (k) пусть дѣлается g_k основныхъ наблюденій. При каждомъ элементарномъ наблюденіи выясняются вышедшія явленія и опредѣляется соотвѣтствующая грузная символическая точка (X_0, X_1, X_2) нашего графическаго пространства. Для участка (k) изъ этихъ записей опредѣляется графическое «точечное тѣло», у котораго «серединная точка» (ξ_{0k}, ξ_{1k}, ξ_{2k}) опредѣлится, подобно центру тяжести, такъ:

$$\xi_{0k} = \frac{\Sigma X_0}{g_k}, \quad \xi_{1k} = \frac{\Sigma X_1}{g_k}, \quad \xi_{2k} = \frac{\Sigma X_2}{g_k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(XIV)}$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ наблюденія въ предѣлахъ обсуждаемаго участка, а g_k есть «вѣсъ» участковаго точечнаго тѣла.

Точками (ξ_{0k}, ξ_{1k}, ξ_{2k}) опредѣляются значенія варьирующихся среднихъ ξ_0. ξ_1, ξ_2. Дѣлая перемѣнное ξ_0 *подлежащимъ* сужденія, можемъ по правиламъ § 4 искать взаимоотношеніе между этими перемѣнными въ формѣ:

$$x_0 = y \ (=) \ a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(XV)}$$

гдѣ $y = x_0 = \xi_0 - \xi_{00}$, $x_1 = \xi_1 - \xi_{10}$, $x_2 = \xi_2 - \xi_{20}$,

$$\xi_{00} = \frac{\Sigma g_k \xi_{0k}}{\Sigma g_k}, \quad \xi_{10} = \frac{\Sigma g_k \xi_{1k}}{\Sigma g_k}, \quad \xi_{20} = \frac{\Sigma g_k \xi_{2k}}{\Sigma g_k}.$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D_0} \cdot \frac{\sigma_{x_0}}{\sigma_{x_1}}, \quad a_2 = \frac{D_2}{D_0} \cdot \frac{\sigma_{x_0}}{\sigma_{x_2}},$$

$$N = \Sigma g_k, \quad N \cdot \sigma_y^2 = N \cdot \sigma_{x_0}^2 = \Sigma g_k y_k^2 = \Sigma g_k (\xi_{0k} - \xi_{00})^2,$$

$$N \cdot \sigma_{x_1}^2 = \Sigma g_k \cdot x_{1k}^2 = \Sigma g_k (\xi_{1k} - \xi_{10})^2, \quad N \ \sigma_{x_2}^2 = \Sigma g_k x_{2k}^2 = \Sigma g_k (\xi_{k2} - \xi_{20})^2,$$

$$D_0 = 1 - r_{12}^2, \quad D_1 = r_{10} - r_{20} \cdot r_{12}, \quad D_2 = r_{20} - r_{10} r_{12},$$

$$r_{is} = \frac{\Sigma g_k x_{ik} x_{sk}}{N \cdot \sigma_{x_i} \cdot \sigma_{x_s}} = \frac{\Sigma g_k (\xi_{ik} - \xi_{io})(\xi_{sk} - \xi_{so})}{N \cdot \sigma_{x_i} \ \sigma_{x_s}}.$$

Этими формулами искомое соотношеніе (XV) вполнѣ опредѣлилось.

Въ тройной ассоціаціи ($E_0 E_1 E_2$), связанной предложеніемъ (XV), играютъ роль два коеффиціента связи:

$$\frac{D_1}{D_0} \quad \text{и} \quad \frac{D_2}{D_0}$$

между естественнымъ или явочнымъ подлежащимъ E_0 и *составнымъ* естественнымъ сказуемымъ ($E_1 E_2$). Графическимъ подлежащимъ сужденія (XV) является варіація x_0; сказуемое будетъ двухмѣрнымъ составнымъ. Сужденіе (XV) можно логически «обратить» *двоякимъ* образомъ, дѣлая подлежащимъ то число x_1, то число x_2. Въ результатахъ «обращеній» получатся сужденія въ формѣ уравненій:

$$x_1 \ (=) \ a'_2 x_2 + a'_0 x_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(XVI)}$$

$$x_2 \ (=) \ a_0'' x_0 + a''_1 x_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(XVII)}$$

гдѣ

$$a'_2 = \frac{D'_2}{D'_1} \cdot \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_{x_2}}, \quad a'_0 = \frac{D'_0}{D'_1} \cdot \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_{x_2}},$$

$$a''_0 = \frac{D''_0}{D''_2} \cdot \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_0}}, \quad a''_1 = \frac{D''_1}{D''_2} \cdot \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}},$$

$$D'_1 = 1 - r_{02}^2, \quad D'_2 = r_{12} - r_{01} r_{20}, \quad D'_0 = r_{10} - r_{02} r_{12},$$

$$D''_2 = 1 - r_{10}^2, \quad D''_0 = r_{20} - r_{12} r_{01}, \quad D''_1 = r_{21} - r_{10} r_{20}.$$

Уравненіямъ (XV), (XVI) и (XVII) въ нашемъ графическомъ пространствѣ будутъ соотвѣтствовать три плоскости: L_0, L_1 и L_2, кои вообще не совпадаютъ другъ съ другомъ, пересѣкаются по тремъ линіямъ и образуютъ *трехгранный уголъ*. Предоставляемъ читателю обсудить случаи совпаденія и, наоборотъ, несовпаденія этихъ плоскостей и другія стереометрическія отношенія между ними; это разсмотрѣніе интересно.

Въ особыхъ случаяхъ неопредѣленностей и обращенія въ нуль коеффиціентовъ связи нужно брать другую интерполяціонную форму вмѣсто формы (XV), напримѣръ, форму:

$$y \ (=) \ \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2} \text{ и пр.}$$

II. За опору для оцѣнки вѣроятныхъ формъ отклоненія Δ достаточно взять одну изъ плоскостей, напримѣръ, L_0; вѣроятность Z формы Δ будетъ оцѣниваться по формулѣ типа (III) при $\nu = 2$, но лишь при достаточно большихъ значеніяхъ чиселъ g_1, g_2, ... , g_n наблюденій по отдѣльнымъ участкамъ; это условіе обезпечиваетъ примѣнимость Лапласовскаго и Чебышевскаго выраженія вѣроятностей выхода простыхъ явленій, изъ которыхъ составляется сложное событіе (E_0 E_1 E_2).

Вся вообще устойчивость (статика) разсматриваемой закономѣрности сосуществованія опирается на теорію среднихъ и на то, въ какой мѣрѣ выполнены условія закона большихъ чиселъ въ формѣ Чебышева.

III. Надлежитъ еще обсудить уравненіе (XV) и вѣроятность Z отклоненія Δ при небольшихъ значеніяхъ чиселъ g_k, но считая число N, равное Σg_k, весьма большимъ.

Представимъ себѣ, какъ въ § 10, п. II, кромѣ распредѣленія числа N наблюденій по обыкновеннымъ участкамъ, распредѣленіе его по идеально-мелкимъ участкамъ, полагая $g_1 = g_2 = \ldots = 1$. При этомъ коэффиціенты r_{is} и среднія квадратическія отклоненія σ_{x_i} выразятся чрезъ статистическія частости разсматриваемыхъ простыхъ и сложныхъ явленій такъ:

$$r_{si} = Q_{si} = \frac{p_{(E_iE_s)} - p_{E_i}p_{E_s}}{\sqrt{p_{E_i}p_{F_i}p_{E_s}p_{F_s}}},$$

$$\sigma_{x_i} = \sigma_i' = \sqrt{p_{E_i}p_{F_i}}; \quad s = 0,\ 1,\ 2; \quad i = 0,\ 1,\ 2.$$

Тутъ же будемъ имѣть:

$$\xi_0 = X_0, \quad \xi_1 = X_1, \quad \xi_2 = X_2,$$

и уравненіе (XV) представится такъ:

$$X_0 - p_{E_0} (=) a_1 (X_1 - p_{E_1}) + a_2 (X_2 - p_{E_2}) \ldots \text{(XVIII)}$$

Отклоненіе Δ ожидаемой точки (X_0, X_1, X_2) выразится такъ:

$$\Delta = a_1 (X_1 - p_E) + a_2 (X_2 - p_{E_2}) + p_{E_0} - X_0 \ldots \text{(XIX)}$$

Точка (X_0, X_1, X_2) можетъ получить одно изъ восьми и только восьми положеній:

(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0) (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0),

соотвѣтствующихъ восьми сложнымъ событіямъ:

$$(E_0E_1E_2),\ (E_0E_1F_2),\ (E_2F_1E_2),\ (F_0E_1E_2),\ (E_0F_1F_2),\ (F_0E_1F_2),$$
$$(F_0F_1E_2),\ (F_0F_1F_2).$$

Слѣдовательно, форма отклоненія Δ можетъ получить восемь и только восемь соотвѣтствующихъ видовъ, кои обозначимъ такъ:

$$\Delta_{111},\ \Delta_{110},\ \Delta_{101},\ \Delta_{011},\ \Delta_{100},\ \Delta_{010},\ \Delta_{001},\ \Delta_{000}.$$

Значенія вѣроятности Z этихъ видовъ представятся частостями:

$$p_{(E_0E_1E_2)},\ p_{(E_0E_1F_2)},\ \cdots\ p_{(F_0F_1F_0)},$$

IV. Критеріи, кои мы разсмотрѣли, играютъ большую роль въ *Біометрикѣ*, въ изслѣдованіи явленій *наслѣдственности*, разумѣя подъ символами E_0, E_1 и E_2 явленіе какого либо жизненнаго свойства или наружнаго признака у трехъ комплексовъ: 1) у *сына* (или *дочери*), 2) у *отца* и 3) у *матери*.

Устойчивость (статика) и, наоборотъ, морфологическая измѣняемость (превращенія) внѣшнихъ антропометрическихъ признаковъ, кровныхъ жизненныхъ свойствъ и духовныхъ способностей у чистыхъ расъ и у помѣсей изслѣдуются по схемамъ теоріи взаимоотношеній, съ помощью числовой геометріи именно *не двухъ, а обязательно трехъ измѣреній* X_0, X_1 и X_2, *присоединяя къ этимъ измѣреніямъ еще и четвертое* Z, *измѣряющее вѣроятности отклоненія* Δ.

Это «четвертое» графическое измѣреніе, напоминая о погрѣшностяхъ сужденій, наблюденій, учетовъ и измѣреній, заставляетъ смотрѣть на эволюціонныя теоріи Дарвина, Геккеля и проч., какъ на фиктивныя утвержденія, требующія поправокъ, тѣмъ болѣе значительныхъ, чѣмъ дальше отъ наблюденныхъ фактовъ совершается теоретическая экстраполяція за предѣлы современной исторической геологической эпохи.

Вмѣстѣ съ кровнымъ наслѣдованіемъ разсматривается статика и измѣняемость наслѣдованія имуществъ и гражданскихъ правъ.

Независимо отъ этихъ законовъ кровной и матеріальной статики, разсматриваются возрожденія и наслѣдованія *духовныя*, привязывающія человѣческій родъ къ традиціоннымъ *идеямъ* и *работѣ духа* въ поколѣніяхъ по линіямъ: 1) вѣры и церкви и 2) науки и школы. Эти культурныя возрожденія, образующія мыслительную силу и духовные типы или твердые характеры этническихъ массъ, имѣютъ свою передачу устойчивыхъ наслѣдуемыхъ свойствъ и одерживаютъ соединенными силами положительнаго сродства побѣду надъ духовнымъ, нравственнымъ вырожденіемъ человѣческой культуры.

ГЛАВА II.

Историко-статистическая теорія. Критеріи сродства и активы и пассивы въ случаѣ закономѣрностей послѣдовательности и цѣлесообразности. Варіація вѣроятій и интересовъ подъ дѣйствіемъ хронологической субординаціи фактовъ.

§ 12. Кинематика. Распространеніе критеріевъ теоріи взаимоотношеній на закономѣрность послѣдовательности и цѣлесообразности. Активы и пассивы исторической динамики. Постулаты, связывающіе онтологическую статику съ эволюціонной кинематикой.

I. Въ главѣ I настоящей части теорія взаимоотношеній приспособлялась къ закономѣрностямъ сосуществованія или къ онтологической статикѣ. Хронологическій prius однихъ явленій передъ другими тамъ либо отсутствовалъ, либо игнорировался.

Въ закономѣрностяхъ послѣдовательности, являющихся основою эволюціонной кинематики, взглядъ мѣняется; тутъ принимается во вниманіе для данной ассоціаціи явленій, хронологическій prius, первенство и послѣдовательность во времени, предполагая въ массовомъ процессѣ не только принудительную, но и свободную причинную связь. Разсмотримъ съ этой причинной точки зрѣнія ассоціацію сначала двухъ явленій: E_1 и E_2. Противоположныя явленія обозначимъ соотвѣтственно чрезъ F_1 и F_2.

Удостовѣреніе одного изъ связанныхъ явленій (предшествующаго по времени) варьируетъ вѣроятность другого. Коеффиціентъ причиннаго сродства или связи этихъ явленій будемъ отождествлять при теперешней точкѣ зрѣнія съ этою варіаціей δp вѣроятности p или же съ ея статистическимъ близнецомъ: съ варіаціей частости.

Если, напримѣръ, предшествующими явленіями бываютъ E_2 или F_2, то коеффиціентъ Q_{E_1, E_2} кинематическаго сродства явленій E_1 и E_2 (при обозначеніяхъ, установленныхъ въ §§ 6 и 7 части II) представится такъ

$$Q_{E_1, E_2} = p_{E_1, E_2} - p_{E_1} = \frac{p_{(E_1E_2)} - p_{E_1}p_{E_2}}{p_{E_2}} = \Big|^{E_2}\delta p_{E_1}, \quad \ldots (1)$$

гдѣ вообще $\Big|^{C}\delta p_E$ есть варіація вѣроятности p_E явленія E подъ впечатлѣніемъ факта C.

Если вѣроятности, входящія въ это выраженіе критерія сродства, не даны, то ихъ можно замѣнять частостями. Будемъ имѣть:

$$Q_{E_1, E_2} = \frac{ad - bc}{N(a + c)}, \quad \ldots (2)$$

гдѣ a, b, c и d суть числа зарегистрованныхъ повтореній явленій (E_1E_2), (E_1F_2), (F_1E_2), (F_1F_2) въ большомъ числѣ N наблюденій.

Событіе E_1 можетъ состояться въ одной изъ двухъ ассоціацій: (E_1E_2) и (E_1F_2). Слѣдовательно, можно говорить о мѣркѣ Q_{E_1, F_2} причиннаго сродства явленія E_1 къ явленію F_2. Находимъ:

$$Q_{E_1, F_2} = p_{E_1, F_2} - p_{E_2} = \frac{bc - ad}{N(b + d)} \quad \ldots (3)$$

Очевидно, критеріи Q_{E_1, F_2} и Q_{E_1, E_2} имѣютъ *противоположный знакъ*. Напротивъ, критеріи Q_{F_1, F_2} и Q_{E_1, E_2} имѣютъ *одинаковый* знакъ, ибо

$$Q_{F_1, F_2} = \frac{ad - bc}{N(b + d)}; \quad \ldots (4)$$

они различаются лишь степенями или силою:

$$|Q_{E_1, E_2}| \text{ будетъ } > \text{или } < |Q_{F_1, F_2}|,$$

смотря по тому, будетъ ли $a + c <$ или $> b + d$.

Объ аналогичныхъ притяженіяхъ и отталкиваніяхъ мы уже говорили въ главѣ I настоящей части. Но теперь прибавляется различіе роли факторовъ, *пассивной* и *активной*.

Это различіе имѣетъ существенное значеніе. Активная роль принадлежитъ предшествующему явленію E_2 либо F_2, какъ причинѣ или поводу; пассивная роль принадлежитъ слѣдствію, послѣдующему явленію.

Какіе именно активы будутъ выпущены, активы ли E_2 или, наоборотъ, активы F_2,—это зависитъ отъ цѣли свободныхъ разумныхъ факторовъ исторіи. Люди своимъ выборомъ цѣлей, активовъ права и пассивовъ долга (молота и наковальни) выковываютъ себѣ то или другое будущее.

Помня это отличіе закономѣрностей послѣдовательности и цѣлесообразности, въ остальномъ мы можемъ руководиться тою аритмологическою теоріею взаимоотношеній, которая изложена въ § 10 для двухъ явленій и въ § 11 для трехъ явленій.

Указанный въ § 10 статическій коеффиціентъ Q легко выражается посредствомъ кинетическаго коеффиціента Q_{E_1, E_2}, именно:

$$Q_{E_1, E_2} \cdot p_{E_2} = Q \cdot \sigma_1' \cdot \sigma_2' \quad \ldots (5)$$

Это уравненіе постулируетъ въ чисто формальномъ (апріористическомъ) порядкѣ алгебраическую связь между онтологической статикой и исторической кинематикой. Эта аксіоматическая связь, впрочемъ, обоснована только для двоичной ассоціаціи (E_1E_2) явленій E_1 и E_2.

II. Сказанное объ активахъ и пассивахъ двойной ассоціаціи *проективно* относится и къ тройной ассоціаціи явленій E_1, E_2 и E_3, основной въ біологіи и антропологіи, т. е. относится такъ, какъ плоская проекція объема относится къ объему.

Формальный распорядокъ (ритуалъ) записей и графическихъ учетовъ и формулы взаимоотношеній опредѣляются для троичной ассоціаціи $(E_1E_2E_3)$ съ помощью графическихъ пріемовъ, намѣченныхъ въ § 11.

Проективно эта ассоціація сводится къ двоичнымъ сочетаніямъ, какъ это разъяснено при выводѣ теоремы умноженія вѣроятностей; но нужно помнить, что это сведеніе затушевываетъ дѣйствіе простыхъ отдѣльныхъ факторовъ; въ троичномъ и множественномъ соединеніи есть третій самостоятельный, простой или сложный, факторъ, располагающій активами и пассивами.

Троичную ассоціацію $(E_1E_2E_3)$ можемъ различнымъ образомъ проективно сводить къ двоичнымъ, но непростымъ ассоціаціямъ, именно:

$$(E_2E_3) \text{ и } E_1, \ (E_1E_3) \text{ и } E_2, \ (E_1E_2) \text{ и } E_3.$$

А затѣмъ можемъ брать мѣру кинематическаго сродства для той или другой изъ этихъ комбинацій, выбранной по соображеніямъ хронологіи. Иногда двоичная ассоціація (бракъ) предшествуетъ простому явленію

(рожденіе). Иногда простое явленіе (положимъ, плачь ребенка), вызываетъ сложное явленіе (стремленіе обоихъ родителей удовлетворить ребенка).

Въ области семейной этики согласіе обоихъ родителей ограничиваетъ волю и линію поведенія несовершеннолѣтняго сына или дочери; но потомъ наступаетъ совершеннолѣтіе, а силы родителей изживаютъ.

Если F_1, F_2, F_3 соотвѣтственно суть явленія не — E_1, не — E_2, не — E_3 и если подсчеты явленія возможныхъ восьми комбинацій:

$$(E_1E_2E_3),\ (E_1E_2F_3),\ (E_1F_2E_3),\ (F_1E_2E_3),$$
$$(E_1F_2F_3),\ (F_1E_2F_3),\ (F_1F_2E_3),\ (F_1F_2F_3)$$

выражаются соотвѣтственно числами:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,$$
$$a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,$$

то эти подсчеты могутъ служить для опредѣленія, напримѣръ, коэффиціента $Q_{E_1,\,(E_2E_3)}$ по формулѣ (2), полагая:

$$a = a_1,\quad b = a_2 + a_3 + a_5,\quad c = a_4,\ d = a_6 + a_7 + a_8.$$

§ 13. Виды цѣлесообразныхъ активовъ и пассивовъ. Сравнительный методъ изслѣдованія ихъ воздѣйствія на среду.

I. Будемъ предполагать, что въ совокупности возможныхъ причинъ явленія E_1 среды (массоваго процесса) отстоялся нѣкоторый порядокъ, обезпечивающій вѣроятностное доказательство и предвидѣніе.

Затѣмъ къ этой совокупности пусть испытатель прибавляетъ изъ своихъ активовъ цѣлесообразную добавочную причину E_2, вспомогательное дѣйствіе которой на выходъ явленія E_1 историко-статистически изслѣдуется. Опытное изслѣдованіе этого дѣйствія составляетъ задачу сравнительнаго метода.

Степень зависимости выхода явленія E_1 отъ E_2 взвѣшивается коэффиціентомъ $Q_{E_1,\,E_2}$, или варіаціей δp_{E_1} вѣроятности явленія E_1 подъ впечатлѣніемъ факта E_2.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ, гдѣ сравнительный методъ примѣняется къ жизненнымъ вопросамъ и дѣламъ.

Примѣръ 1. Полкъ солдатъ извѣстнымъ методомъ прицѣлки выпускаетъ m ружейныхъ зарядовъ по мишенямъ. Изслѣдовать вѣроятность (частость) попаденія E_1 въ цѣль. При повтореніи массоваго опыта въ прежній методъ прицѣлки вводится измѣненіе E_2; прослѣдить измѣненіе мѣткости сравнительно съ прежнею?

Примѣръ 2. На опытномъ полѣ высѣваютъ m зеренъ данной культуры, дѣйствуя на посѣвъ данными благопріятными авансами; изслѣдовать всхожесть зеренъ культуры при этихъ условіяхъ. При повтореніи опыта съ такою же культурою, присоединить къ прежнимъ условіямъ новое средство E_2 и изслѣдовать повышеніе или пониженіе всхожести сравнительно съ прежнею всхожестью.

Примѣръ 3. Смерть E_1 отъ данной болѣзни при данномъ медицинскомъ режимѣ слѣдуетъ съ вѣроятностью p. Испытывая новое лекарство E_2 противъ той же болѣзни на группѣ m заболѣвшихъ, изслѣдовать варіацію δp вѣроятности p смерти при дѣйствіи новаго лекарства.

Примѣръ 4. Изслѣдовать рождаемость въ годовой срокъ въ средѣ даннаго населенія, въ отношеніи къ численности населенія и къ численности браковъ. Прослѣдить вліяніе измѣненій цѣны хлѣба на число браковъ и рожденій.

Примѣръ 5. Установилась за прежніе годы средняя цѣна $i^0/_0$ капитала, поддерживающаго краткосрочнымъ кредитомъ данную мелкую кустарную сельскую промышленность. Прослѣдить вліяніе опредѣленнаго измѣненія цѣны $i^0/_0$ на развитіе этой промышленности, на цѣну ея продуктовъ, на доходъ кустарей и заработную плату батраковъ.

Элементарные примѣры 1 — 5 даютъ достаточное понятіе о сравнительномъ методѣ изслѣдованія кинетической связи авансовъ и слѣдствій.

Методъ обыкновенно примѣняется сначала въ порядкѣ пробнаго изслѣдованія вліянія новаго фактора E_2 въ отношеніи къ устанавливающемуся процессу. По выдержаніи же этого экзамена, оправданные опытомъ новые факторы E_2 включаются въ процессъ во множествѣ въ качествѣ гарантій улучшенія; отчего малоспособный, хворый и неустойчивый процессъ улучшается, оздоровляется и укрѣпляется въ своей состоятельности и дѣятельности.

Если изслѣдуются совокупности E_2', E_2'',... совмѣстно воздѣйствующихъ причинъ, то разсматриваютъ условныя вѣроятности, дѣлая несовмѣстимыя гипотезы о различныхъ сочетаніяхъ этихъ активовъ, и затѣмъ разсматривается полная вѣроятность по теоремѣ, умножающей и складывающей вѣроятности. Примѣръ такихъ сложеній увидимъ въ «кривой смертности» Пирсона, представленной ниже на фиг. 23.

II. Если сами люди вводятся въ процессъ какъ причины E_2, то, какъ это разъяснено въ части II, § 33, п. III, причины E_2 являются факторами моральной и политической ариѳметики.

Такъ, законъ о выдѣленіи хуторскихъ хозяйствъ изъ крестьянской общины, какъ причина, покровительствуетъ дѣятельностью банковъ и землеустроительной политики разрѣженію перенаселенной общины. Законъ этотъ замѣтно, чувствительно усиливаетъ естественную тягу неудовлетворенныхъ общиною людей изъ крестьянскаго общиннаго землевладѣнія

выходомъ на хутора, и усиленіе этой тяги можно оцѣнивать подсчетомъ ежегодныхъ выходящихъ на хуторское положеніе крестьянъ.

Другой примѣръ политическаго значенія: Германія учредила колонизаціонные банки для поселенія нѣмцевъ на земли поляковъ, скупаемыя въ Познани и Силезіи. Понятно, поляки стремятся сохранить свое землевладѣніе; но всетаки подъ могущественнымъ вліяніемъ банковъ усилилась тяга нѣмецкихъ колонистовъ на польскія земли; силу этой тяги можно выразить подсчетомъ какъ обмѣна польскихъ и нѣмецкихъ элементовъ на этой территоріи, такъ и подсчетомъ количества десятинъ земли, числящейся въ этой странѣ за поляками и нѣмцами.

Третій политическій примѣръ соотвѣтствуетъ международному давленію людскихъ массъ и втискиванію данной народности въ чужія народныя тѣла (см. часть I, стр. 58). Такъ благодаря давленію иностраннаго капитала S' и непостижимой логикѣ русскаго капитала S многія земли Подольской губерніи, политыя русскою кровью, скупаются иностранцами, колонизующими не пустыню, а издревле населенный край (см. Л. Волынецъ).

Тяги существуютъ и при чисто соціальныхъ взаимоотношеніяхъ, безъ вмѣшательства политики. Вкусы къ предметамъ искусства и жизненнаго обихода являются причиною тяги предметовъ къ людямъ и людей къ предметамъ непосредственно и въ порядкѣ простого и усложненнаго посредственнаго обмѣна (см. стр. 286).

Тяги химическія и метахимическія распространены между элементами въ природѣ одушевленной и неодушевленной.

Если коеффиціентъ причиннаго сродства умножить на 100, то онъ перейдетъ въ проценты, характеризующіе обыкновеннымъ вульгарнымъ образомъ прибыль частости явленія по причинѣ цѣлесообразной тяги.

III. Активы и пассивы по ихъ соціологической цѣли можемъ подраздѣлить на слѣдующіе виды: 1) *частные* вспомогательные подручные капиталы C субъекта Я (не только финансовые, но и культурно-экономическіе въ лицѣ самихъ людей, по скольку ихъ силы и способности дозволительно трактовать какъ вспомогательное средство, пускаемое самимъ же субъектомъ Я въ борьбу, торгъ и оборотъ); 2) *частные* вспомогательные капиталы C' чужого субъекта (чужого Я'), противоположные или *соперническіе* относительно своего Я; 3) *защитные* и *спасительные* активы и пассивы объективнаго права государства, дѣйствующаго общими законами и вспомогательнымъ подручнымъ капиталомъ S (см. часть I, §§ 21—22); 4) нелегальные и скрытые враждебные активы и пассивы, бывающіе причинами пертурбацій, приближающихъ соціальныя трагедіи — катастрофы тихимъ ходомъ безкровнаго завоеванія и потомъ разительно.

§ 14. Хронологизація спеціальной дѣятельности ΣE_τ, считаемой отъ эры препріятія и домогающейся выхода плодовъ или слѣдствій $\Sigma\varepsilon$, регистрируемыхъ въ журналѣ сложной операціи. Запись.

Будемъ изучать въ строгой хронологической послѣдовательности причинное сродство явленій, представляемыхъ: 1) спеціальною дѣятельностью и 2) ея плодами и связанныхъ несовершенною причинною зависимостью. Эти двѣ группы вещественныхъ явленій связаны въ мысли съ опредѣленною спеціальною жизненною *идеей* посредствомъ приспособленій. Мѣриломъ сродства будетъ намъ служить варіація δp вѣроятнаго выхода плода подъ впечатлѣніемъ прироста фактовъ.

Историко-статистическая схема отчасти уже намѣчена въ части I, стр. 101 — 107; намъ нужно ее расширить и распространить на долгосрочные и вѣчные процессы. Теперь мы будемъ брать итожную дѣятельность ΣE_τ, соотвѣтствующую сложной дѣятельности операцій $O_1, O_2, \ldots, O_m$ и принимаемую за функцію учитываемаго времени τ.

Предполагается при этомъ, что операціи $O_1, O_2, \ldots, O_m$, развивающія дѣятельность ΣE_τ и производящія плоды или слѣдствія $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, имѣютъ извѣстные мѣста въ пространствѣ, объединяются и наблюдаются нѣкорымъ дирижерствомъ, инструкціей, субординаціей.

Интервалъ $(t, t+\Delta\tau)$ времени выработки суммарнаго плода $n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$ пусть разбивается на послѣдовательные мелкіе интервалы $(\tau, \tau+\delta\tau)$, соотвѣтствующіе импульсамъ работы ΣE_τ, какъ это разъяснено было въ части I.

Пусть разсматривается весьма большой періодъ (τ_0, τ_0') исторіи, въ предѣлѣ обращающійся въ безконечность $(\tau_0' = \infty)$. Періодъ (τ_0, τ_0') разбивается на интервалы $(t, t+\Delta\tau)$, а эти послѣдніе интервалы на весьма короткіе интервалы $(\tau, \tau+\delta\tau)$.

Пусть инструкція указываетъ поступать такъ: а) записью въ журналѣ отмѣчать совершившійся приростъ дѣятельности за каждый интервалъ $(\tau, \tau+\delta\tau)$ къ концу его, предполагая, что E_τ есть итогъ дѣятельности въ какой либо операціи *О къ концу* интервала (τ_0, τ), б) приспособлять дѣятельность ΣE_τ и присмотръ за нею къ тому, чтобы *въ началѣ* каждаго интервала мыслилась смѣта на итогъ n перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, соотвѣтствующая исчисленію вѣроятностей этого итога, и в) регистрировать окончательные (матеріальные) выходы плодовъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ дѣятельности къ гражданскимъ, съ природою согласованнымъ срокамъ, къ концу, положимъ, каждыхъ γ послѣдовательныхъ подготовительныхъ интерваловъ типа $(\tau, \tau+\delta\tau)$.

Въ этомъ планѣ изслѣдованія соображаются два ряда моментовъ обсужденія: 1) моментъ налаживанія предстоящаго процесса авансами (смѣтное

забѣганіе впередъ дѣятельности, приносящей извѣстные плоды) и 2) моментъ ревизіи плодовъ и отчета заднимъ числомъ о дѣятельности и плодахъ. Между этими двумя моментами укладывается третій моментъ, это— моментъ работы и точной конторской записи фактовъ и плодовъ немедленно при ихъ выходѣ.

Регистраціи пріурочиваются къ ряду послѣдовательныхъ отчетныхъ интерваловъ:

$$(\tau_0, \tau_0 + \delta\tau), (\tau_0 + \delta\tau, \tau_0 + 2\delta\tau), \ldots, (\tau_0 + N\delta\tau - \delta\tau, \tau_0'), \quad . \; . \; (1)$$

$$\delta\tau = \frac{\tau_0' - \tau_0}{N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Сказано выше, что E_τ есть дѣятельность, состоявшаяся въ операціи O къ концу интервала (τ_0, τ); къ концу же интервала $(\tau_0, \tau + \delta\tau)$ выявится и зарегистрируется нарощенная дѣятельность $E_{\tau+\delta\tau}$.

Обозначимъ черезъ δE_τ разность дѣятельностей $E_{\tau+\delta\tau}$ и E_τ, называя обозначенную дифференціальнымъ символомъ δE_τ силу или работу *элементарнымъ толчкомъ* или *поводомъ*. Символу δE_τ соотвѣтствуетъ въ символическомъ исчисленіи равенство:

$$\delta E_\tau = E_{\tau+\delta\tau} - E_\tau \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Толчокъ δE_τ выясняется къ концу интервала $(\tau, \tau + \delta\tau)$. Въ началѣ же этого интервала мыслится въ предположеніяхъ, что толчекъ δE_τ совершится въ одномъ изъ нѣсколькихъ несовмѣстимыхъ видовъ:

$$\delta E_\tau', \quad \delta E_\tau'', \ldots, \delta E_\tau^{(k)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

имѣющихъ свою таблицу, какъ въ части I, § 18_1, стр. 98, и свои вѣроятности; но въ концѣ интервала $(\tau, \tau + \delta\tau)$ выявится одинъ и только одинъ изъ этихъ видовъ, тотчасъ записываемый въ журналѣ наблюденія, какъ дифференціальный фактъ, присоединяющійся къ ранѣе записанному интегральному факту E_τ.

Будемъ имѣть слѣдующее символическое интегральное уравненіе:

$$E_\tau = E_{\tau_0} + \delta E_{\tau_0+\delta\tau} + \delta E_{\tau_0+2\delta\tau} + \ldots + \delta E_{\tau-\delta\tau} \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Здѣсь подъ фактомъ E_{τ_0}, который назовемъ *эрою* предпріятія или *починомъ*, будемъ разумѣть *закладку* или *онтологически достаточное основаніе* долгосрочной операціи $(O_1 O_2 \ldots O_m)$, напримѣръ, фонды Γ предпріятія: земельные, запасные и оборотные, надежно хватающіе на весь срокъ (τ_0, τ_0') при условіи возстановленій или оборотовъ издержекъ за счетъ плодовъ, какъ это разъяснено въ части I, стр. 102—103 и 106.

Цѣль дѣятельности операціи $(O_1 O_2 \ldots O_m)$ есть образованіе плода въ формѣ итога n.

Образованіе плода n будемъ называть:

а) долгосрочнымъ простымъ, если $N > 1$ и итогъ n перемѣнныхъ

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ долженствуетъ получиться лишь однажды къ концу интервала (τ_0, τ_0'), а въ короткіе интервалы (1) совершаются лишь разныя ступени или фазы подготовленія этого результата;

б) долгосрочнымъ многоплоднымъ, если $N > 1$ и итогъ n въ срокѣ (τ_0, τ_0') получается не одинъ разъ, а черезъ каждые γ послѣдовательныхъ интерваловъ строки (1), т. е. въ концѣ каждаго изъ интерваловъ:

$$(\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau), (\tau_0 + \Delta\tau, \tau_0 + 2\Delta\tau), (\tau_0 + 2\Delta\tau, \tau_0 + 3\Delta\tau), \ldots, \; . \; (6)$$

гдѣ

$$\Delta\tau = \gamma \; . \; \delta\tau;$$

в) краткосрочнымъ и простѣйшимъ, если $N = \gamma = 1$;

г) вѣчнымъ многоплоднымъ, если $\tau_0' = +\infty$, $N = \infty$, а τ_0 и γ суть конечныя величины;

д) вѣчнымъ метафизическимъ, если $\tau_0' = +\infty$ и моментъ τ_0 уходитъ въ недосягаемую даль $-\infty$ сверхъ историческаго прошедшаго времени.

Если возьмемъ опредѣленный моментъ τ, какъ настоящій, то ближайшій очередной итогъ n за текущій интервалъ $(t, t + \Delta\tau)$, записанный въ строкѣ (6), зависитъ, по силѣ экономіи, преемственности и развитія дѣятельности, отъ итоговъ за предшествующіе интервалы той же строки.

Если $\gamma > 1$, то какой нибудь интервалъ

$$(\tau_0 + k\gamma\delta\tau, \quad \tau_0 + k\gamma\delta\tau + \gamma\delta\tau), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6')$$

взятый изъ строки (6), разбивается на мелкіе интервалы типа $(\tau, \delta + \delta\tau)$, и дѣятельность каждаго изъ интерваловъ ближайшимъ образомъ вліяетъ на слагаемыя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ очередного итога n.

§ 15. Историческое варіаціонное исчисленіе вѣроятностей и интересовъ. Метеорологія, сельское хозяйство и банки.

I. По ходу времени τ и подъ впечатлѣніемъ прироста дѣятельности ΣE_τ, вѣроятность ΔP_n, соотвѣтственная выгода и общая женератриса $F(z)$ всѣхъ вѣроятностей ΔP_n варьируются, переучитываются сообразно ходу фактовъ и выясненію загадочнаго результата.

Тоже самое нужно сказать о вѣроятности Δp_k (ε_k) выхода плода ε_k въ операціи O_k и о женератрисѣ $\varphi_k(z)$ этой вѣроятности. Сохранимъ обозначенія предшествующаго параграфа и дополнимъ ихъ.

Апріорныя вѣроятности Δp_k (ε_k) и ΔP_n будемъ относить къ моменту τ_0 обсужденія, когда интервалъ (τ_0, τ_0'), еще не начинался.

Пусть къ началу срока $(\tau, \tau + \delta\tau)$, принадлежащаго интервалу (6'), наблюдена и зарегистрирована въ журнальной книгѣ дѣятельность ΣE_τ, какъ совершившійся фактъ. Выходъ послѣдующаго очередного итога n

зависитъ отъ дальнѣйшихъ ожидаемыхъ толчковъ или поводовъ $\Sigma\delta E_\tau$, $\Sigma\delta E_{\tau+\delta\tau}$, . . .

Апріорныя вѣроятности Δp_k (ε_k) и ΔP_n подъ впечатлѣніемъ совершившагося факта ΣE_τ измѣняются (переучитываются), получая къ моменту τ *апостеріорныя* значенія, кои представимъ символами:

$$\Delta p_{k,\tau}(\varepsilon_k) \text{ и } \Delta P_{n,\tau}.$$

При этомъ апостеріорныя вѣроятности $\Delta p_{k,\tau}(\varepsilon_k)$ и $\Delta P_{n,\tau}$ вообще опредѣляются съ помощью теоремы Байе.

Если обозначимъ чрезъ $q_{n,\tau}$ условную апріорную вѣроятность впослѣдствіи наблюденнаго факта ΣE_τ,—условную въ предположеніи, что возобладаетъ причина C_n, ведущая неизбѣжно къ выходу опредѣленнаго значенія n варьирующагося итога n,—то по теоремѣ Байе будемъ имѣть:

$$\Delta P_{n,\tau} = q_{n,\tau} \cdot \Delta P : \left\{\sum q_{n_l} \cdot \Delta P_{n_l}\right\}, \quad \ldots\ldots (8)$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всевозможныя значенія n.

Лѣтописный статистическій матеріалъ даетъ съ своей стороны соотвѣтствующую статистическую частость $\Delta P'_{n,\tau}$ событія, являющуюся близнецомъ вѣроятности $\Delta P_{n,\tau}$ въ индуктивной системѣ уравненій (см. § 17).

Введемъ еще обозначенія:

$$\delta\Delta p_{k,\tau}(\varepsilon_k) = \Delta p_{k,\tau+\delta\tau}(\varepsilon_k) - \Delta p_{k,\tau}(\varepsilon_k), \ldots\ldots (9)$$

$$\delta\Delta P_{n,\tau} = \Delta P_{n,\tau+\delta\tau} - \Delta P_{n,\tau} \ldots\ldots\ldots (9')$$

Варіація $\delta\Delta P_{n,\tau}$ трактуется параллельно съ аналогическою варіаціей средняго мысленнаго интереса $\Delta M_n = \left(\frac{n-n_0}{m}\right) \cdot \Delta P_n$. Апріорная оцѣнка этого интереса измѣнится подъ вліяніемъ факта ΣE_τ и выразится величиною $\Delta M_{n,\tau} = \left(\frac{n-n_0}{m}\right) \cdot \Delta P_{n,\tau}$, при чемъ будемъ имѣть:

$$\delta\Delta M_{n,\tau} = \Delta M_{n,\tau+\delta\tau} - \Delta M_{n,\tau} = \left(\frac{n-n_0}{m}\right) \cdot \delta P_{n,\tau} \quad \ldots (10)$$

Варіаціонное исчисленіе по формулѣ (10) развиваетъ таксологическую проблему (см. часть II, §§ 19, 20 и 27) и вообще входитъ въ жизнь мысли, сравнивающей и оцѣнивающей выкупы мысленныхъ владѣній по ходу обстоятельствъ.

II. Пусть подъ дѣйствіемъ факта ΣE_τ апріорныя женератрисы $F(z)$ и $\varphi_k(z)$, указанныя выше, переходятъ соотвѣтственно въ апостеріорныя женератрисы $F(z, \tau)$ и $\varphi_k(z, \tau)$ вышеуказанныхъ вѣроятностей $\Delta P_{n,\tau}$ и $\Delta p_{k,\tau}(\varepsilon_k)$.

Женератриса $F(z, \tau)$ можетъ служить для исчисленія количествъ $\Delta P_{n,\tau}$ и $\Delta M_{n,\tau}$ съ помощью интегралovъ Коши, потомъ съ помощью интегралovъ Коши выразятся и варіаціи этихъ количествъ.

Далѣе совершаются интеграціи по скалѣ n, по скалѣ времени τ и по областямъ пространства, занятаго оперированіями O_1, O_2, . . .

Интеграціи по скалѣ τ обозначимъ символами:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \delta\Delta P_{n,\tau} \text{ и } \int_{\tau_0}^{\tau} \delta\Delta M_{n,\tau}.$$

Будемъ имѣть:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \delta\Delta P_{n,\tau} = \Delta P_{n,\tau} - \Delta P_{n,\tau_0}, \quad \int_{\tau_0}^{\tau} \delta\Delta M_{n,\tau} = \Delta M_{n,\tau} - \Delta M_{n,\tau_0}. \quad (11)$$

III. Формулы (11) могутъ быть исходнымъ пунктомъ для дедукцій и индукцій историко-статистическаго характера; онѣ могутъ и должны соединяться съ географическимъ матеріаломъ, приводя къ синтезу двухъ основныхъ описательныхъ наукъ: исторіи и географіи. Эти формулы суть хронологизированныя мѣрила сродства (зависимости) плодовъ отъ дѣятельностей, намѣченныя выше. Эти мѣрила опредѣляютъ *скорости* и *балансы движеній* и *бюджеты* статистики за части интервала (τ_0, τ) и развиваютъ элементы *философіи исторіи*, отмѣченные въ части I, § 18.

Интерпретація формулъ (9) — (11) исторической кинематики представляетъ множество особенностэй, смотря по природѣ, приспособленности и цѣли кооперація $(O_1 O_2 \ldots O_m)$. При этомъ мѣрила сродства и мѣры величинъ сплетаются въ цѣлую систему графическихъ мѣръ, которая можетъ служить для предписыванія сроковъ и нормъ выкупа и линій поведенія. Предписываютъ въ этомъ случаѣ съ помощью теоріи, основывающейся не только на надежныхъ апріорныхъ постулатахъ исчисленія вѣроятностей, но и на массовомъ опытѣ.

Обработка вѣковыхъ метеорологическихъ наблюденій по намѣченнымъ схемамъ въ связи, напримѣръ, съ урожаями продуктовъ сельскаго хозяйства, зависящаго въ сильной степени отъ климатическихъ условій, можетъ обосновать застрахованіе хозяйствъ отъ неурожаевъ натуральными и денежными запасами достаточныхъ и нетяжелыхъ средствъ на худые годы за счетъ хорошихъ годовъ. Сѣть сельско-хозяйственныхъ національныхъ банковъ должна покрывать страну для цѣлей сего застрахованія и меліорацій въ области труда и народной экономіи. Въ противномъ случаѣ олигархія міроваго капитала высосетъ своими присосками и подкупами все, что выработаютъ пахарь и мысль естествоиспытателя.

Вообще промышленная статистика въ связи съ доходами, налогами, банкирскими оборотами и *защитнымъ* застрахованіемъ должна охватить: 1) *крупныя*, 2) *среднія* и 3) *мелкія* предпріятія съ ихъ заинтересованными сторонами.

ГЛАВА III.

Производящія функціи вѣроятности спеціальнаго итога и форма индуктивныхъ уравненій, въ связи съ упрощеніемъ задачъ помощью круглыхъ чиселъ.

§ 16. Полная таблица вѣроятностей значеній перемѣннаго итога n и таблица, сокращенная по способу метрическихъ округленій.

Вернемся къ понятіямъ, установленнымъ въ части II, гл. V. Тамъ (см. §§ 22 и 26) опредѣлялись вѣроятности дисперсіи различныхъ спеціальныхъ итоговъ, коимъ соотвѣтствуютъ подразумѣваемыя идеи, съ ихъ активами и пассивами. Эти вѣроятности измѣряютъ давленія совокупныхъ дѣятельностей на выходъ соотвѣтствующихъ вещественныхъ итоговъ, какъ цѣлей, въ которыхъ промышленныя идеи какъ бы воплощаются.

Нужно подойти къ *дифференціальному* опредѣленію этихъ вѣроятностей, хорошо сходящемуся съ фактическими частостями и предсказывающему выходы типическихъ явленій въ массовомъ процессѣ. Но тутъ-то изъяны теоремы Я. Бернулли и требуютъ систематическаго приложенія круглыхъ чиселъ и аритмологическихъ преобразованій.

I. Приложимъ къ дѣлу понятіе о круглыхъ числахъ и метрическихъ округленіяхъ, изложенное въ части I, §§ 17_1 и 17_2.

Пусть итогъ n есть перемѣнная, дисперсивная въ апріорномъ сужденіи величина, долженствующая являться въ результатѣ нѣкоторой итожной дѣятельности ΣE, типы которой разсмотрѣны въ части II, гл. V. Строка

$$n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_l,\ \ldots,\ n_{a-1},\ n_{a-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1n)$$

пусть исчерпываетъ всю дисперсію величины n, т. е. всѣ возможныя различныя значенія перемѣннаго n, записанныя въ *возрастающемъ* порядкѣ. Пусть h есть общая наибольшая мѣра всевозможныхъ разностей этихъ значеній. Присоединимъ къ строкѣ $(1n)$ еще членъ

$$n_a = n_{a-1} + h;$$

вѣроятность этого значенія есть абсолютный нуль.

Вѣроятность выхода результата $n = n_l$ обозначимъ черезъ ΔP_{n_l}.

Примѣняя къ этимъ обозначеніямъ формулы части I, § 29, будемъ имѣть:

$$\Delta P_n = \frac{h}{2\pi}\int_{-\pi w}^{+\pi w} F\left(ue^{\theta i}\right)\left(ue^{\theta i}\right)^{-n} d\theta, \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, $w = 1 : h$ и

$$F(z) = \sum_{l=1}^{l=a-1} \Delta P_{n_l} \cdot z^{n_l} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Число F (1) есть итогъ вѣроятностей ΔP_n, равный, по теоремѣ сложенія, единицѣ.

Разумѣя подъ P_α вѣроятность неравенства:

$$n < \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

выводимъ изъ этого обозначенія и изъ теоремы сложенія вѣроятностей слѣдующее равенство:

$$\Delta P_{n_l} = P_{n_{l+1}} - P_{n_l} \quad \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Отсюда и изъ того, что $P_{n_1} = 0$, слѣдуетъ:

$$P_{n_l} = \Delta P_{n_1} + \Delta P_{n_2} + \ldots + \Delta P_{n_{l-1}} = \sum_{k=1}^{k=l-1} \Delta P_{n_k} \quad \ldots\ (4')$$

Будемъ пріурочивать послѣдующія тарификаціи, разсужденія и концепціи къ слѣдующей схематической таблицѣ функцій ΔP_n и P_n.

Таблица I.

№ строки.	n	ΔP_n	P_n	ΔM_n
1	n_1	ΔP_{n_1}	$P_{n_1} = 0$	ΔM_{n_1}
2	n_2	ΔP_{n_2}	P_{n_2}	ΔM_{n_2}
3	n_3	ΔP_{n_3}	P_{n_3}	ΔM_{n_3}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$a-1$	n_{a-1}	$\Delta P_{n_{a-2}}$	$P_{n_{a-2}}$	$\Delta M_{n_{a-2}}$
$a-1$	n_{a-1}	$\Delta P_{n_{a-1}}$	$P_{n_{a-1}}$	$\Delta M_{n_{a-1}}$
a	n_a	—	$P_{n_a} = 1$	—

II. Существуетъ много гносеологическихъ препятствій, по которымъ въ осложненныхъ случаяхъ бываетъ невозможно исчислить полную таблицу I функцій ΔP_n и P_n, но бываетъ возможно исчислить *сокращенную* или *лакунарную* таблицу II (см. ниже). Сокращеніе таблицы I выполняется съ помощью «круглыхъ чиселъ» и аритмологическаго преобразованія перемѣннаго n (см. часть I, § 17_2) посредствомъ уравненія:

$$\xi = n_\sigma + \mu h E_0\left(\frac{n - n_\sigma}{\mu h}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

гдѣ μ есть цѣлое положительное число, n_σ есть постоянное, взятое изъ строки $(1n)$, n есть перемѣнное и, наконецъ, $E_0(y)$ есть круглое число, а именно—цѣлая часть числа y, установленная въ части I, § 16. Если

число y цѣлое, то нужно именно его считать за число $E_0(y)$; а вообще цѣлое число $E_0(y)$ опредѣлится съ помощью неравенствъ:

$$0 \leqq y - E_0(y) < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

Выборъ чиселъ μ и n_σ зависитъ отъ дирижера. Такъ, членъ n_σ строки $(1n)$ можно взять ближайшій къ матем. ож. n_0 величины n.

Погрѣшность при замѣнѣ числа n числомъ ξ, исчисленнымъ по формулѣ (5), есть $\xi - n$; она всегда бываетъ меньше μh и бываетъ *нулемъ* тогда, когда число

$$\frac{n - n_\sigma}{\mu h}$$

цѣлое. Эти послѣднія значенія ξ (съ нулевыми погрѣшностями $\xi - n$) вводятся во вторую графу таблицы II.

Пусть перемѣнное n возрастаетъ непрерывно отъ $n_1 - (\mu - 1)\,h$ до $n_a + (\mu - 1)\,h$. При этомъ перемѣнное ξ будучи прерывною (аритмологическою) функціей отъ n, станетъ наростать скачками μh и образуетъ своими всевозможными значеніями возрастающую ариѳметическую прогрессію, которая пусть будетъ:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots. \xi_k, \ldots, \xi_{N-1}, \xi_N \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Эта строка представитъ вторую графу таблицы II.

Воображая, что функція P_n въ точности сохраняетъ прежнее опредѣленіе, введемъ обозначеніе:

$$\Delta_\mu P_\xi = P_{\xi_{k+1}} - P_{\xi_k} = \sum_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \Delta P_{n_l}, \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ значенія n_l, принадлежащія второй графѣ таблицы I и удовлетворяющія неравенствамъ:

$$\xi_k \leqq n_l < \xi_{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Очевидно, $\Delta_\mu P_\xi$ есть вѣроятность, что будетъ имѣть силу равенство:

$$n_\sigma + \mu h E_0\left(\frac{n - n_\sigma}{\mu h}\right) = \xi; \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

она же есть вѣроятность неравенствъ (8).

Производящую функцію вѣроятностей $\Delta_\mu P_\xi$ обозначимъ чрезъ $F_{\mu,\sigma}(z)$, отмѣчая значками μ и σ зависимость вѣроятностей $\Delta_\mu P_\xi$ и ихъ женератрисы отъ подбора чиселъ μ и n_σ, входящихъ въ преобразованіе (5).

Будемъ имѣть

$$F_{\mu,\sigma}(z) = \sum_{l=1}^{l=N-1} \Delta_\mu P_{\xi_l} \cdot z^{\xi_l} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Таблица II.

№ строки.	ξ	$\Delta_\mu P_\xi$	P_ξ	$\Delta_\mu M_\xi$
1	ξ_1	$\Delta_\mu P_{\xi_1}$	$P_{\xi_1} = 0$	$\Delta_\mu M_{\xi_1}$
2	ξ_2	$\Delta_\mu P_{\xi_2}$	P_{ξ_2}	$\Delta_\mu M_{\xi_2}$
3	ξ_3	$\Delta_\mu P_{\xi_3}$	P_{ξ_3}	$\Delta_\mu M_{\xi_3}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$N-1$	ξ_{N-2}	$\Delta_\mu P_{\xi_{N-2}}$	$P_{\xi_{N-2}}$	$\Delta_\mu M_{\xi_{N-2}}$
$N-1$	ξ_{N-1}	$\Delta_\mu P_{\xi_{N-1}}$	$P_{\xi_{N-1}}$	$\Delta_\mu M_{\xi_{N-1}}$
N	ξ_N	—	$P_{\xi_N} = 1$	—

Женератрису $F_{\mu,\sigma}(z)$ назовемъ вспомогательною относительно основной женератрисы $F(z)$.

По формулѣ Коши будемъ имѣть:

$$\Delta_\mu P_\xi = \frac{\mu h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi w}{\mu}}^{+\frac{\pi w}{\mu}} F_{\mu,\sigma}(ue^{\theta i}) \cdot (ue^{\theta i})^{-\xi}\, d\theta, \quad \ldots\ldots (11)$$

гдѣ ξ есть членъ строки (6) и $w = 1 : h$:

Любопытна функціональная зависимость между производящими функціями $F(z)$ и $F_{\mu,\sigma}(z)$, именно:

$$F_{\mu,\sigma}(z) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{k=\mu-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{\mu h}} z\right) e^{-\frac{2k\pi n_\sigma i}{\mu h}} \sum_{s=0}^{s=\mu-1} e^{-\frac{2ks\pi i}{\mu}} z^{-hs} \quad \ldots (12)$$

Эта зависимость легко повѣряется съ помощью равенствъ (2) и (10) и тождества:

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{k=\mu-1} \left(e^{\frac{2k\pi i}{\mu}} y\right)^n \sum_{s=0}^{s=\mu-1} e^{-\frac{2k\pi si}{\mu}} y^{-s} = y^{\mu E_0 \frac{n}{\mu}}, \quad \ldots\ldots (13)$$

гдѣ n цѣлое число.

III. Для изслѣдованія лакунъ сокращенной таблицы II полезна еще условная производящая функція $f_{\mu,\nu}(z)$ такихъ вѣроятностей ΔP_n, занесенныхъ въ третью графу таблицы I, для которыхъ имѣетъ силу разсматриваемое въ теоріи чиселъ сравненіе:

$$\frac{n - n_\sigma}{h} \equiv \nu \pmod{\mu}, \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

гдѣ ν есть какое либо изъ чиселъ: 0, 1, 2, . . ., $\mu - 1$, и n есть число, взятое изъ строки $(1n)$.

Женератриса $f_{\mu,\nu}(z)$ получается изъ разложенія женератрисы $F(z)$ по формулѣ (2), вычеркивая въ этомъ разложеніи члены, степени n коихъ не удовлетворяютъ сравненію (14).

Съ помощью равенства (2) легко убѣдиться, что условная женератриса $f_{\mu,\nu}(z)$ опредѣляется такъ:

$$f_{\mu,\nu}(z) = \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{k=\mu-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{\mu h}} z\right) e^{-\frac{2k\pi i (n_\sigma + \nu h)}{\mu h}} \quad . . . . . (15)$$

Если n удовлетворяетъ сравненію (14), то съ помощью женератрисы $f_{\mu,\nu}(z)$ получаемъ по формулѣ Коши

$$\Delta P_n = \frac{\mu h}{2\pi}\int_{-\frac{\pi w}{\mu}}^{+\frac{\pi w}{\mu}} f_{\mu,\nu}(ue^{\theta i}) \cdot (ue^{\theta i})^{-n}\, d\theta \quad . . . . . (16)$$

Группа условныхъ женератрисъ $f_{\mu,0}(z)$, $f_{\mu,1}(z), \ldots, f_{\mu,\mu-1}(z)$ охватываетъ съ помощью системы уравненій (16) и сравненій (14) при $\nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1$ всѣ вѣроятности ΔP_n, вошедшія въ третью графу таблицы I.

Если для каждаго изъ сравненій (14) построимъ діаграмму функціи ΔP_n, опредѣляемой уравненіемъ (16), то получимъ группу ν діаграммъ, которую назовемъ «сѣткой». Совокупность всѣхъ этихъ діаграммъ равносильна общей діаграммѣ функціи ΔP_n, опредѣляемой уравненіемъ (1). Сличеніе частей «сѣтки» съ общею діаграммою представитъ интересъ впослѣдствіи, при классификаціи особыхъ случаевъ и парадоксальныхъ случаевъ.

Величины $f_{\mu,0}(1)$, $f_{\mu,1}(1)$, . . ., $f_{\mu,\mu-1}(1)$ представляютъ итоги вѣроятностей, опредѣляющіе, по теоремѣ сложенія, вѣроятности осуществленія соотвѣтствующихъ изъ *гиротезъ* $C_0, C_1, \ldots, C_{\mu-1}$ въ формѣ сравненій (14), давая числу ν значенія: 0, 1, . . ., $\mu - 1$. Будемъ имѣть:

$$f_{\mu,0}(1) + f_{\mu,1}(1) + \ldots + f_{\mu,\mu-1}(1) = 1 \quad . . . . (17)$$

IV. Подведемъ интегралы (1), (11) и (16) подъ общій типъ. Вообразимъ перемѣнное x, способное имѣть слѣдующія значенія:

$$x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_{b-1} \quad . . . . . (18)$$

расположенныя въ возрастающемъ порядкѣ.

Пусть Δv_x есть функція перемѣннаго x и h' есть общая наибольшая мѣра всѣхъ разностей значеній x. Женератриса $\Pi(z)$ функціи Δv_x опредѣлится такъ:

$$\Pi(z) = \sum_{l=1}^{l=b-1} \Delta v_{x_l} \cdot z^{x_l} \quad . . . . . (19)$$

Будемъ имѣть:

$$\Delta v_x = \frac{h'}{2\pi}\int_{-\pi w'}^{+\pi w'} \Pi(ue^{zi})\,(ue^{zi})^{-x}\, dz, \quad . . . . . (20)$$

гдѣ x есть членъ строки (18) и $w' = 1 : h'$.

Если въ формулѣ (20) группа величинъ:

$$x,\ h',\ \Delta v_x,\ \Pi(z)$$

замѣщается одною изъ слѣдующихъ группъ:

$$\left.\begin{array}{l} n,\ h,\ \Delta P_n,\ F(z); \\ \xi,\ \mu h,\ \Delta_\mu P_\xi,\ F_{\mu,\sigma}(z); \\ n,\ \mu h,\ \Delta P_n,\ f_{\mu,r}(z), \end{array}\right\} \quad . . . . . (21)$$

то общая формула (20) воспроизводитъ соотвѣтственную изъ трехъ формулъ (1), (11) и (16). Поэтому программу изслѣдованія вѣроятностей можно установить сначала вообще для формулы (20), разумѣя подъ Δv_x ту или другую изъ вѣроятностей; а затѣмъ можемъ для перехода къ частнымъ случаямъ (21) выполнять соотвѣтствующее замѣщеніе группы величинъ x, h', Δv_x и $\Pi(z)$ вышеуказанными группами (21). Это замѣчаніе будетъ полезно при выводѣ асимптотическихъ выраженій вѣроятностей массовыхъ явленій, о чемъ рѣчь будетъ въ главѣ V.

V. Часто намъ приходилось разсматривать явленіе альтернативной величины n, какъ слѣдствіе сложной дѣятельности въ *массовой* совокупности m операцій O_1, O_2, . . ., O_m, производящихъ перемѣнныя вещественныя величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, независимыя или даже зависимыя.

Операціи O_1, O_2, . . ., O_m пусть черпаются изъ очаговъ техники и природы, дозволяющихъ по данной программѣ въ устанавливающемся процессѣ неопредѣленно увеличивать число m.

Можно въ общей теоріи считать n какою-нибудь данною функціей $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$. Но для простоты будемъ считать n простымъ итогомъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$.

Обозначенія будемъ приспособлять къ равенству:

$$n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m; \quad . . . . . (24)$$

для опредѣленности разсужденія можемъ подразумѣвать въ послѣдующемъ изложеніи задачу о «кассахъ силъ» (см. часть II, § 30).

Среднее ариѳметическое отъ величинъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ есть $\frac{n}{m}$; къ нему примѣняется теорія среднихъ величинъ изложенная въ части II.

Вѣроятность ΔP_n равенства (24) исчисляется какъ съ помощью равенства (1), такъ и съ помощью теоремъ сложенія и умноженія вѣроятностей перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, соображаемыхъ по даннымъ условіямъ

предстоящей дѣятельности операцій $O_1, O_2, \ldots, O_m$. При этомъ величина ΔP_n явится функціей n и числа m операцій. Ради краткости, эту зависимость ΔP_n отъ m не будемъ выражать знакомъ, но будемъ ее подразумѣвать.

Вѣроятность $\Delta_\mu P_\xi$ равенства (9), приводимаго къ виду:

$$n_\sigma + \mu h E_0 \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m - n_\sigma}{\mu h} \right) = \xi, \quad \ldots \quad (25)$$

также будетъ функціей не только ξ, но и весьма большого числа m операцій.

Асимптотическія выраженія вѣроятностей ΔP_n и $\Delta_\mu P_n$ суть тѣ ихъ предѣльныя значенія, въ которыхъ число m возрастаетъ неограниченно, достигая ∞. Но объ этихъ выраженіяхъ пока не будемъ говорить.

Математическое ожиданіе величины

$$\frac{n - n_0}{m} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_m - n_0}{m} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

обозначимъ символомъ ΔM_n; будемъ имѣть:

$$\Delta M_n = \frac{n - n_0}{m} \cdot \Delta P_n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26')$$

Значенія функціи ΔM_n внесемъ въ пятую графу вышеприведенной таблицы I, приспособляя эту таблицу къ условію (24).

Вмѣстѣ съ тѣмъ символомъ $\Delta_\mu M_\xi$ обозначимъ выраженіе:

$$\Delta_\mu M_\xi = \sum_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \Delta M_{n_l} = \sum_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\frac{n_l - n_0}{m} \right) \cdot \Delta P_{n_l}, \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

гдѣ сумма Σ имѣетъ тотъ же смыслъ, какъ въ равенствѣ (7), но при условіи (24), изъ котораго слѣдуетъ равенство (25). Значенія функціи $\Delta_\mu M_\xi$ внесемъ въ пятую графу вышеприведенной таблицы II.

§ 17. Выработка формы индуктивной системы уравненій, сличающей теоретическіе выводы по схемѣ § 16 съ наблюденіями фактическихъ выходовъ. Соображенія о гносеологическихъ бѣдствіяхъ.

I. Въ части II, § 18, обоснована съ помощью теоремы Я. Бернулли индуктивная система уравненій, соотвѣтствующая указанной тамъ сличительной таблицѣ. Эта система, по причинѣ изъяновъ теоремы Я. Бернулли при слишкомъ малыхъ ΔP_n, не всегда примѣнима къ вышеприведенной полной таблицѣ I. Но изъянъ можетъ не распространяться на лакунарную таблицу II, которая, поэтому, имѣетъ цѣнность.

Пусть статистикой зарегистрировано весьма большое число s независимыхъ наблюденій выхода итога n.

Легко опредѣлить статистическую частость $\Delta P_n'$ выхода не только каждаго изъ значеній n, записанныхъ въ строку $(1n)$, но и частость $\Delta_\mu P_\xi'$ выхода каждаго изъ значеній ξ, записанныхъ въ строку (6). Сличительная таблица III содержитъ въ послѣдней графѣ эту функцію $\Delta_\mu P_\xi'$ перемѣннаго ξ, представляющую статистичекую частость.

Таблица III (сличительная).

№ строки.	ξ	Теорет. $\Delta_\mu P_\xi$	Опытн. $\Delta_\mu P_\xi'$
1	ξ_1	$\Delta_\mu P_{\xi_1}$	$\Delta_\mu P_{\xi_1}'$
2	ξ_2	$\Delta_\mu P_{\xi_2}$	$\Delta_\mu P_{\xi_2}'$
3	ξ_3	$\Delta_\mu P_{\xi_3}$	$\Delta_\mu P_{\xi_3}'$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$N-2$	ξ_{N-2}	$\Delta_\mu P_{\xi_{N-2}}$	$\Delta_\mu P'_{\xi_{N-2}}$
$N-1$	ξ_{N-1}	$\Delta_\mu P_{\xi_{N-1}}$	$\Delta_\mu P'_{\xi_{N-1}}$

При весьма большомъ числѣ s статистическихъ записей явленія n можемъ, на основаніи теоремы Я. Бернулли, положить *приблизительно*:

$$\Delta_\mu P_\xi = \Delta_\mu P_\xi', \quad \xi = \xi_1, \quad \xi_2, \ldots, \xi_{N-1} \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

Это сближеніе, основанное на теоремѣ Я. Бернулли, мы называли *индуктивнымъ*, не смѣшивая его съ приближеннымъ же, но *дедуктивнымъ* исчисленіемъ теоретической величины $\Delta_\mu P_\xi$.

Сближеніе это имѣетъ повѣрочное и эвристическое (озаряющее) значеніе, какъ это было разъяснено въ части I, § 18_1. Нужно разъединять первую и вторую части уравненія (43), разсматривая пунктирные графики двухъ уравненій:

$$1)\ y = \Delta_\mu P_\xi \quad \text{и} \quad 2)\ y = \Delta_\mu P_\xi', \quad \ldots \ldots \quad (43')$$
$$\xi = \xi_1, \quad \xi_2, \ldots, \xi_{N-1},$$

и удостовѣряясь въ ихъ «сходимости» или, наоборотъ, «расходимости» (см. объ этой терминологіи въ части I, § 18_1). *Бернулліевскаго изъяна сходимости не будетъ здѣсь, ежели число $\Delta_\mu P_\xi'$ не чрезмѣрно мало.*

II. Если вѣроятности ΔP_n слишкомъ малы, то наступаютъ гносеологическія затрудненія, побуждающія брать $\mu > 1$.

Изъяны теоремы Я. Бернулли, указанные въ части II, § 17, п. III, и наиболѣе рѣзко выраженные соотвѣтственно весьма малымъ значеніямъ вѣроятности p, т. е. почти невѣроятностямъ, заранѣе предрѣшаютъ, что между графиками (43′) не будетъ хорошей «сходимости» при весьма большомъ, но конечномъ числѣ s наблюденій, если $\mu = 1$ и ΔP_n слишкомъ мало.

Это гносеологическое обстоятельство, которое назовемъ «бѣдностью индукціи», и побуждаетъ испытателей природы и общества брать число μ въ таблицахъ II и III болѣе 1, если числа ΔP_n третьей графы таблицы I очень не значительны.

Примѣръ біологическій. «Бѣдность индукціи» имѣла бы мѣсто, напримѣръ, при исчисленіи вѣрояности умереть рождающемуся при достиженіи возраста n, если бы опредѣлять возрастъ n съ точностью до одного часа, располагая матеріаломъ изъ 1.000 наблюденій.

Этотъ примѣръ «бѣдности индукціи» относится къ закономѣрностямъ возрастной послѣдовательности.

Примѣръ топографическій. Въ закономѣрностяхъ же сосуществованія аналогическій примѣръ гносеологическаго изъяна представляется при исчисленіи вѣроятности распространенія даннаго массивнаго явленія (положимъ, этническаго, культурно-экономическаго и проч.) на перемѣнной площади n, если бы приростъ площади измѣрять слишкомъ мелкими географическими дифференціалами Δn, имѣя не слишкомъ значительное число s наблюденій на всей скалѣ n.

Можно привести много примѣровъ подобныхъ гносеологическихъ бѣдствій (голода въ своемъ родѣ) въ случаѣ таксологической задачи кредита и экономіи (см. часть II, §§ 19 — 20) и въ *загадкахъ частно-правовыхъ соотношеній и мысленнаго владѣнія* (см. часть I, § 6_1), юридически прикрѣпленнаго къ гражданскимъ актамъ и къ тарифной скалѣ какого либо налога или выпуска интереса n, вѣроятность котораго имѣетъ графикъ, соотвѣтствующій дифференціаламъ величины n.

Если бы подобныя соображенія о «бѣдности индукціи» не препятствовали уравнивать внесенныя въ таблицу III вѣроятности и частости даже тогда, когда $\mu = 1$, то первыя двѣ графы этой таблицы совпадали бы съ первыми двумя графами таблицы I. При этомъ индуктивныя уравненія (43) получили бы видъ:

$$\Delta P_n = \Delta P_n', \quad n = n_1, \quad n_2, \ldots, n_{a-1} \quad \ldots\ldots (43'')$$

§ 18. Приложеніе метрическихъ округляющихъ операцій къ графикамъ вѣроятностей отдѣльныхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$.

Гносеологическія и технологическія соображенія заставляютъ примѣнять круглыя числа не только къ графику вѣроятности итога $n = \varepsilon_1 +$

$+ \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$, но и къ отдѣльнымъ графикамъ вѣроятностей слагаемыхъ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$. Каждое изъ этихъ слагаемыхъ имѣетъ свою *скалярную дисперсію.*

Сохраняя обозначенія предшествующихъ параграфовъ, разсмотримъ теперь производящія функціи $\varphi_k(z)$ вѣроятностей $\Delta p_k(\varepsilon_k)$ отдѣльныхъ слагаемыхъ ε_k итога n, опредѣляемаго уравненіемъ (24).

Всѣ возможныя (въ апріорномъ сужденіи) значенія перемѣннаго ε_k, выстроенныя по скалѣ въ порядкѣ ихъ возрастанія, пусть будутъ:

$$\varepsilon_k', \quad \varepsilon_k'', \ldots, \varepsilon_k^{(l)}, \ldots, \quad \varepsilon_k^{(a_k-1)} \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

Общую наибольшую мѣру всѣхъ разностей всѣхъ значеній перемѣннаго ε_k обозначимъ чрезъ h_k.

Для ряда перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ получимъ рядъ мѣръ $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Очевидно, существуетъ зависимость мѣры h, вошедшей въ форму (1), отъ мѣръ $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Эта зависимость, изслѣдуемая въ связи съ абсолютными и посредствующими мѣрами, задѣваетъ различные вопросы измѣрительнаго дѣла и соприкасается съ задачами алгебры и теоріи чиселъ. Объ этомъ рѣчь будетъ впереди (см. § 25).

Пусть $p_k(y)$ есть вѣроятность осуществленія неравенства:

$$\varepsilon_k < y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44')$$

Будемъ имѣть по теоремѣ сложенія вѣроятностей:

$$\Delta p_k(\varepsilon_k^{(l)}) = p_k(\varepsilon_k^{(l+1)}) - p_k(\varepsilon_k^{(l)}) \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

Можно вообразить таблицу функцій $p_k(\varepsilon_k)$, $\Delta p_k(\varepsilon_k)$ и $\Delta m_k(\varepsilon_k)$, полагая

$$\Delta_k m(\varepsilon_k) = (\varepsilon_k - \varepsilon_k^{(o)})\, \Delta p_k(\varepsilon_k), \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

гдѣ $\varepsilon_k^{(o)}$ есть математическое ожиданіе перемѣннаго ε_k.

Женератриса $\varphi_k(z)$ вѣроятности $\Delta p_k(\varepsilon_k)$ опредѣлится такъ:

$$\varphi_k(z) = \sum_{l=1}^{l=a_k-1} \Delta p_k(\varepsilon_k^{(l)}) \cdot z^{\varepsilon_k^{(l)}} = \sum_{\varepsilon_k'}^{\varepsilon_k^{(a_k)}} \Delta p_k(\varepsilon_k)\, z^{\varepsilon_k} \quad \ldots\ldots (47)$$

Распространимъ съ небольшимъ обобщеніемъ преобразованіе перемѣннаго n по формулѣ (5) на перемѣнное ε_k; лучше сказать, разсмотримъ аритмологическое преобразованіе перемѣннаго ε_k по формулѣ:

$$e_k = \varepsilon_k^{(\sigma_k)} + \mu_k h_k \cdot E_b\left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_k^{(\sigma_k)}}{\mu_k h_k}\right), \quad \ldots\ldots (48)$$

гдѣ e_k есть новое перемѣнное и, по указанію дирижера, b есть либо 0, либо $-\frac{1}{2}$, далѣе μ_k есть цѣлое число и $\varepsilon_k^{(\sigma_k)}$ есть серединный членъ

строки (44). Это преобразованіе приведетъ къ *упрощенному* ряду, именно къ ряду различныхъ значеній перемѣннаго e_k:

$$e_k', \quad e_k'', \quad e_k''', \ldots, \varepsilon_k^{(N_k-1)}, \quad \ldots\ldots\ldots (48')$$

гдѣ $N_k < a_k$.

Вѣроятность $\Delta_{\mu_k} p_k\,(e_k^{(l)})$, что e_k получитъ значеніе $e_k^{(l)}$, и женератриса $\varphi_k, \mu_k, \sigma_k\,(z)$ такихъ вѣроятностей будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\mu_k} p_k\,(e_k^{(l)}) &= p_k\,(e_k^{(l+1)}) - p_k\,(e_k^{(l)}) = \sum_{e_k^{(l)}}^{e_k^{(l+1)}} \Delta p_k\,(\varepsilon_k), \\ \varphi_{k,\,\mu_k,\,\sigma_k}\,(z) &= \sum_{l=1}^{l=N_k-1} \Delta_{\mu_k} p_k\,(e_k^{(l)})\, z^{e_k^{(l)}} \end{aligned}\right\} \ldots (48'')$$

Преобразованіе по формулѣ (5), § 16 и преобразованія по формуламъ вида (48) при $b = 0$ можно приноровить другъ къ другу такъ, чтобы имѣло силу равенство:

$$n_\sigma = \varepsilon_1^{(\sigma_1)} + \varepsilon_2^{(\sigma_2)} + , \ldots + \varepsilon_m^{(\sigma_m)} \quad \ldots\ldots (49)$$

§ 19. Мономныя, биномныя, триномныя тарификаціи благъ.

Если погрѣшности округленій чѣмъ либо систематически искупаются, то масштабы и формулы (48) — (49) можно выбрать такъ, чтобы полиномы $\varphi_{k,\,\mu_k,\,\sigma_k}\,(z)$ содержали не болѣе даннаго весьма ограниченнаго числа членовъ, напримѣръ, не болѣе двухъ — трехъ; тогда діаграммы вѣроятностей, опредѣляемыя этими упрощенными женератрисами, будутъ содержать не болѣе двухъ — трехъ точекъ, и столько же точекъ будетъ на скалахъ перемѣнныхъ e_k.

Если названные полиномы обратятся въ мономы, то графики будутъ содержать по одной точкѣ; скалы e_k, какъ прямыя линіи, этими точками даже не закрѣпятся, ибо линія опредѣляется по меньшей мѣрѣ двумя точками. Мономные тарифы употребляются при требованіяхъ скораго и упрощеннаго расчета съ публикой, торговаго, фабрично-заводскаго, дорожнаго, почтоваго и проч.

Конечно, погрѣшности этихъ грубыхъ округленій при размѣнѣ благъ должны компенсироваться, выкупаться общимъ благомъ, какъ въ евангельской притчѣ, которая приведена на стр. 86 (въ выноскѣ).

§ 20. Примѣръ систематической валовой погрѣшности массовыхъ округленій и упрощенныхъ расчетовъ.

Въ состязаніяхъ противоположныхъ интересовъ, имѣющихъ цѣлью какую либо выгоду или ренту, массовыя округленія могутъ систематически клонить интересъ въ сторону одной стороны противъ другой стороны.

Примѣръ. *Игроки B и C вносятъ за каждую партію соотвѣтственно ставки β и γ. Въ каждой партіи пусть долженъ представиться одинъ изъ слѣдующихъ трехъ случаевъ, имѣющихъ опредѣленныя вѣроятности: 1) B выиграетъ общую ставку $\beta + \gamma$; 2) C выиграетъ общую ставку $\beta + \gamma$; 3) произойдетъ розыгрышъ партіи въ «ничью», когда каждый остается при своемъ интересѣ. Пусть требуется оцѣнить совокупность интересовъ игрока B для ряда m партій, предполагая, что расчеты за каждую партію округляются.*

Интересъ ε_k игрока B въ отдѣльной партіи подъ нумеромъ k развертывается въ строку типа (44), именно:

$$\varepsilon_k^{(I)} = -\beta \text{ (проигрышъ)}, \quad \varepsilon_k^{(II)} = 0 \text{ (ничья)}, \quad \varepsilon_k^{(III)} = +\gamma \text{ (выигрышъ)} \ldots (50)$$

Вообразимъ при этомъ, что число $\gamma : \beta$ будетъ ирраціональнымъ; слѣдовательно мѣра h_k безконечно мала.

Женератриса $\varphi_k\,(u)$ вѣроятностей $\Delta p_k\,(\varepsilon_k)$ этихъ значеній будетъ трехчленомъ, именно:

$$\varphi_k\,(u) = \Delta p_k\,(-\beta)\, u^{-\beta} + \Delta p_k\,(0) + \Delta p_k\,(\gamma)\, u^{+\gamma} \ldots (51)$$

Женератриса $F\,(u)$ вѣроятностей ΔP_n будетъ:

$$F\,(u) = \varphi_1\,(u)\,\varphi_2\,(u) \ldots \varphi_m\,(u) \quad \ldots\ldots (52)$$

При преобразованіи перемѣннаго ε_k по формулѣ (48) возьмемъ масштабъ:

$$\eta = \mu_k h_k = \frac{\beta}{M},$$

гдѣ M есть цѣлое число.

Если, полагая $\varepsilon_k^{(\sigma_k)} = 0$, будемъ метрически округлять масштабомъ η и операціей $E_b\,(x)$ перемѣнное ε_k, представленное строкою (50), то будемъ имѣть соотвѣтственно членамъ этой строки частныя значенія перемѣннаго e_k, находимыя по формулѣ (48), именно:

$$e_k' = \frac{\beta}{M} \cdot E_b\left(-\beta\,\frac{M}{\beta}\right) = -\beta = \varepsilon_k';$$

$$e_k'' = \frac{\beta}{M} \cdot E_b\left(0 \cdot \frac{M}{\beta}\right) = 0 = \varepsilon_k'',$$

$$e_k''' = \frac{\beta}{M} \cdot E_b\left(\gamma \cdot \frac{M}{\beta}\right) = \frac{M' \cdot \beta}{M}.$$

Погрѣшность $\varepsilon_k - e_k$ будетъ имѣть значенія:

$$\varepsilon_k' - e_k' = 0, \quad \varepsilon_k'' - e_k'' = 0, \quad \varepsilon_k''' - e_k''' = \gamma - \frac{M'}{M}\beta \ldots (53)$$

Отсюда видно, что погрѣшность $\varepsilon_k - e_k$ будетъ имѣть всего *два* различныхъ значенія: 0 и $\gamma - \frac{M'}{M}\beta$; вѣроятности этихъ значеній будутъ соотвѣтственно:

$$\Delta p_k\,(-\beta) + \Delta p_k\,(0) \text{ и } \Delta p_k\,(\gamma).$$

Женератриса $\Phi_k\,(u)$ этихъ вѣроятностей представится такъ:

$$\Phi_k\,(u) = \Delta p_k\,(-\beta) + \Delta p_k\,(0) + \Delta p_k\,(\gamma)\,.\,u^{\gamma - \frac{M'}{M}\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

А производящая функція вѣроятностей ΔP_R валовой погрѣшности

$$R = (\varepsilon_1 - e_1) + \ldots + (\varepsilon_m - e_m)$$

будетъ:

$$\Phi_1\,(u)\,.\,\Phi_2\,(u)\,\ldots\,\Phi_m\,(u).$$

Такъ какъ производящая функція (54) есть биномъ, то къ вычисленіямъ интересовъ, затрагиваемыхъ валовою погрѣшностью R можемъ примѣнять методы, относящіяся къ вѣроятностямъ и явленіямъ, трактуемымъ теоремою Пуассона и ея слѣдствіями. При чемъ на время можно величину $\gamma - \frac{M'}{M}\beta$ принять за 1.

Въ данномъ примѣрѣ, всѣ отличныя отъ нуля значенія, погрѣшности R, какъ показываетъ строка (53), имѣютъ одинъ и тотъ же алгебраическій знакъ, совпадающій съ знакомъ величины $\gamma - \frac{M'}{M}\beta$.

Такимъ образомъ, погрѣшности систематически накопляются противъ одной стороны и въ пользу другой стороны. Вмѣшательство правооборота въ пользу обиженной стороны необходимо, когда бываетъ велика стоимость R_0 валовой погрѣшности R, равная математическому ожиданію R, т. е. суммѣ

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta p_k\,(\gamma)\,.\left(\gamma - \frac{M'}{M}\beta\right).$$

§ 21. Тарификація стоимости валовой и средней погрѣшности массоваго метрическаго округленія отдѣльныхъ отклоненій перемѣнныхъ отъ ихъ среднихъ значеній.

Разсмотримъ въ общемъ видѣ вопросъ объ оцѣнкѣ массива погрѣшностей круглаго счета, широко употребляемаго какъ въ наукѣ, такъ и въ торговлѣ.

Классъ мелкихъ торговцевъ имѣетъ въ этой «валовой ошибкѣ» награду за свой трудъ, какъ разъяснено на стр. 86—87.

Въ массовомъ расчетѣ округленія обычно примѣняются отдѣльно къ каждому изъ отклоненій

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_1^{(\sigma_1)},\quad \varepsilon_2 - \varepsilon_2^{(\sigma_2)},\ \ldots,\quad \varepsilon_m - \varepsilon_m^{(\sigma_m)}$$

перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ отъ срединныхъ членовъ строкъ типа (44).

Предположимъ для простоты, что при этихъ метрическихъ округленіяхъ примѣняется одинъ и тотъ же масштабъ η, который пусть выбранъ такъ:

$$\eta = \mu h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

гдѣ μ есть цѣлое число. Эти округленія соотвѣтствуютъ аритмологическому преобразованію перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ при помощи системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned} e_k &= \varepsilon_k^{(\sigma_k)} + \eta\,.\,E_b\left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_k^{(\sigma_k)}}{\eta}\right) \\ k &= 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

гдѣ, по указанію дирижера, b есть либо 0, либо $-\frac{1}{2}$.

Это преобразованіе подходитъ подъ указанный въ § 18 типъ (48).

Производящая функція $F\,(z)$ вѣроятностей ΔP_n суммы n перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ перейдетъ въ производящую функцію $F\,(\eta, z)$ вѣроятностей Δv_y значеній суммы y перемѣнныхъ $e_1, \ldots, e_m$.

Въ упрощенныхъ расчетахъ сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$ замѣняется суммой $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$; валовая погрѣшность R этой замѣны будетъ:

$$R = (\varepsilon_1 - e_1) + (\varepsilon_2 - e_2) + \ldots + (\varepsilon_m - e_m); \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

средняя погрѣшность $R : m$ будетъ удовлетворять тѣснымъ неравенствамъ:

$$\eta\,.\,b \leqq \frac{R}{m} < \eta\,.\,(1 + b), \quad 0 \geqq b > -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Она не превзойдетъ предѣла $\lambda\,.\,\eta$, гдѣ λ есть наибольшее изъ дробныхъ чиселъ $|b|$ и $1 + b$.

Но при большомъ m и при независимости отдѣльныхъ округленій возможна болѣе тѣсная (льготная) помѣтка предѣловъ погрѣшности R. Помѣтка эта, вмѣстѣ съ надежною тарификаціей стоимости валовой погрѣшности R, производится на слѣдующихъ основаніяхъ, берущихъ въ расчетъ гипотезы и ихъ вѣроятности.

Предположимъ, во-первыхъ, что отдѣльныя погрѣшности $\varepsilon_1 - e_1$, $\varepsilon_2 - e_2, \ldots, \varepsilon_m - e_m$ независимы другъ отъ друга. Это предположеніе часто оправдывается даже при зависимости перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ другъ отъ друга.

Пусть $c_k\,.\,d\xi_k$ есть вѣроятность гипотезы, что погрѣшность $(\varepsilon_k - e_k)$ содержится въ безконечно узкомъ промежуткѣ между ξ_k и $\xi_k + d\xi_k$. Пусть c_k постоянное, т. е. гипотезы равновѣроятны. Женератриса $\phi_k\,(u)$ вѣроятностей $c_k\,.\,d\xi_k$ будетъ:

$$\phi_k\,(u) = c_k\,.\int_{b\,.\,\eta}^{(b+1)\,\eta} u^{\xi_k} d\xi_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Изъ условія $\phi_k\,(1) = 1$ находимъ: $c_k = \frac{1}{\eta}$. Давая числу k значе-

нія 1, 2, . . ., m, получимъ группу женератрисъ: $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, . . ., $\varphi_m(u)$ вѣроятностей погрѣшностей:

$$\varepsilon_1 - e_1 = \xi_1, \quad \varepsilon_2 - e_2 = \xi_2, \ldots, \varepsilon_m - e_m = \xi_m \quad \ldots \ldots (60)$$

Функція же

$$\Phi(u) = \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(u_1) \ldots \varphi_m(u) \quad \ldots \ldots (61)$$

будетъ женератрисой вѣроятностей dP_R того, что валовая погрѣшность R получитъ значеніе, заключенное въ узкомъ промежуткѣ R и $R + dR$, полагая:

$$R = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m \quad \ldots \ldots (62)$$

Вешеприведенныя женератрисы достаточны для опредѣленія математическихъ ожиданій R_0 и G величинъ:

$$R \text{ и } \frac{1}{m}(R - R_0)^2;$$

каковыя ожиданія играютъ роль въ выраженіи теоремы Чебышева (см. часть II). Находимъ:

$$R_0 = m\left(b + \frac{1}{2}\right) \cdot \eta \quad \text{и} \quad G = \frac{1}{12}\ \eta^2 \quad \ldots \ldots (63)$$

При этихъ результатахъ вѣроятность P неравенствъ:

$$-\frac{t\eta}{\sqrt{12}} < \frac{R - R_0}{m} < +\frac{t\eta}{\sqrt{12}}, \quad \ldots \ldots (64)$$

по теоремѣ Чебышева, удовлетворитъ неравенствамъ

$$1 - \frac{1}{mt^2} < P < 1 \quad \ldots \ldots (65)$$

Если положимъ:

$$t = \sqrt{\frac{\log m}{m}},$$

то $\frac{1}{mt^2}$ будетъ стремиться къ нулю при неограниченномъ возрастаніи m, а P должно стремиться къ 1, и, поэтому, при весьма большомъ m почти съ достовѣрностью можемъ надѣяться, что средняя погрѣшность $R : m$ будетъ ограничена выводимыми изъ неравенствъ (64) тѣсными предѣлами:

$$\left(b + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\log m}{12m}}\right)\eta < \frac{R}{m} < \left(b + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\log m}{12m}}\right)\eta \quad \ldots (66)$$

Въ частности при $b = -\frac{1}{2}$, т. е. при «математическомъ» округленіи, средняя погрѣшность $R : m$ ограничивается почти съ достовѣрностью неравенствами:

$$-\eta \cdot \sqrt{\frac{\log m}{12m}} < \frac{R}{m} < +\eta \cdot \sqrt{\frac{\log m}{12m}} \quad \ldots \ldots (67)$$

Величина $m\sqrt{\frac{\log m}{12m}}$ опредѣлитъ достаточный валовой залогъ или запасный капиталъ противъ валовой погрѣшности R. Другой способъ надежной тарификаціи стоимости погрѣшности R можно основать на асимптотическомъ выраженіи вѣроятности dP_R. Вычисленія Лорана *) приводятъ этимъ способомъ къ заключенію, что валовая погрѣшность R почти съ достовѣрностью ограничивается неравенствами:

$$-\eta\sqrt{m} < R < +\eta\sqrt{m} \quad \ldots \ldots (68)$$

Залогъ или запасный капиталъ противъ погрѣшности R при этомъ расчетѣ достаточно припасти въ размѣрѣ $\eta\sqrt{m}$.

Этотъ размѣръ будетъ *тяжелье* предшествующаго размѣра, если $\log m < 12$, и будетъ *легче*, если $\log m > 12$.

Разсмотрѣнную теорію нетрудно распространить на случай погрѣшностей разномаштабнаго округленія перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$.

§ 22. Смежныя по округленію задачи и ихъ методологическое значеніе.

Преобразованіе перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ съ помощью системы уравненій (56) привело первоначально данную задачу къ новой задачѣ о совокупности перемѣнныхъ $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Новую задачу назовемъ относительно данной «смежною по округленію», если масштабъ η до такой степени малъ, что валовою погрѣшностью R, опредѣляемою равенствомъ (57) и оцѣниваемою неравенствами (58), (67) и (68), можно пренебрегать безъ дальнѣйшихъ разсужденій.

Методъ смежныхъ по округленію задачъ, употребляемый въ приближенномъ исчисленіи вѣроятностей и мысленныхъ интересовъ, излагаемомъ ниже, позволяетъ сводить данную задачу объ итогѣ *непрерывныхъ* перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, соотвѣтствующихъ безконечно малымъ мѣрамъ $h_k = d\varepsilon_k$ и $h = dn$, къ другой смежной задачѣ, округляя перемѣнныя съ помощью системы уравненій (56), въ которыхъ масштабъ η есть весьма малая величина порядка не выше даннаго конечнаго числа σ относительно $1 : m$. Слѣдовательно, перемѣнныя $e_1, e_2, \ldots, e_m$ въ послѣдней задачѣ оказываются *прерывными*, хотя и плотно наполняющими правильныя или равномѣрныя скалы (см. часть I, § 14_2). При этомъ достигается однообразіе метода приближеннаго вычисленія какъ для случая прерывныхъ перемѣнныхъ (этотъ случай имѣетъ мѣсто въ примѣрѣ закона большихъ чиселъ Пуассона и вообще въ исчисленіи людей и молекулярнаго множества), такъ и для случая непрерывныхъ перемѣнныхъ (этотъ случай допускается въ анализѣ измѣренія сплошныхъ величинъ,

*) *H. Laurent*: Mathematique statistique, n^0 41.

представляемыхъ графически сплошными тѣлами, поверхностями и линіями).

Можно представить себѣ смежную задачу при многомасштабномъ округленіи перемѣнныхъ

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_1^{(\sigma_1)},\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^{(\sigma_2)},\ \ldots,\ \varepsilon_m - \varepsilon_m^{(\sigma_m)}.$$

§ 23. Распространеніе круглаго счета на теорію взаимоотношеній двухъ, трехъ и болѣе разнородныхъ итоговъ или соотвѣтственныхъ имъ среднихъ.

Выше мы разсматривали варьирующуся вещественную величину n, изображаемую на одномѣрномъ графическомъ пространствѣ или на простой одномѣрной скалѣ. Но теорія взаимоотношеній, изложенная въ главахъ I и II настоящей части, заставляетъ считаться съ группой вещественныхъ неоднородныхъ величинъ и ихъ отдѣльныхъ пересѣкающихся скалъ и съ функціей геометрическаго мѣста ожидаемыхъ точекъ, наполняющихъ или двухмѣрное, или трехмѣрное, или, вообще, $\nu+1$-мѣрное графическое пространство. Исходя отъ статистическаго опредѣленія (по § 4) этого точечнаго тѣла, теорія взаимоотношеній оцѣниваетъ вѣроятностью дисперсію отклоненія Δ, какъ формы, зависящей отъ положенія ожидаемой точки $(x_0, x_1, \ldots x_\nu)$.

Теорію производящихъ функцій и методъ метрическихъ округленій надлежитъ распространить на эти многомѣрныя скалы (графическія тѣла).

Пусть разсматривается $\nu+1$ разнородныхъ итоговъ: n, n', n'', $\ldots$, $n^{(\nu)}$ типа (24). Соотвѣтствующія среднія типа (26) пусть будутъ:

$$x_0 = \frac{n - n_0}{m},\ x_1 = \frac{n' - n'_0}{m'}, \ldots, x_\nu = \frac{n^{(\nu)} - n_0^{(\nu)}}{m^{(\nu)}} \quad \ldots (69)$$

Эти среднія пусть связываются между собою искомымъ приблизительнымъ взаимоотношеніемъ типа:

$$x_0\ (=)\ b + a_1 x_1 + \ldots + a_\nu x_\nu, \quad \ldots\ldots\ldots (70)$$

съ возможностью отклоненія Δ отъ этого закона, открываемаго по указаннымъ въ главѣ I правиламъ наблюденія и исчисленія. Возможности какъ приблизительнаго осуществленія, такъ и неосуществленія равенства (70) оцѣниваются вѣроятностью, какъ это было разъяснено въ главѣ I настоящей части.

Пусть $\Delta P_{n, n', \ldots, n^{(\nu)}}$ есть вѣроятность выхода данной «точки» $(n, n', \ldots, n^{(\nu)})$ въ графическомъ многообразіи варьирующихся итоговъ $n, n', \ldots, n^{(\nu)}$.

Производящая функція этой вѣроятности будетъ:

$$F(u_0, u_1, \ldots u_\nu) = \sum \ldots \sum \Delta P_{n, n', \ldots, n^{(\nu)}} \cdot u_0^{n} u_1^{n'} \ldots u_\nu^{n^{(\nu)}}, \ldots (71)$$

гдѣ многократное суммированіе $\Sigma \ldots \Sigma$ распространяется на всѣ возможныя точки $(n, n', \ldots, n^{(\nu)})$.

Возьмемъ затѣмъ метрически округленныя перемѣнныя $\xi^{(i)}$, опредѣляемыя такъ:

$$\xi^{(i)} = n_{\sigma_i}^{(i)} + \mu_i H_i \cdot E_0 \frac{n^{(i)} - n_{\sigma_i}^{(i)}}{\mu_i H_i}, \quad \ldots\ldots (72)$$

гдѣ μ_i есть цѣлое положительное число, H_i есть общая наибольшая мѣра всѣхъ разностей всѣхъ значеній $n^{(i)}$, входящихъ во вторую часть равенства (71), и $n_{\sigma_i}^{(i)}$ есть среднее изъ значеній n_i.

Вмѣсто перемѣнныхъ n, n', $\ldots$, $n^{(\nu)}$ можемъ разсматривать перемѣнныя ξ, ξ', $\ldots$, $\xi^{(\nu)}$. Вѣроятность выхода «точки» $(\xi, \xi', \ldots, \xi^{(\nu)})$ обозначимъ такъ: $\nabla P_{\xi, \xi', \ldots, \xi^{(\nu)}}$. Женератриса этой вѣроятности будетъ имѣть функціональную связь съ женератрисой $F(u_0, u_1, \ldots, u_\nu)$, при чемъ будемъ имѣть неравенство:

$$\Delta P_{(n), (n') \ldots n^{(\nu)}} < \nabla P_{\xi, \xi', \ldots, \xi^{(\nu)}} \quad \ldots\ldots\ldots (73)$$

Это увеличеніе вѣроятности при переходѣ къ смежной округленной задачѣ благопріятствуетъ приближенности соотвѣтственной частости къ вѣроятности, ибо «бѣдность индукціи» и соотвѣтствующіе изъяны теоремы Я. Бернулли встрѣчаются чаще для слишкомъ малыхъ вѣроятностей, если число наблюденій было велико, но не слишкомъ.

Мы негласно имѣли дѣло съ подобными округленіями въ § 6 при установленіи эмпирической связи между среднимъ ростомъ рекрутъ и среднимъ хозяйствомъ.

Если при большомъ рядѣ отдѣльныхъ наблюденій частость выхода совокупности или «точки» $(\xi, \xi', \ldots, \xi^{(\nu)})$ есть $\nabla P'_{\xi, \xi', \ldots, \xi^{(\nu)}}$, то будемъ имѣть индуктивное уравненіе:

$$\nabla P_{\xi, \xi', \ldots, \xi^{(\nu)}} = \nabla P'_{\xi, \xi', \ldots, \xi^{(\nu)}} \quad \ldots\ldots\ldots (74)$$

Лѣвая часть этого уравненія должна быть приблизительно отождествлена съ правою частью уравненія (III), § 7, предполагая, что

$$dy = dx_0 = \frac{\mu H}{m},\ dx_1 = \frac{\mu_1 H_1}{m'}, \ldots, dx_\nu = \frac{\mu_\nu H_\nu}{m^{(\nu)}}.$$

Итакъ, теорія, абстрактно изложенная въ § 7, можетъ быть обоснована болѣе положительно въ связи съ производящими функціями и метрическими округленіями.

ГЛАВА IV.

Историческія превращенія помѣченныхъ скалъ и графическихъ пространствъ теоріи взаимоотношеній. Мѣры, варьирующіяся по ходу времени, и мѣры незыблемыя. Вѣковыя метрическія измѣненія.

§ 24. Превращенія точечныхъ графическихъ тѣлъ теоріи взаимоотношеній, соотвѣтствующія мысленному (по гражданскимъ актамъ) владѣнію и реализаціямъ его по мѣрѣ развитія событій въ ихъ хронологической послѣдовательности. Рѣшительный фактъ. «Четвертое измѣреніе», принадлежащее здравому смыслу и «театру» исторіи.

Анализъ, намѣченный въ § 15 настоящей части, тѣснѣйше связанъ съ хронологическою послѣдовательностью записываемыхъ фактовъ, вліяющихъ на образованіе или созиданіе точечнаго графическаго тѣла, отмѣчающаго своими точками *дисперсію* возможныхъ выходовъ обсуждаемаго явленія. Въ это созиданіе входитъ, между прочимъ, штриховка каждой скалы даннаго графическаго пространства, дѣлящая ее на *отрѣзки* и помѣчающая черточками соотвѣтствующія значенія варьирующейся вѣроятной величины или итога однородныхъ величинъ.

Отысканіе общихъ наибольшихъ мѣръ этихъ отрѣзковъ равносильно отысканію общихъ наибольшихъ мѣръ разностей значеній соотвѣтствующаго перемѣннаго; эти мѣры, какъ мы видѣли, играютъ большую роль въ графическомъ исчисленіи. Таковы выше уже встрѣчавшіяся намъ общія наибольшія мѣры разностей всѣхъ значеній каждой изъ отдѣльныхъ перемѣнныхъ величинъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ и ихъ спеціальные итоги n. Эти мѣры выше обозначены были соотвѣтственными символами $h_1, h_2, \ldots, h_m$ и h.

Эти мѣры, завися отъ вѣроятностныхъ конъюнктуръ, во времени неустойчивы: послѣ констатированія факта $\sum E_\tau$, обозначеннаго выше въ §§ 14—15, апріорныя мѣры h_k и h хронологически переходятъ въ апостеріорныя аналогическія мѣры, кои обозначимъ соотвѣтственно чрезъ $h_k(\tau)$ и $h(\tau)$.

Будемъ держаться всѣхъ обозначеній § 15 и предполагать, что моментъ τ принадлежитъ одному изъ интерваловъ исторической строки (6), § 15, т. е. $t \leqq \tau \leqq t + \gamma \,.\, \delta\tau$, $t = \tau_0 + k \,.\, \gamma \,.\, \delta\tau$.

Фактъ $\sum E_\tau$, вызвавшій переходъ мѣръ h_k и h въ другія аналогическія величины $h_k(\tau)$ и $h(\tau)$, вызываетъ также варіацію δ вѣроятностей $\Delta p_k(\varepsilon_k)$ и ΔP_n величинъ ε_k и n и варіацію производящихъ функцій $\varphi_k(z)$ и $F(z)$ этихъ вѣроятностей. Варіаціи δ вѣроятностей $\Delta p_n(\varepsilon_k)$ и ΔP_n,

какъ разъяснено ниже, являются истинными виновницами *) перестроенія штриховки скалъ величинъ ε_k и n и виновницами перемѣны количественныхъ значеній h_k и h; эти перемѣны назовемъ *модификаціями* общихъ наибольшихъ мѣръ h_k и h отрѣзковъ $\Delta\varepsilon_k$ и Δn на помѣченныхъ скалахъ величинъ ε_k и n.

Можно иначе назвать эти модификаціи измѣрительными эволюціями.

Отмѣтимъ одинъ рѣшительный моментъ въ измѣрительной эволюціи, подобный «выходу жребія» и «переходу чрезъ Рубиконъ». Когда наступаетъ въ концѣ интервала $(t, t + \gamma \,.\, \delta\tau)$ *рѣшительный фактъ* $\sum E_{t+\gamma \,.\, \delta\tau}$, совершенно опредѣленно констатирующій плоды этого интервала, тогда величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ и n матеріализуются опредѣленными наличностями; соотвѣтствующія вѣроятности переходятъ въ 1 (въ достовѣрности), а вѣроятности прочихъ значеній обращаются въ нули; при сущія вопросу *умѣренныя неопредѣленности* мысленнаго обладанія плодомъ дѣлаются въ этотъ моментъ *мнимыми актами мышленія*, и апостеріорныя мѣры $h_k(t + \gamma \,.\, \delta\tau)$ и $h(t + \gamma \,.\, \delta\tau)$ оказываются *мнимыми графическими символами* (ибо разностей $\Delta\varepsilon_k$ и Δn тогда уже нѣтъ).

Эти мнимые акты мышленія и графической символизаціи, повторяемъ, соотвѣтствуютъ какъ разъ тому моменту, когда ожиданіе плода, de jure чье либо мысленное владѣніе (по юридической доктринѣ, цитированной въ части I, §§ 6_1 и 18_2), реализуется наличными опредѣленными значеніями величинъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$.

Но по порядку, заведенному экономіей природы и человѣческой творческой мысли, въ моментъ $t + \gamma \,.\, \delta\tau$ совершается другая, *противоположная* предыдущей, измѣрительная эволюція, соотвѣтствующая отпуску владѣющимъ субъектомъ *опредѣленной* рискуемой матеріальной цѣнной наличности въ кредитный активъ на слѣдующій интервалъ $(t + \gamma\delta\tau, t + \gamma\delta\tau + \delta\tau)$, съ умѣренною *неопредѣленностью* будущаго расквитыванія въ концѣ этого интервала.

Мнимыя неопредѣленности становятся опять дѣйствительными на новый срокъ; наоборотъ, совершенная опредѣленность и ея критеріи и мѣры становятся мнимыми и обманными, какъ обманчивъ неубитый медвѣдь, котораго охотники подѣлили между собою.

Когда «занавѣсъ» театра исторіи, наблюдавшаго дѣйствіе періода $(t, t + \gamma\delta\tau)$, опустился, тогда почти тотчасъ на тѣхъ же топографиче-

*) Онѣ (варіаціи) соотвѣтствуютъ различнымъ умственнымъ рефлексамъ на раздраженіе со стороны извнѣ привходящихъ фактовъ, причемъ этого рода рефлексы содержатъ въ себѣ самостоятельную критическую тарификацію дальнѣйшихъ возможностей, а не простое психическое *переживаніе* ощущенія x отъ внѣшняго раздраженія y, трактуемое *Вундтомъ* и другими психофизіологами (см. *Д. Мордухай-Болтовской*: Математическія и умозрительно-философскія изслѣдованія основного психофизическаго закона. Варшава, 1907).

скихъ сценахъ или аренахъ дѣятельности «занавѣсъ» театра исторіи вновь открывается для наблюденія дѣятельности и плодовъ слѣдующаго періода исторической строки (6), § 15.

Описанныя графическія метаморфозы, прямыя и обратныя, совершающіяся какъ въ записяхъ головнаго мозга, такъ и въ записяхъ учрежденій, хроникъ, конторъ, статистическихъ листковъ и сводныхъ графическихъ тѣлъ теоріи взаимоотношеній, назовемъ *Бутлеровскими*; ибо академикъ Бутлеровъ, а также Вильямъ Клиффордъ, Фехнеръ, Хинтонъ и др. описывали подобныя метаморфозы. Примѣры ихъ относятся къ различнымъ пространствамъ, именно — какъ къ *сплющиванію* пространства $k+1$ измѣреній въ пространство k измѣреній, такъ и, наоборотъ, къ *развитію* пространства k измѣреній въ пространство $k+1$ измѣреній.

Мы, съ своей стороны, относимъ наши метаморфозы къ вѣроятностной конъюнктурѣ точечныхъ тѣлъ теоріи взаимоотношеній, причемъ разъ навсегда отбрасываемъ всю софистику, которой много набралось вокругъ вопроса о «четвертомъ» измѣреніи и о «кривизнахъ» физическаго пространства; а спиритуализмъ, хорошій по идеологіи, мы связываемъ съ *живою* вѣрою народнаго множества въ свои истинные палладіумы, съ критеріями сродства и любви, съ учетною дѣятельностью статистики и политической экономіи, съ учетною дѣятельностью *вспомогательныхъ* банковъ, съ «кривизною» покровительственныхъ народной экономіи тарифовъ, съ философіей вѣры, знанія, опытовъ исторіи и правомѣрія.

Теряемое и, наоборотъ, выигрываемое «четвертое» измѣреніе, которое играетъ роль въ нашемъ «театрѣ» исторіи и въ нашей интуиціи (умозрѣніи, міросозерцаніи), представляется вѣроятностью, какъ умственною (въ записяхъ души и ея головного мозга) и красочною (въ записяхъ на картонѣ) графическою координатою. При совершенной опредѣленности, когда имѣетъ силу непререкаемая достовѣрность, это конвульсивное измѣреніе теряется; его сплошная скала, протянутая въ предѣлахъ отъ 0 до 1, опустошается, кромѣ той или другой изъ двухъ крайнихъ точекъ: 0 и 1 этой протяженности.

Ради простоты мы брали, въ связи со скалою вѣроятности ΔP_n, лишь одномѣрную скалу варьирующагося вещественнаго спеціальнаго итога $n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m$. Но нетрудно распространить все сказанное на $\nu+1$ — мѣрную скалу соединенной группы различныхъ варьирующихся величинъ, связываемыхъ другъ съ другомъ при помощи теоріи взаимоотношеній, въ порядкѣ какъ сосуществованія, такъ и послѣдовательности; ибо къ этой сложной скалѣ также должна быть примкнута конвульсивная, $\nu+2$-ая скала вѣроятности Z отклоненія Δ (см. §§ 7 и 23).

Графическія тѣла мы держимъ въ умѣ, а также въ записяхъ головного мозга и въ памяти сознанія (см. Предисловіе). Истинное «четвертое

измѣреніе», слѣдовательно, соотвѣтствуетъ не физическому зрѣнію, а здравому смыслу, жизни мысли, ея духовному зрѣнію, непосредственному чувству довѣрія, вѣчно борющемуся за рожденіе опредѣленностей изъ волнъ неопредѣленностей и загадокъ; оно «четвертое измѣреніе», не сказка, а быль мышленія *).

Тутъ примѣнима логика сужденій неопредѣленнаго анализа (см. выше, § 3), кои ограничиваютъ каноническими скалярными предѣлами каждый гражданскій *типъ* «мысленнаго обладанія», «углы зрѣнія», размахъ реальныхъ возможностей и пр. Сплющиваніе графическаго тѣла соотвѣтствуетъ превращенію въ нуль угла зрѣнія на соотвѣтствующую *ограниченную* скалу.

Движеніе штриховъ графическихъ тѣлъ, дающее отчетъ о происходящемъ и о курсахъ ожидаемаго, подобно игрѣ наружныхъ чертъ лица, вызываемой сложными внутренними и внѣшними причинами (рефлексія); назовемъ это движеніе *рефлекторнымъ*.

Съ рефлекторными движеніями графическихъ тѣлъ связано множество *конъюнктуръ* и *интуицій* въ области познаваемыхъ взаимоотношеній, гдѣ вѣроятія являются связкой вещей. Такова, напримѣръ, область взаимоотношеній (сродства): 1) идей и направляемой по идеямъ дѣятельности $\sum E_\tau$ въ кооперації ($O_1\ O_2\ \ldots\ O_m$); 2) этой дѣятельности $\sum E_\tau$ и ея плодовъ $\sum n$, возстановляющихъ издерживаемыя реальныя наличности; 3) тѣхъ же идей и обезпеченія вѣчной очередной повторяемости процесса (амортизація процесса), по чему во взаимоотношеніе включается резервъ или страховая наличность S, гарантирующая *устойчивость* и цѣлесообразную *мягкость* процесса исторіи.

Интуиціи этого рода помогаютъ надлежащей тарификаціи стоимостей и обложеній и цифровымъ опредѣленіямъ по каждой скалѣ коэффиціентовъ разсмотрѣнной въ части II «кривизны» формулы нравственнаго ожиданія (см. также нашу книгу: «Матем. статистика»), т. е. покровительственной таксологической нормы, распространяемой всюду, гдѣ это покрытіе жизненно необходимо.

Ключи, съ помощію которыхъ можно *прочитать* символическій смыслъ скалъ графическаго пространства и смыслъ рефлекторныхъ движеній графическихъ тѣлъ, даваемыхъ статистикой государства, связаны съ до-

---

*) Общеизвѣстныя попытки Хинтона при помощи комбинаціи развертывающихся и свертывающихся кубовъ отвлечь субъективное сознаніе ребенка отъ окружающихъ впечатлѣній и перекинуть его въ область транссубъективнаго сознанія, помѣщающагося какъ бы въ направленіи четвертаго измѣренія, будутъ понятнѣе, если эта школа соединитъ свои пріемы съ приборами (какъ урна) и элементарными методами исчисленія вѣроятностей, проникающими въ область чужого субъективнаго и транссубъективнаго, какъ въ закрытую урну, и вовсе нечуждыми дѣтскому мышленію.

вѣріемъ. Кое что важное изъ ритуаловъ этого исчисленія должно быть скрываемо до поры отъ непріятельскихъ лагерей. О необходимости подобныхъ секретовъ учили пиѳагорейцы. Ганнибалъ міроваго состязанія почти всегда бываетъ у воротъ.

§ 25. Связь между незыблемыми мѣрами и варьирующимися мѣрами. Вѣковыя измѣненія хлѣбной стоимости денегъ и другихъ мѣръ.

I. Будемъ держаться обозначеній §§ 16—19.

Лемма I. *Пусть* a_m *есть общая наибольшая мѣра мѣръ* $h_1, h_2, \ldots, h_m$. *При этомъ обозначеніи должно существовать уравненіе*:

$$h = s_m \cdot a_m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ s_m *есть цѣлое число, обращающееся обязательно въ 1, если перемѣнныя* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *независимыя.*

Эта лемма для независимыхъ перемѣнныхъ легко доказывается съ помощію уравненій (2), § 16, и (47), § 18, и тождества:

$$F(z) = \varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \ldots \varphi_m(z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

имѣющаго силу при независимости перемѣнныхъ.

Затѣмъ лемма легко распространяется на зависимыя перемѣнныя.

Разсматривая устанавливающуюся сложную операцію $(O_1\ O_2 \ldots O_m)$ съ неограниченно возрастающимъ числомъ m операцій O, черпаемыхъ изъ природы, можемъ искать предѣлъ a_m при возрастаніи m до ∞. Предѣлъ этотъ a_∞ обозначимъ чрезъ a, считая мѣру a мельчайшею или недѣлимою единицей.

Мѣры h, h_1, $h_2, \ldots, h_m$ будемъ называть *молекулами* (въ переносномъ смыслѣ, а иногда въ подлинномъ смыслѣ, относящемся къ тѣламъ органической и неорганической химіи).

Наиболѣе заботъ доставляютъ мѣры посредствующія символическія, смыслъ которыхъ связанъ съ цѣлями, лежащими *внѣ* символа (надъ нимъ или подъ нимъ). Эти мѣры имѣютъ чисто графическое происхожденіе; онѣ точны, если примѣняются къ дѣлу графическія тѣла теоріи взаимоотношеній, соотвѣтствующія большой статистикѣ, примѣненной къ элементарнѣйшимъ явленіямъ, и если обезпечена старательность дирижеровъ о томъ, чтобы значеніе основной символической единицы относительно достиженія ею соотвѣтствующей главной цѣли, по возможности, не колебалось. При отсутствіи этой устойчивости символическія мѣры легко обращаются въ міровое зло. Худо, напримѣръ, то, что современный золотой рубль по отношенію къ хлѣбу насущному дешевле 40 копѣекъ середины прошлаго столѣтія; въ этой міровой неустойчивости скрыты роковыя слѣдствія логическаго cirlulus vitiosus восхваляемой современной горе—цивилизаціи; причина ихъ — графическія ошибки финансоваго измѣренія полной стоимости труда; тутъ гнѣздится міровая ложь королей всемірнаго капитализма и его спутника, соціалистическаго пролетаріата.

Систематическая борьба съ этимъ міровымъ зломъ возможна при *единствѣ* (связи) всѣхъ составныхъ частей диффенцированнаго кооперативнаго движенія и при помощи: 1) государственной монополіи выпуска бумажныхъ и металлическихъ денегъ, 2) прямого подоходнаго налога, 3) прямого государственнаго кредита землѣ и народному труду черезъ сѣть государственно-національныхъ банковъ, 4) застрахованія въ составѣ стоимости труда всей трудоспособности страны за счетъ торговой выручки предпринимителей. Программу этой борьбы намѣчаетъ наша книга: «Математическая статистика» и такіе своды данныхъ по вопросу, какъ книги проф. *В. Г. Яроцкаго* *): «Страхованіе рабочихъ въ связи съ отвѣтственностію предпринимателей» (С.-Петерб., 1895).

Историку интересны вѣковыя колебанія хлѣбной стоимости денегъ, труда и другихъ мѣръ, натуральныхъ, кредитныхъ и символическихъ.

Въ періодѣ устойчивости основной мѣры a будемъ имѣть вообще:

$$a_m = \nu_m \cdot a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ ν_m есть цѣлое число, которое въ предѣлѣ при неограниченномъ возрастаніи m должно свестись къ 1 въ силу опредѣленія единицы a.

Отсюда и изъ леммы I вытекаетъ такое слѣдствіе.

Слѣдствіе. *Введемъ обозначенія:*

$$\alpha = h : a, \quad \alpha_1 = h_1 : a, \quad \alpha_2 = h_2 : a, \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 : \nu_m, \quad \beta_2 = \alpha_2 : \nu_m, \ldots, \beta_m = \alpha_m : \nu_m \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

---

*) Изъ числа «Положеній» диссертаціи В. Г. Яроцкаго приведемъ слѣдующія: I. Страхованіе рабочихъ въ своемъ современномъ видѣ явилось результатомъ развитія слѣдующихъ *трехъ* основаній: 1) вспомоществованія нуждающимся въ формѣ общественнаго призрѣнія, 2) отвѣтственности предпринимателей по отношенію къ работающимъ у нихъ лицамъ и 3) взаимопомощи лицъ однородныхъ занятій. II. Общее экономическое основаніе современнаго страхованія рабочихъ и связанной съ нимъ отвѣтственности предпринимателей должно быть сводимо къ слѣдующему положенію: *въ составѣ издержекъ предпріятій должна вполнѣ воспроизводиться стоимость труда рабочихъ* не только во время работы, но и въ случаѣ потери способности къ труду отъ различныхъ причинъ. X. Результаты развитія учрежденій для взаимопомощи и затѣмъ свободнаго страхованія рабочихъ оказались *недостаточными* какъ тамъ, гдѣ все это дѣло было предоставлено на собственную инціативу рабочихъ (Англія), такъ и тамъ, гдѣ (какъ во Франціи) были учреждаемы государственныя кассы добровольнаго страхованія жизни, пенсій и отъ несчастныхъ случаевъ. XII. Современное всеобщее и *обязательное страхованіе* рабочихъ въ его видахъ, практикуемыхъ въ Германіи, *приближаетъ* это дѣло къ осуществленію основного экономическаго требованія—воспроизведенію въ составѣ издержекъ предпріятій стоимости труда рабочихъ.

Числа α, α_1, $\alpha_2, \ldots$, β_1, $\beta_2, \ldots$, β_m *цѣлыя, и притомъ общій наибольшій дѣлитель чиселъ* β_1, $\beta_2, \ldots$, β_m *есть 1.*

Послѣднее заключеніе оправдывается равенствами $\beta_k = h_k : a_m$ и опредѣленіемъ мѣры a_m.

Условимся далѣе строки $(1n)$, § 16, и (44), § 18, опредѣляющія перемѣнныя n и ε_k, называть правильными, если онѣ представляютъ ариѳметическія прогрессіи. Если же строка $(1n)$ не представляетъ ариѳметической прогрессіи, то совокупность тѣхъ значеній n_l пунктирной скалы n, для которыхъ разность $n_{l+1} - n_l$ или Δn_l болѣе h, назовемъ *рѣшетомъ* (аналогично Эратосфенову рѣшету). При этой терминологіи можемъ высказать слѣдующія леммы.

Лемма II. *Если всѣ строки, получаемыя изъ строки* (44), § 18, *давая числу* k *значенія*: 1, 2, ..., m, *будутъ правильными и если*

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

то строка $(1n)$, § 16, *не будетъ имѣть рѣшета, пока перемѣнныя* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *остаются независимыми; при зависимости же перемѣнныхъ этого утверждать нельзя.*

Лемма III. *Если между мѣрами* $h_1, h_2, \ldots, h_m$ *существуютъ неравныя, то въ случаѣ независимыхъ перемѣнныхъ* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *строка* $(1n)$, § 16, *будетъ имѣть рѣшето; при зависимости же перемѣнныхъ этого утверждать нельзя.*

Доказательства этихъ леммъ основываются на леммѣ I и на существованіи равенства $(1')$ для случая независимыхъ перемѣнныхъ.

II. Историческая статистика должна и можетъ выслѣживать *вѣковыя измѣненія* хлѣбной стоимости золотой денежной единицы; она можетъ выслѣживать вѣковыя измѣненія и другихъ кредитныхъ и символическихъ мѣръ, а также среднихъ антропологическихъ единицъ (типовъ) въ связи съ измѣненіями какъ соціальныхъ условій, такъ и внѣшней природы, т. е. почвы, климата, флоры, фауны, солнечнаго лученспусканія и пр.

Вѣковыя измѣненія метеорологическихъ и космическихъ (астрономическихъ, геологическихъ) среднихъ единицъ незамѣтны въ обыденномъ смыслѣ, но также существуютъ, давая о себѣ знать черезъ тысячи лѣтъ. Измѣняются экваторъ и меридіаны, широты и долготы мѣстъ. Вмѣстѣ съ этими измѣненіями и у неумирающаго человѣчества незамѣтно измѣняются потребности и представленія о небѣ, землѣ, пространствахъ: физическомъ и графическомъ, рѣшительно зависящія отъ типическихъ мѣръ, принимаемыхъ будто бы за незыблемые инваріанты.

Истинно незыблемыя мѣры, инваріанты и представленія мыслятся лишь у вѣчнаго Всевидящаго Существа, Бога исторіи. Для человѣчества будущихъ вѣковъ новое небо и новая земля могутъ наступить съ боль-

шею или меньшею плавностью или, наоборотъ, катастрофальностью, что зависитъ отъ плановъ Всевидящаго; отъ человѣка же зависитъ, угадывая эвристическимъ и метеорологическимъ методомъ пути Творца, устроить землю и взаимоотношенія на ней.

§ 26. Продолженіе изслѣдованія измѣрительной модификаціи при хронологическомъ раскрытіи итожнаго явленія $\Sigma\varepsilon$ подъ дѣйствіемъ сложнаго текущаго факта ΣE_τ.

При дальнѣйшемъ обсужденіи поставленнаго въ § 24 вопроса объ измѣрительной эволюціи, протекающей въ сложной наблюдаемой операціи $(O_1 O_2 \ldots O_m)$, будемъ различать два случая: 1) *простую* и 2) *сложную* измѣрительную модификацію. Эти случаи различаются такъ. Въ сложной измѣрительной модификаціи правилами конъ-юнктуры (союза) допускается измѣненіе числа m операцій, т. е. допускаются *включенія* и *выключенія* операцій O. Въ простой измѣрительной модификаціи, напротивъ, отнюдь не допускается измѣненіе числа m операцій отъ начала и до конца срока $(t, t + \gamma\delta\tau)$ выработки плода $n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$.

Простую и сложную модификацію мѣръ явленія n подъ дѣйствіемъ текущаго факта ΣE_τ разсмотримъ отдѣльно.

I. Возьмемъ сначала простую модификацію мѣръ h_k и h. Число m операцій O и ихъ наличный составъ въ теченіе вышеуказаннаго интервала $(t, t + \gamma\delta\tau)$ по условію остаются абсолютно неизмѣнными. Въ процессѣ происходитъ лишь *простой* выходъ (тиражъ) очередныхъ явленій, обусловливающихъ величину n.

Разсматривая метаморфозу, происходящую въ этомъ случаѣ подъ дѣйствіемъ факта ΣE_τ, соотвѣтствующаго среднему моменту τ между t и $t + \gamma\delta\tau$, будемъ отмѣчать тѣ значенія перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ и ихъ итога n, записанныхъ въ строки (44), § 18, и $(1n)$, § 16, кои становятся рѣшительно безнадежными или невозможными. Соотвѣтствующія вѣроятности безнадежныхъ значеній дѣлаются чистыми (абсолютными) нулями. Вычеркиваніе соотвѣтствующихъ членовъ строкъ $(1n)$, § 16, и (44), § 18, разрѣживаетъ символы въ строкахъ и помѣтки на штрихованныхъ скалахъ соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ. Назовемъ эти разрѣженныя строки *остаточными*. Въ индуктивной логикѣ онѣ соотвѣтствуютъ «методу остатковъ».

Общая наибольшая мѣра h разностей значеній перемѣннаго n послѣ упомянутаго вычеркиванія безнадежныхъ значеній изъ строки $(1n)$, § 16, можетъ оказаться либо неизмѣнною, либо измѣниться *скачкомъ*, и въ этомъ послѣднемъ случаѣ она *обязательно увеличится въ цѣлое число* D *разъ*, т. е. будетъ:

$$h(\tau) = D \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Это измѣрительное явленіе (которое я отмѣтилъ впервые въ «Новыхъ основаніяхъ ученія о вѣроятностяхъ суммъ и среднихъ величинъ») составляетъ характерную способность простого тиража и простой измѣрительной модификаціи.

Мѣра $h(\tau)$, равная $D \cdot h$, будетъ соотвѣтствовать женератрисѣ $F(z, \tau)$ неаннулированныхъ вѣроятностей $\Delta P_{n,\tau}$; значенія перемѣннаго n будутъ принадлежать остатку строки $(1n)$, § 16. Соотвѣтствующій фактъ ΣE_τ назовемъ *критическимъ* и притомъ *нерѣшительнымъ*, ибо мы предполагаемъ: $t < \tau < t + \gamma\delta\tau$; а рѣшительный критическій моментъ наступитъ позже, при совпаденіи τ съ концомъ срока $(t, t + \gamma\delta\tau)$.

Обозначимъ черезъ $f_{D,\nu}(z, \tau)$ функцію, получаемую при цѣломъ ν, содержащемся въ ряду чиселъ: 0, 1, 2, ..., $D-1$, изъ функціи $F(z, \tau)$ такъ, какъ функція $f_{D,\nu}(z)$ получается по § 16 изъ функціи $F(z)$. При этомъ обозначеніи можемъ высказать слѣдующую теорему.

Теорема I. *Въ случаѣ простой модификаціи неустойчивыхъ мѣръ* h_k *и* h, *мѣра* h *подъ дѣйствіемъ наступившаго критическаго нерѣшительнаго факта* ΣE_τ *увеличивается всегда*

въ цѣлое число D разъ, и если при этомъ n_σ есть членъ строки (1n), § 16, сохранившійся также и въ остаточной строкѣ, то вообще въ остаточной строкѣ могутъ сохраниться лишь такія изъ значеній перемѣннаго n, для которыхъ имѣетъ силу сравненіе:

$$\frac{n - n_\sigma}{h} \equiv 0 \text{ (мод. } D) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ числа функцій $f_{D,0}(z, \tau)$, $f_{D,1}(z, \tau)$, …, $f_{D,D-1}(z, \tau)$ лишь функція $f_{D,0}(z, \tau)$ не обратится въ нуль и совпадетъ съ $F(z, \tau)$; остальныя же обратятся въ абсолютный нуль.

Предположимъ теперь, что наступилъ рѣшительный моментъ $\tau = t + \gamma\delta\tau$ для матеріальнаго констатированія плода *n*. Въ этотъ критическій моментъ остаточная строка, выводимая вычеркиваніями безнадежныхъ членотъ изъ строкн (1n), § 16, обратится въ одинъ и только одинъ членъ n_σ, и женератриса $F(z, \tau)$ предстанится *одночленомъ* z^{n_σ}, причемъ мѣра $h(\tau)$ сдѣлается мнимою въ вышеуказанномъ Бутлеровскомъ смыслѣ (см. стр. 492).

II. Возьмемъ теперь *сложную* модификацію мѣръ h_k и h, протекающую въ операціи $(O_1 O_2 \ldots O_m)$ въ періодѣ $(t, t + \gamma \cdot \delta\tau)$.

Осложненіе состоитъ въ томъ, что наличный составъ и число *m* простыхъ операцій *O*, соединенныхъ въ кооперацію, не остается въ теченіе интервала $(t, t + \gamma \cdot \delta\tau)$ постояннымъ; допускается по опредѣленному уставу свобода выключенія и включенія простыхъ операцій, комплектуемыхъ изъ ихъ кандидатскаго списка $O_1, O_2, O_3, \ldots$ Пріурочимъ эти измѣненія къ началамъ интерваловъ типа $(\tau, \tau + \delta\tau)$, на которые разбивается долгосрочный интервалъ $(t, t + \gamma \cdot \delta\tau)$, предполагая, что въ серединѣ короткихъ интерваловъ $(\tau, \tau + \delta\tau)$ наличный составъ и число *m* операцій неизмѣнны. Поэтому число *m* будетъ опредѣляться правилами конъюнктуры къ началамъ интерваловъ $(\tau, \tau + \delta\tau)$ и будетъ получать по порядку короткихъ нтерваловъ слѣдующія γ значеній:

$$m_1, m_2, \ldots, m_\gamma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

между которыми будутъ различныя.

Включеніе и выключеніе операцій *O* будемъ относить къ дѣятельности ΣE_τ, которая регистрируется журналомъ счетчика вмѣстѣ съ издержками этого порядка. Тутъ происходитъ *усложненный* тиражъ не только явленій, но и самихъ операцій *O*.

Условія измѣненія числа *m* часто опредѣляются природою конъюнктуры. Многолѣтнее древесное насажденіе ежегодно приращаетъ новый слой древесины къ прежнимъ слоямъ, и этотъ новый слой затѣмъ начинаетъ во всю свою жизнь ежегодно работать для дерева въ кооперацiи съ прежде образовавшимися слоями.

Ежегодный приростъ населенія представляетъ аналогическое явленіе въ жизни территоріальной сложной единицы, называемой національнымъ государствомъ.

Измѣненію числа *m* соотвѣтствуютъ скала *m* и конечныя разности:

$$\Delta m_k = m_{k+1} - m_k, \quad k = 1,2, \ldots, \gamma - 1.$$

Подъ дѣйствіемъ факта ΣE_τ, соотвѣтствующаго среднему моменту τ, содержащемуся между *t* и $t + \gamma\delta\tau$, составъ и число строкъ типа (44), § 18, измѣняются, и сохранившіеся члены въ старыхъ строкахъ рѣдѣютъ, образуя остаточныя строки послѣ вычеркиванія безнадежныхъ значеній соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ въ каждой строкѣ. Но свѣжія строки обновляютъ процессъ. Строка (1n), § 16, при этихъ метаморфозахъ перестроивается по болѣе сложному правилу, нежели въ случаѣ простой измѣрительной модификаціи; вслѣдствіе включенія и выключенія слагаемыхъ всѣ значенія итога *n* обновятся вмѣстѣ съ ихъ вѣроятностями. Апріорная мѣра *h* послѣ всѣхъ метаморфозъ либо останется неизмѣнною, либо пріобрѣтетъ новое значеніе $h(\tau)$, которое будетъ имѣть видъ:

$$h(\tau) = \frac{D}{D'} \cdot h, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

гдѣ *D* и *D'* суть цѣлыя взаимно простыя числа. Фактъ ΣE_τ, вызвавшій подобное измѣненіе неустойчивой мѣры *h*, опять назовемъ нерѣшительнымъ *критическимъ* въ обсуждаемой измѣрительной эволюціи.

Теорема II. *Отношеніе D : D', вошедшее въ уравненіе (9), въ случаѣ сложной измѣрительной модификаціи подъ вліяніемъ критическаго нерѣшительнаго факта ΣE_τ можетъ быть то цѣлымъ (если D' = 1), то дробью, иногда правильною, иногда неправильною.*

Сказанное относится къ среднему моменту τ интервала $(t, t + \gamma \cdot \delta\tau)$.

Если же моментъ τ совпадаетъ съ концомъ $t + \gamma\delta\tau$ интервала, то мысленный плодъ *n* матеріализуется, окончательно опредѣляемый соотвѣтствующимъ рѣшительнымъ критическимъ фактомъ ΣE_τ, женератриса $F'(z, \tau)$ дѣлается одночленомъ z^{n_σ}, а мѣра $h(\tau)$ альтернативъ перемѣннаго *n* становится бутлеровски мнимою; занавѣсъ «театра» опускается, но тотчасъ открывается занавѣсъ для разсмотрѣнія послѣдующаго новаго дѣйствія въ интервалѣ $(t + \gamma\delta\tau, t + 2\gamma\delta\tau)$.

Дѣйствительныя модификаціи мѣръ h_k и *h* въ перемежку съ мнимыми бываютъ лишь при $\gamma > 1$. Если же $\gamma = 1$, то имѣетъ мѣсто долгосрочный многоплодный процессъ, разбивающійся на краткосрочные одноплодные процессы и недопускающій иной модификаціи мѣръ h_k и *h*, кромѣ перехода прямо въ мнимыя значенія въ концѣ каждаго интервала.

Время τ вообще разбивается на атомы $(\tau, \tau + \delta\tau)$ и на молекулы $(t, t + \gamma\delta\tau)$. Счетъ молекулъ времени зависитъ отъ природы плодовъ, а счетъ атомовъ зависитъ отъ природы импульсовъ дѣятельности. Приспособленіе и ритмъ, какъ мысленный, такъ и физическій, мускульный, въ этомъ распорядкѣ играютъ большую роль.

ГЛАВА V.

Асимптотическія представленія вѣроятностей спеціальныхъ итоговъ и соотвѣтственные типы кривыхъ вѣроятности. Черезполосица доказательствомъ оправданныхъ и произвольно взятыхъ кривыхъ частости. Кривая смертности и пять возрастовъ жизни.

§ 27. Вѣроятностная функція весьма большого числа *m* импульсовъ, опредѣляющихъ соотвѣтствующій итогъ. Общій планъ исканія асимптотическаго представителя этой функціи, опредѣляющаго элементарные типы кривой вѣроятности.

I. Въ настоящей главѣ мы будемъ искать элементрныя «кривыя вѣроятности» или аналитическія «графическія закономѣрности», отличіе которыхъ отъ закона большихъ чиселъ разъяснено въ части II, §§ 22 и 26. Эти кривыя (напримѣръ, кривая смертности по возрастамъ *x*) ставятся на мѣсто «пунктировъ вѣроятности» или «полигоновъ вѣроятности» и играютъ важную роль въ приближенномъ интерполированіи и аналитическомъ представленіи связи между рядомъ *поводовъ* (импульсовъ), включающимъ и *рѣшительный фактъ* (стр. 491), и ихъ общимъ сѣдствіемъ, выражающимся въ итожномъ результатѣ; при чемъ спеціализація задачи

опредѣляется соотвѣтствующей *идеей* изслѣдуемой закономѣрности и родомъ дѣйствующихъ операцій, кои относительно другъ друга могутъ быть какъ зависимыми, такъ и независимыми.

Каждую спеціальную идею, отмѣченную тенденціей къ вещественному итогу x (напримѣръ, идею смерти человѣка по прожитіи итога x лѣтъ; идею выпуска актива $x = \Sigma E$ дѣятельностей E, требуемыхъ на данный срокъ предпріятіемъ; идею выращиванія и выработки массоваго плода x; идею передвиженія тѣла на разстояніе x и т. д.), будемъ связывать съ соотвѣтствующею одномѣрною скалою варьирующагося вещественнаго итога x, которому соотвѣтствуетъ вѣроятность Δv_x, отмѣчаемая на другой скалѣ. Это методологически основной всеобщій пріемъ изслѣдованія законовъ общественности, если его связывать съ установившимися дифференціаціями Всего, какъ разъяснено въ Предисловіи.

Если значеніе x возведено въ достоинство величины, измѣримой мѣрами либо физическими, либо символическими (графическимъ исчисленіемъ), то можно представить себѣ женератрису $\Pi(z)$ вѣроятности Δv_x, именно:

$$\Pi(z) = \sum \Delta v_{x_l} z^{x_l}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ сумма распространяется на рядъ:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{b-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

всевозможныхъ значеній x, расположенныхъ въ возрастающемъ порядкѣ. Эти обозначенія отождествимъ съ тѣми, кои установлены въ § 16, п. IV, при чемъ равенство (20) изъ этого § приведетъ къ формулѣ:

$$\Delta v_x = \frac{h'}{2\pi} \int_{-\pi w'}^{+\pi w'} \psi^m(z)\, dz, \quad w' = \frac{1}{h'}, \; i = \sqrt{-1}, \ldots\ldots (2)$$

$$\psi(z) = \{\Pi(ue^{zi})\ (ue^{zi})^{-x}\}^{\frac{1}{m}}, \quad \ldots\ldots\ldots (2')$$

гдѣ m есть большое число тѣхъ активныхъ вліяній или импульсовъ (операцій), независимыхъ или же зависимыхъ, кои должны дать итогъ x въ одномъ изъ значеній (1′).

Обозначеніе $\psi(z)$ ставитъ на видъ зависимость интеграла (2) отъ этого числа m, весьма большого и способнаго возрастать въ предѣлѣ неограниченно; тогда и только тогда возможно говорить объ асимптотическихъ или предѣльныхъ выраженіяхъ функціи Δv_x числа m, простѣйшіе типы коихъ разсматриваются въ нашей монографіи: «Исчисленіе приближенныхъ выраженій функцій весьма большихъ чиселъ» (Математ. Сборникъ, т. XXI).

Величина Δv_x, опредѣляемая равенствомъ (2), можетъ при возрастаніи m до ∞ стремиться къ нулю. Въ этомъ случаѣ Декартову діаграмму предѣльнаго, неощутимо малаго значенія функціи Δv_x можно *проявить* на плоскости координатъ y и x съ помощью графическаго модуля L, разсматривая уравненіе:

$$y = L \,.\, \Delta v_x$$

и выбирая длину L такъ, чтобы діаграмма этого уравненія въ разсматриваемой части умѣщалась на листѣ и отчетливо изображала измѣненія представителя y величины Δv_x, какъ функціи перемѣннаго x. Ниже мы будемъ полагать въ милиметрахъ: $L = w' = 1 : h'$. Діаграмму эту назовемъ «пунктиромъ вѣроятности Δv_x».

Бываетъ полезно вообразить себѣ рядъ діаграммъ функціи Δv_x при нѣсколькихъ большихъ значеніяхъ числа m, напримѣръ,

$$m = 10\,000, \quad 100000, \quad 1\,000\,000 \text{ и } \infty.$$

Такимъ образомъ возможно ассоціировать въ мысли предѣльную діаграмму (ноуменъ, мыслимый, но непосредственно непредставимый) и діаграмму наблюдаемаго процесса (феноменъ), подобно тому какъ физика ассоціируетъ понятія объ установившемся (предѣльномъ) процессѣ и объ устанавливающемся процессѣ (таковы, напримѣръ, понятія объ устанавливающемся токѣ электричества, тепла и проч.). Полезно рядомъ діаграммъ функціи Δv_x при различныхъ m измѣрять наростаніе процесса отъ начальнаго конкретнаго до воображаемаго предѣльнаго процесса *), сличая діаграммы на одномъ и томъ же графическомъ основаніи или абакѣ (если употреблять термины M. d'Ocagne, автора Traité de Nomographie).

Можно даже считать скрытымъ въ ноуменѣ то обстоятельство, какъ именно развертываются активы и пассивы m операцій; но тѣмъ не менѣе можно получать асимптотическое выраженіе функціи Δv_x числа m, если убѣждены, что m велико и стремится сдѣлаться необъятнымъ. Такъ, въ суммѣ переживаній человѣка, приводящей къ итогу x лѣтъ въ день его смерти, участвовали милліарды операцій: каждое біеніе сердца, изнашивающее организмъ, каждый глотокъ питья и пищи, поддерживающій жизнь, каждый импульсъ труда, каждая печаль и радость дня и т. д. все это суть «операціи», которыя вложили свою долю вліянія въ итогъ x лѣтъ жизни умирающаго. Вотъ почему Біометрика вправѣ полагаться на асимптотическое исчисленіе въ построеніи своихъ таблицъ жизнеспособности и смертности населенія и его половъ и профессіональныхъ классовъ.

*) Важно научно-философское воззрѣніе на міровые процессы, какъ на устанавливающіеся, а не какъ на предѣльные или установившіеся. Изъ этого воззрѣнія вытекаютъ углубленные взгляды на эволюцію и на работу силъ физическихъ.

II. Параметръ u выберемъ такъ, чтобы въ разложеніи неперова логарифма $\log \psi(z)$ по степенямъ z членъ первой степени обращался въ нуль. Это значеніе параметра u есть корень уравненія:

$$x = u \frac{d \log \Pi(u)}{du} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Свойства этого уравненія вмѣстѣ съ свойствами всегда положительной величины

$$g(u) = \frac{1}{m} u \frac{d}{du} \left\{ u \frac{d \log \Pi(u)}{du} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

указаны въ части I, § 33.

Благодаря условію (3) и съ помощію извѣстной формулы Дарбу:

$$f(z) = f(0) + f'(0) \cdot z + f''(0) \frac{z^2}{2} + \lambda_1 \cdot f'''(\lambda z) \cdot \frac{z^3}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$0 < \lambda < 1, \quad |\lambda_1| < 1,$$

(см. часть I, § 27, пунктъ III), находимъ:

$$\log \psi(z) = \log \psi(0) - \frac{1}{2} g(u) z^2 \left\{ 1 + 2z\lambda_1 \cdot \varphi(\lambda z) \right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ

$$\varphi(z) = \frac{1}{2mg(u)} \frac{d^3 \log \Pi(u e^{zi})}{dz^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Высшій предѣлъ модуля функціи $\varphi(z)$ при измѣненіи z въ предѣлахъ между $-\tau$ и $+\tau$ обозначимъ чрезъ L', предполагая, что

$$\tau = \{2mg(u)\}^{-\sigma}, \quad \frac{1}{3} < \sigma < \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Изъ этого обозначенія слѣдуетъ неравенство:

$$|\varphi(z)| < L', \quad -\tau < z < +\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Представимъ равенство (2) такъ:

$$\Delta v_x = \frac{1}{2\pi w'} \int_0^\tau \{\psi^m(z) + \psi^m(-z)\} \cdot dz + T(x) \cdot \theta(y) \cdot \rho_0 \quad \ldots\ldots (10)$$

гдѣ

$$T(x) = \frac{h' \cdot \Pi(u) \cdot u^{-x}}{\sqrt{2\pi \cdot mg(u)}} = \frac{h' \cdot \psi^m(0)}{\sqrt{2\pi \cdot mg(u)}}, \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz, \quad y = \frac{\tau}{2} \sqrt{2mg(u)}, \quad \ldots\ldots\ldots (11')$$

$$\rho_0 = \frac{h'}{2\pi \cdot T(x) \cdot \theta(y)} \int_\tau^{\pi w'} \{\psi^m(z) + \psi^m(-z)\} dz. \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Далѣе, исходя изъ формулы (6), находимъ:

$$\frac{h'}{2\pi} \int_0^\tau \{\psi^m(z) + \psi^m(-z)\} dz = \frac{h' \psi^m(0)}{\pi} \int_0^\tau e^{-\frac{1}{2} mg(u) z^2} + T(x) \cdot \theta(y) \rho_1 =$$

$$= T(x) \cdot \theta(y) \cdot (1 + \rho_1), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\rho_1 = \frac{h' \psi^m(0)}{2\pi T(x) \theta(y)} \int_0^\tau e^{-\frac{1}{2} mg(u) z^2} \{\Phi(z) + \Phi(-z)\} dz, \quad \ldots\ldots (14)$$

$$\Phi(z) = -1 + e^{-mg(u) z^3 \lambda_4 \varphi(\lambda z)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14')$$

Положимъ наконецъ:

$$\theta(y) = 1 + \rho_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Изъ равенствъ (11′) и (15) и изъ извѣстнаго равенства:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

слѣдуетъ

$$\rho_2 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty e^{-z^2} dz. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Величина ρ_2, какъ показываютъ таблицы, ничтожна при $y > 2$ и трактуется при этомъ условіи какъ пренебрегаемая погрѣшность, а величина $\theta(y)$ приблизительно замѣняется единицей.

Изъ равенствъ (10), (12), (14) и (15) выводимъ слѣдующую теорему.

Теорема 1. *Вѣроятность Δv_x исчисляется по формулѣ:*

$$\Delta v_x = T(x) \cdot (1 + \omega_x) \cdot (1 + \rho_2) = T(x) \cdot \theta(y) (1 + \omega_x), \quad \ldots\ldots (18)$$

гдѣ $T(x)$ и $\theta(y)$ суть аналитическія формулы, опредѣляемыя равенствами (11) *и* (11′) *и уравненіемъ* (3), *ρ_2 и ω_x суть погрѣшности, опредѣляемыя равенствомъ:*

$$\omega_x = \rho_0 + \rho_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

и равенствами (12), (14) *и* (17).

Прежде оцѣнки погрѣшностей ω_x и ρ_2, которая сдѣлана ниже, установимъ на основаніи теоремы I элементарные типы «кривыхъ вѣроятности Δv_x», соотвѣтствующіе исчезанію погрѣшностей ω_x и ρ_2.

Типы упрощенныхъ кривыхъ вѣроятности Δv_x, служащіе въ качествѣ рабочихъ интерполяціонныхъ формулъ статистики. Черезполосица. Необходимость примѣненія теоремы сложенія кривыхъ вѣроятности для выключенія графическихъ парадоксовъ. Борьба причинъ.

Если удалось подогнать какъ условія задачи, такъ и различныя вспомогательныя округленія ея перемѣнныхъ величинъ къ тому, чтобы въ формулѣ (18) ошибки ρ_2 и ω_x стремились къ нулю и $\theta(y)$ — къ 1, то аналитическая кривая, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y = T(x) : h', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20a)$$

пройдетъ почти по «пунктиру вѣроятности Δv_x» и будетъ неупрощенною «кривою вѣроятности Δv_x»; площадь $y \cdot h'$ представляетъ приближенно величину вѣроятности Δv_x, которая при помощи индуктивныхъ уравненій, составляемыхъ по указанному выше (см. § 17) правилу, сличается съ *опытною пунктирною* «діаграммой частости».

Изъ формулы (20a) кривой вѣроятности далѣе выводятся всѣ удобные для работы теоретически обоснованные типы упрощенныхъ кривыхъ вѣроятности, широко употребляемые работниками статистики въ качествѣ интерполяціонныхъ формулъ, дающихъ, съ помощію индуктивныхъ уравненій, графическія закономѣрности явленій. Вотъ эти элементарные типы:

1. Симметричная колоколовидная кривая типа Лапласа и Гаусса (фиг. 3, стр. 70), уравненіе которой указано на стр. 196 — 197 и которая наилучше сближена съ пунктиромъ вѣроятности въ своей центральной или серединной области, содержащей наибольшую *(модальную)* ординату y.

2. Симметрическая кривая, подобная кривой Лапласа и Гаусса, но отклоняющаяся своею частью, сближенною съ пунктиромъ вѣроятности, отъ модальной

ординаты, или отъ оси симметріи въ одну какую нибудь сторону, какъ объяснено было выше, на стр. 193—194 *).

3. Асимметрическая кривая, равноцѣнная предшествующей и похожая на Пирсоновскія формы (см. ниже), *кромѣ одной изъ нихъ*.

Такъ какъ типы 1) и 2) уже трактованы на вышеуказанныхъ страницахъ 193—197 настоящей книги, какъ слѣдствіе одного и того же уравненія типа (20 *a*), то не будемъ повторять этихъ разсужденій, основанныхъ на приложеніи ряда Лагранжа или Тейлора къ разложенію второй части уравненія (20*a*). Остается получить тѣмъ же способомъ асимметрическую кривую вѣроятности, т. е. типа 3).

Логариѳмируя и потомъ дифференцируя равенство (20′) и принимая во вниманіе уравненіе (3), находимъ:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\log u - \frac{g'(u)}{2mg(u)\,.\,g(u)}\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20b)$$

Послѣднимъ членомъ въ предѣлѣ можно пренебречь (объ исключеніяхъ изъ этого правила будетъ особая рѣчь въ § 28), и тогда получимъ:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\log u = \frac{-x}{\dfrac{u}{\log u}\cdot\dfrac{d\log\Pi(u)}{du}}\,.$$

Знаменатель послѣдняго выраженія разлагается съ помощію ряда Лагранжа и уравненія (3) по степенямъ $x-n$ въ *быстро* сходящійся рядъ. Еслиограничимся тремя членами этого разложенія, то будемъ имѣть:

$$\frac{u}{\log u}\cdot\frac{d\log\Pi(u)}{du} = \beta_1 + \beta_2(x-n) + \beta_3(x-n)^2;$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\beta_1 + \beta_2(x-n) + \beta_3(x-n)^2}\,. \quad \ldots\ldots\ldots (20')$$

Похожимъ на это дифференціальнымъ уравненіемъ опредѣляются Пирсоновскіе типы упрощенныхъ кривыхъ вѣроятности, однако вызвавшіе къ себѣ скептическое критическое отношеніе **). Интеграція уравненія (20′) приводитъ къ формулѣ:

$$y = C\,.\left(1-\frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{+\nu a_2}, \quad \ldots\ldots\ldots (20'')$$

гдѣ a_1 и a_2 суть корни тринома $\beta_1 + \beta_2(x-n) + \beta_3(x-n)^2$ и

$$\nu = 1 : \{\beta_3\,.\,(a_1 - a_2)\}\,.$$

---

*) *Поправка.* На стр. 193 въ 13 строкѣ сверху напечатано: $Ae^{B(x-n)}$, а читать должно: $Ae^{B(x-n)^2}$, считая B отрицательнымъ.

**) См. *K. E. Ranke* und *Greiner*, Das Fehlergesetz und seine Verallgemeinerungen durch Fechner und Pearson, стр. 315. — *Л. К. Лахтинъ*, О методахъ Пирсона въ приложеніяхъ теоріи вѣроятностей къ задачамъ статистики и біологіи. (Матем. Сборн., т. XXIV).—Мы опубликовали свои результаты въ 1898—1902 годахъ (мое сообщеніе Кіевскому съѣзду естествоиспытателей и врачей было сдѣлано въ августѣ 1898 г.) (соотвѣтствующіе труды Пирсона относятся къ 1896—1901 годамъ). Мы нашли общія доказательства формулы (20*a*) съ помощью приближеннаго вычисленія интегральныхъ остатковъ и членовъ Лагранжева ряда (см. „Рядъ Лагранжа“, Матем. Сборн., т. XII, 1885—1886, и «Исчисленіе приближенныхъ выраженій функцій весьма большихъ чиселъ», Матем. Сборн., т. XXI), не связывая выводъ съ «биномомъ» и «гипергеометрическимъ рядомъ» Пирсона, съуживающимъ задачу. Замѣтимъ еще, что и Фехнеровскія типическія кривыя (см. *G. Th. Fechner*: Kollektiv masslehre. Auftrage der Kgl. sächs. Pottl. Freidr. Lipps. Leipzig, W. Engelmann, 1897) получаются изъ нашей основной формулы (20*a*).

Область годности формулы (20″) представляется *весьма большимъ кускомъ соотвѣтствующей кривой*, но она ограничена кругомъ сходимости (см. стр. 191), какъ и область годности кривыхъ типа 1) и 2). У Пирсона мы находимъ одинъ порадоксальный случай. Подъ остальныя формулы Пирсона мы подводимъ болѣе прочный теоретическій фундаментъ, нежели тотъ, который данъ въ трудахъ школы Пирсона, слишкомъ широко пользующейся произвольною интуиціей, а не доказательствомъ.

Предположимъ, что корни a_1 и a_2 вещественные и $a_1 < a_2$. Формула (20″) пригодна въ области точки $x = n$. Если $n : a_1 > 1$, то формулу (20″) лучше взять подъ видомъ:

$$y = C'\,.\left(\frac{x}{a_1}-1\right)^{-\nu a_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{+\nu a_2}.$$

Статистическій матеріалъ служитъ для цифроваго опредѣленія коеффиціентовъ формулы (20″) способомъ наименьшихъ квадратовъ, принимая ее за интерполяціонную и пользуясь индуктивными уравненіями, указанными въ главѣ III, § 17, настоящей части.

Если корни a_1 и a_2 мнимые, то интеграцію уравненія (20′) можно совершить иначе, при чемъ, какъ извѣстно, получимъ:

$$y = C\,.\,\{1 + b^2(x-\mu)^2\}^{-m}\,e^{-\nu\,.\,arc\,tg\,b(x-\mu)}\,. \quad \ldots\ldots\ldots (20''')$$

Ради краткости изложенія, мы умалчиваемъ о правилахъ штриховки скалъ, о введеніи, по указанному на страницѣ 78 плану, произвольныхъ графическихъ модулей, необходимыхъ при сооруженіи чертежа на самомъ дѣлѣ.

Итакъ, всѣ упрощенные типы кривыхъ, ассимметрическіе и симметрическіе удобные для работы, получаются изъ одной и той же нашей формулы (20*a*). Замѣтимъ, что уравненіе (20″) приводится къ трехчленному:

$$u^m - pu^n - q = 0,$$

гдѣ

$$u = 1 - \frac{x}{a_1},\quad m = 1 - \frac{a_1}{a_2},\quad n = -\frac{a_1}{2},\quad p = \frac{a_2}{a_1} - 1,\quad q = -\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{y}{C}\right)^{\frac{1}{\nu a_2}}.$$

Трехчленнымъ уравненіямъ посвящена наша диссертація: «Изслѣдованіе уравненій вида: $u^m - pu^n - q = 0$» (Матем. Сборн., т. XI). Корни этихъ уравненій отражаютъ въ себѣ многія тарификаціи теоріи вѣроятностей.

Типическія формы Пирсоновскихъ кривыхъ вѣроятности представлены ниже на фигурахъ 16, 17, 18, 19, 20, 21 и 22.

III. Теперь отмѣтимъ пунктъ расхожденія нашихъ методовъ съ Пирсоновскими, разсматриваемыми ниже.

Приблизительно на основаніи ур. (20*в*) имѣемъ:

$$\frac{d^2\log y}{dx^2} = -\frac{d\log u}{dx} = -\frac{1}{mg(u)} < 0.$$

Отсюда видно, что модальная ордината y, для которой $\frac{dy}{dx} = 0$, въ нашемъ приближенномъ асимптотическомъ вычисленіи всегда есть *наибольшая*; между тѣмъ Пирсонъ, какъ увидимъ ниже, употребляетъ въ дѣло «кривыя вѣроятности» типа (20″) съ *наименьшею ординатою* y около середины, не давая доказательнаго оправданія этой фигуры даже на какомъ нибудь частномъ примѣрѣ; ибо примѣръ Пирсона съ «гипергеометрическимъ рядомъ» не приводитъ къ этому типу кривой вѣроятности.

Конечно, чисто эмпирическія заднеумныя оправданія тутъ существуютъ; но не о нихъ идетъ здѣсь рѣчь. Поэтому въ доказательствахъ получается *черезполосица*.

Такъ какъ эмпирическое оправданіе еще не достаточно какъ работающее лишь заднимъ числомъ и часто опаздывающее къ сроку, то, конечно, слѣдуетъ, по возможности, искать и болѣе доказательныхъ, т. е. болѣе предусмотрительныхъ оправданій обсуждаемой закономѣрности, къ которымъ могли бы прицѣпляться и менѣе

доказательныя эмпирическія представленія графическихъ закономѣрностей съ помощію почти аналитической конфигураціи пунктировъ частости.

Въ болѣе сомнительной полосѣ черезполосицы рекомендуется слѣдующій способъ.

Если статистическій «пунктиръ частости» явленія x массоваго процесса и проведенный по пунктиру *полигонъ* намекаютъ на существованіе минимума, то для этой области скалы x бываетъ полезно освѣтить *основную группу борющихся причинъ урона и затѣмъ подъема вѣроятности* Δv_x *явленія* x; потомъ нужно по теоремѣ о полныхъ вѣроятностяхъ разложить эту вѣроятность Δv_x по формулѣ:

$$\Delta v_x = y \,.\, \Delta x = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20c)$$

гдѣ $\Delta x = h'$ и $p_1, p_2, \ldots$ суть вѣроятности несовмѣстимыхъ гипотетическихъ причинъ $C_1, C_2, \ldots$; далѣе $y_1, y_2, \ldots$ суть соотвѣтственныя условныя вѣроятности выхода x. Этимъ способомъ удается иногда свести построеніе діаграммы вѣроятности Δv_x въ области минимума y къ построенію діаграммъ вѣроятностей $p_1 y_1, p_2 y_2, \ldots$

Эти послѣднія діаграммы могутъ не имѣть минимумовъ въ разсматриваемой части скалы x, чему примѣръ представленъ ниже на чертежѣ 23. Конечно, такое «выключеніе» парадокса возможно лишь при удачной классификаціи тяжущихся въ массовомъ процессѣ *двоякихъ* причинъ: пониженія y до minimum и, напротивъ, поднятія отъ minimum и при соотвѣтственной регистраціи явленія x, въ связи съ его причинами. Этотъ минимумъ обнаруживаетъ именно тяжбу противоположно дѣйствующихъ въ массовомъ процессѣ причинъ. Хорошая регистрація должна дать возможность вычислять частости x и статистическіе «моменты» степеней x (статистическія среднія значенія ихъ, указанныя въ части II, § 18) *отдѣльно при дѣйствіи каждой изъ причинъ* $C_1, C_2, \ldots$

Нужно вообще помнить, что, по причинѣ извѣстныхъ изъяновъ теоремъ Я. Бернулли и Пуассона, именно слишкомъ малымъ ординатамъ y соотвѣтствуетъ *плохая индукція*; оплошность ея выкупается лишь *очень и очень большимъ числомъ наблюденій*.

Формулу (20c) назовемъ *формулой сложенія кривыхъ вѣроятности*. Она играетъ важную роль въ изслѣдованіи причинъ *особыхъ* и *парадоксальныхъ* случаевъ при формулированіи «графическихъ закономѣрностей».

§ 28. Критическій разборъ условій, при которыхъ теорема I, § 27, приводитъ къ достаточно точной «нормальной» аналитической приближенной формулѣ вѣроятности Δv_x. «Тихіе» парадоксы. Особый случай перваго рода. Модальная ордината.

Выводъ теоремы I, предложенный выше, даетъ возможность критически оцѣнивать годность найденныхъ въ § 27 упрощенныхъ типовъ «кривой вѣроятности».

Предположенія, при которыхъ теорема I приводитъ къ желательному результату, не всегда оправдываются. Критическій разборъ этихъ предположеній сводится къ оцѣнкѣ малости погрѣшностей ρ_2 и ω_x.

Погрѣшность ρ_2, какъ показываетъ формула (17), легко оцѣнивается съ помощью функціи $\theta(y)$ и ея извѣстныхъ таблицъ.

Оцѣнка же погрѣшности ω_x сводится къ разсмотрѣнію неравенства:

$$|\omega_x| \leqq |\rho_0| + |\rho_1| \,. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20\omega)$$

и къ опредѣленію высшихъ предѣловъ величинъ $|\rho_0|$ и $|\rho_1|$.

Это разсмотрѣніе устанавливаетъ отличіе *нормальнаго случая*, когда формула $T(x) \,.\, \theta(y)$, принимаемая нами за «нормальную», является въ предѣлѣ (при $m = \infty$) весьма точнымъ представителемъ величины Δv_x, отъ элементарныхъ *особыхъ случаевъ* разнаго рода и наименованія, когда ошибка ω_x дѣлается значительною.

Выдѣленіе нормальныхъ случаевъ представляетъ интересъ потому, что къ нимъ

примѣнимы методы математическаго анализа, обосновывающіе въ извѣстныхъ условіяхъ типы непрерывной «кривой вѣроятности», прилагаемой къ выраженію, сложенію и разложенію графическихъ закономѣрностей, выводимыхъ по теоріи вѣроятностей изъ соотвѣтствующихъ статистическихъ матеріаловъ и *доказанныхъ* индуктивныхъ уравненій.

При уклоненіяхъ массивнаго процесса отъ нормальнаго событія нужны поправочныя интерпретаціи и особенные элементарные типы графическихъ закономѣрностей.

Будемъ отдѣльно обсуждать высшіе предѣлы величинъ $|\rho_0|$, $|\rho_1|$ и $|\rho_2|$; послѣ этого изслѣдованія легко оцѣнить и высшій предѣлъ величины $|\omega_x|$.

I. Изъ равенствъ (4), (11) и (12) слѣдуетъ:

$$|\rho_0| < \frac{\sqrt{2\pi\, mg\,(u)}}{\pi\quad \theta\,(y)} \int_{\tau}^{\pi w'} R^m(z)\quad dz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

гдѣ $R^m(z)$ есть модуль функціи $\Pi\,(ue^{z\sqrt{-1}}) : \Pi\,(u)$,

$$R^m(z) = |\Pi\,(ue^{zi})| : \Pi\,(u) = |\psi^m(z)| : \psi^m(0) \,. \ldots\ldots\ldots \quad (22$$

Функція $R^m(z)$ въ предѣлахъ интеграла (21) всегда меньше 1 въ силу подбора мѣры h'. Обозначая чрезъ K^m наибольшее значеніе функціи $R^m(z)$ при возрастаніи z отъ τ до $\pi w'$, будемъ имѣть:

$$R^m(z) \leqq K^m < 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$|\rho_0| < K^m \,.\, w' \,.\, \sqrt{2\pi m \,.\, g\,(u)} : \Theta\,(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Пусть z_0 есть тотъ изъ корней уравненія:

$$R'(z) = 0, \,. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

лежащихъ въ предѣлахъ между τ и $\pi w'$, которому соотвѣтствуетъ наибольшее значеніе функціи $R^m(z)$. Согласно обозначенію своему, величина K^m есть наибольшая изъ двухъ величинъ:

$$R^m(\tau) \quad \text{и} \quad R^m(z_0).$$

Слѣдовательно,

$$R^m(\tau) \leqq K^m < 1 \quad \text{и} \quad R^m(z_0) \leqq K^m < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Изъ разсмотрѣнія величины K^m и неравенства (24) вытекаетъ *главный признакъ* нормальнаго случая, необходимый (но недостаточный) для того, чтобы высшій предѣлъ величины $|\rho_0|$, опредѣляемый второю частью неравенства (24), стремился къ нулю.

Для оправданія «нормальной» формулы необходимо, чтобы при большихъ значеніяхъ m *количество* K^m *было весьма малымъ и стремилось къ нулю при возрастаніи* m *до* ∞.

Этотъ признакъ, какъ показываютъ предложенія (26), равносиленъ совмѣстному существованію двухъ условій:

$$Lim \left\{ R^m(z_0) \right\}_{m=\infty} = 0, \,. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$$Lim \left\{ R^m(\tau) \right\}_{m=\infty} = 0, \,. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

обозначающихъ, что при весьма большомъ m величины $R^m(z_0)$ и $R^m(\tau)$ должны быть весьма малыми.

Изъ замѣчаній на стр. 178 о формулѣ Дарбу, изъ равенства:

$$2\,lg\, R(z) = lg\,\{\psi(z) \,.\, \psi(-z)\} - 2\,lg\,\psi(0)$$

и изъ разложенія по формулѣ (5) при обозначеніи (7) находимъ:

$$lg\, \dot{R}(z) = -\frac{1}{2}\, g(u) \,.\, z^2 \,.\, \{1 + 2z\,[\varphi(\lambda z) + \varphi(-\lambda z)]\}, \,. \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

гдѣ $0 < \lambda < 1$. Величины $\varphi(\lambda z)$ и $\varphi(-\lambda z)$ будутъ мнимыми сопряженными числами и въ суммѣ опредѣлятъ дѣйствительную величину. При помощи соотношенія (29) находимъ:

$$R^m(\tau) = e^{-\frac{1}{2} m g(u) \tau^2 (1 + 2v \cdot \tau)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

гдѣ

$$v = \varphi(\lambda\tau) + \varphi(-\lambda\tau);$$

въ силу же неравенствъ (9) будемъ имѣть:

$$|v| < 2 \cdot L' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Изъ обозначенія (8) и равенства (30) слѣдуетъ, что условіе (28) выполнимо лишь въ томъ случаѣ, когда величина $m \cdot g(u)$ весьма велика и стремится къ ∞ при неограниченномъ возрастаніи m, а величина $L'\tau$ стремится къ нулю. Условіе (28), слѣдовательно, равносильно двумъ условіямъ:

$$Lim \left\{ m \cdot g(u) \right\}_{m=\infty} = \infty, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

$$Lim \left\{ L' \tau \right\}_{m=\infty} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32')$$

Если условіе (32) не выполняется, то соотвѣтствующій случай назовемъ *тихимъ парадоксомъ*, или *парадоксальнымъ случаемъ* третьей категоріи *), притомъ либо *серединнымъ* парадоксальнымъ случаемъ, если u есть 1, либо *краевымъ* парадоксальнымъ случаемъ, если u далеко уклоняется отъ 1. Оба вида парадоксовъ третьей категоріи отличны отъ тѣхъ парадоксовъ, кои трактуются въ части II при интерпретаціи приложеній теоремы Чебышева. Серединный «тихій» парадоксъ скрыто выступаетъ въ томъ случаѣ, когда исякаетъ сомнѣніе (см. стр. 349—350), при чемъ $mg(1)$ бываетъ мало и тяготѣетъ къ нулю.

Тихіе парадоксы не обнаруживаются въ отдѣльности рѣзкими эксцессами; но повторяясь въ безчисленномъ множествѣ, они тихимъ «саперным» подкопомъ накопляютъ возможность катастрофы для нѣкоторыхъ цитаделей.

II. Пусть условіе (32) или (28) выполняется, но не выполняется условіе (27). Тогда соотвѣтствующій случай будетъ *особымъ перваго рода* въ смыслѣ, обнимающемъ, какъ частность, особый случай перваго рода, характеризуемый діаграммою въ формѣ расходящейся «сѣтки» и указанный въ § 29, пунктъ II.

Въ этомъ особомъ случаѣ, какъ и въ парадоксальномъ случаѣ, высшей предѣлъ величины $|\rho_0|$, опредѣляемый второю частью неравенства (24), не представитъ весьма малой величины; а слѣдовательно и высшій предѣлъ погрѣшности $|\omega_x|$ дѣлается величиною значительной, приводя къ отрицательному рѣшенію по вопросу о годности величины $T(x)$ въ качествѣ приближеннаго выраженія вѣроятности Δv_x.

Если условія (27) и (28) или (32)—(32′) выполняются и если сверхъ того величина $K^m \cdot w' \cdot \sqrt{2\pi m \cdot g(u)}$ весьма малая и

$$Lim \left\{ K^m \cdot w' \cdot \sqrt{2\pi m \cdot g(u)} \right\}_{m=\infty} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

то высшій предѣлъ величины $|\rho_0|$, опредѣляемый неравенствомъ (24), и сама величина ρ_0 будутъ весьма малы. Этотъ случай и есть *нормальный*.

Забѣгая немного впередъ хода послѣдовательнаго доказательства, замѣтимъ, что высшіе предѣлы величинъ $|\rho_1|$ и $|\rho_2|$ при выполненіи условія (32) окажутся ничтожными, *если величина L', входящая въ неравенства (9), конечная.*

III. Однако же условіе (33) не будетъ выполнено, если имѣетъ мѣсто *аналитическій* случай, т. е. когда $w' = \infty$. Этотъ случай однако не есть обязательно особый; онъ требуетъ лишь другого способа обсужденія равенства (12), опредѣляющаго

*) Парадоксальные случаи первой и второй категоріи, названные *сильными* парадоксами, опредѣлены были выше, на стр. 304—305 и 318—319. Сильные парадоксы соотвѣтствуютъ нарушенію условія (32′).

величину ρ_0. Дедуктивное разсмотрѣніе класса аналитическихъ случаевъ мы перенесемъ въ другой параграфъ (см. § 30); а пока по соображеніямъ индукціи (см. § 17) будемъ касаться ихъ лишь при посредствѣ вспомогательныхъ женератрисъ $F_{\mu,\sigma}(z)$ и $f_{\mu,\nu}(z)$, дающихъ возможность мѣру $h' = dx$ замѣнить мѣрой $\mu h'$ достаточно крупнаго калибра, чтобы условіе (33) выполнялось. Можемъ также замѣнять данную задачу смежною по округленію задачею, какъ это разъяснено въ § 22.

Замѣтимъ, что величина K^m часто бываетъ весьма малою *безконечно высокаго порядка* относительно малой величины $1 : \{2m \cdot g(u)\}$. Въ такомъ случаѣ условію (33) будетъ удовлетворять даже *весьма большое* значеніе w', но *конечнаго* порядка относительно большой величины $2m \cdot g(u)$.

IV. Перейдемъ теперь къ обсужденію величины ρ_1.

Изъ равенствъ (14) и (14′) слѣдуетъ, что

$$|\rho_1| < \frac{h' \psi^m(0) \cdot |\Phi(\lambda''\tau)|}{\pi \cdot T(x)\,\Theta(y)} \int_0^\tau e^{-\frac{m}{2} g(u) z^2} dz, \quad 0 < \lambda'' < 1 \quad \ldots\ldots (34)$$

Отсюда, принимая во вниманіе равенства (11′), находимъ:

$$|\rho_1| < |\Phi(\lambda''\tau)| = |1 - e^{-m \cdot g(u) \tau^3 \lambda''^3 \cdot \lambda_1 \cdot \varphi(\lambda \cdot \lambda'' \cdot \tau)}| \quad \ldots\ldots (35)$$

Если имѣютъ мѣсто условія (32)—(32′), соотвѣтствующія нормальному случаю, то изъ обозначенія (7) и изъ неравенствъ (9) и (35) убѣждаемся, *что $|\rho_1|$ есть весьма малая величина, стремящаяся къ нулю при возрастаніи m до ∞,*

$$Lim \left\{ \rho_1 \right\}_{m=\infty} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Обсудимъ, наконецъ, величину ρ_2.

Изъ равенствъ (11′) и (17) и изъ извѣстнаго неравенства:

$$\int_y^\infty e^{-z^2} dz < \frac{1}{2y} \cdot e^{-y^2}$$

слѣдуетъ:

$$|\rho_2| < \frac{2}{\tau \sqrt{2\pi m \cdot g(u)}} \cdot e^{-\frac{m \cdot g(u)}{2} \cdot \tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Если условіе (32), соотвѣтствующее нормальному случаю, имѣетъ силу, то изъ обозначенія (8) и изъ неравенства (37) слѣдуетъ, *что $|\rho_2|$ есть весьма малая величина, стремящаяся къ нулю при возрастаніи m до ∞,*

$$Lim \left\{ \rho_2 \right\}_{m=\infty} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

V. Изложенное въ пунктахъ I—IV приводитъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема II. *Если при неограниченномъ возрастаніи m имѣютъ силу условія (32), (32′) и (33), то погрѣшность ω_x, входящая въ формулу (18), весьма мала при весьма большихъ значеніяхъ m и стремится къ нулю при возрастаніи m до ∞.*

Теорема II указываетъ опредѣленныя условія ничтожности погрѣшности ω_x; при выполненіи этихъ условій вѣроятность Δv_x представляется «нормальною» приближенною аналитическою функціей $T(x)$.

VI. Максимумъ, а также и минимумъ положительной величины $g(u)$, которая фигурируетъ въ предшествующихъ формулахъ и условіяхъ, соотвѣтствуетъ корню уравненія $g'(u) = 0$.

Раскрывая это уравненіе съ помощію обозначенія (4), положимъ:

$$u = e^\rho$$

и продифференцируемъ уравненіе (4). Находимъ:

$$u\, g'(u) = \frac{1}{m} \frac{d^3 lg\, \Pi(e^\rho)}{d\rho^3}.$$

Изъ сопоставленія этого равенства съ равенствомъ (7), получаемъ:

$$u\,g'(u) = 2g(u)\,.\,\varphi(0)\,.\,\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Слѣдовательно, уравненіе $g'(u) = 0$ равносильно уравненію:

$$\varphi(0) = 0.$$

Поэтому въ областяхъ максимума и минимума величины $g(u)$ количество L' имѣетъ небольшое значеніе; въ области максимума $g(u)$ шансы осуществленія тѣхъ условій теоремы II, кои требуютъ, чтобы $L'\,.\,\tau$ было весьма мало, а $mg(u)$ было весьма велико, значительны. Въ провѣркѣ нуждается еще лишь условіе, требующее, чтобы количество $R^m(z_0)$ было весьма мало.

VII. Представляетъ еще интересъ максимумъ функціи $T(x)$, соотвѣтствующій наибольшей (модальной) ординатѣ y «кривой вѣроятности». Эта кривая для нормальнаго случая опредѣляется уравненіемъ (20 a). Наибольшая ордината ея опредѣляется уравненіемъ (3) и уравненіемъ:

$$u\,.\,g'(u) + 2m\,.\,\{g(u)\}^2\,.\,\log u = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Отсюда видно, что въ пунктѣ maximum—minimum $g(u)$ модальная ордината «кривой вѣроятности» приблизительно соотвѣтствуетъ $u = 1$ и абсциссѣ $x = x_0 =$ мат. ож. x.

Точки перегиба кривой (20a), играющія роль при исчисленіи по формулѣ Эйлера суммы $\Sigma T(x)$, приближенной къ суммѣ $\Sigma\Delta v_x$, разсматриваются въ части I, § 32.

§ 29. Критика съ помощію модулярныхъ діаграммъ. Асимптотическія представленія и графическія «сѣтки» вѣроятностей для особыхъ случаевъ перваго рода. Тембръ закономѣрности.

I. Признакъ особаго случая перваго рода, установленный въ пунктѣ II предшествующаго параграфа (обозначенія котораго сохранимъ здѣсь), указываетъ, что величина $m\,.\,g(u)$ въ этомъ случаѣ бываетъ весьма велика, величина $L'\,.\,\tau$ весьма мала, а величина $R^m(z_0)$ не достаточно мала и не стремится къ нулю при возрастаніи m до ∞. Напротивъ, если величина $R^m(z_0)$ весьма малая, стремящаяся къ нулю, то, при сохраненіи прочихъ условій, получится нормальный случай.

Діаграмма уравненія

$$y = R^m(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

иллюстрируетъ тѣ и эти случаи различными картинами. Замѣтимъ, что

$$R(z + 2\pi w') = R(z) = R(-z),$$

$$R^m(0) = R^m(2\pi w') = 1.$$

Поэтому достаточно разсмотрѣть діаграмму уравненія (1) при измѣненіи z отъ 0 до $\pi w'$ (на фигурахъ 13, 14 и 15 до πW).

Изъ формулъ (9) и (29) § 27 слѣдуетъ, что при

$$-\tau < z < +\tau$$

будемъ имѣть:

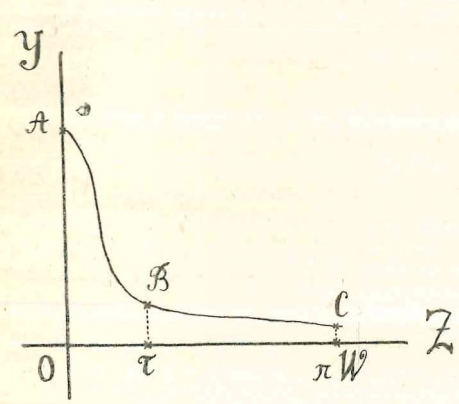
$$R^m(z) = e^{-\frac{1}{2}mg(u)z^2(1+\frac{4z\lambda L'}{\tau^2})}, \quad -1 < \lambda < +1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

Отсюда видно, что при возрастаніи z отъ 0 до τ точка (z, y) описываетъ вѣтвь AB, чрезвычайно круто спускающуюся почти до оси Oz; именно эта крутизна имѣетъ силу какъ для нормальнаго случая, такъ и для особаго случая. Затѣмъ для особыхъ случаевъ вѣтвь BC кривой имѣетъ второстепенные выступы A', A'',... (фиг. 14), тогда какъ для нормальныхъ случаевъ вѣтвь BC почти сливается съ осью Oz, не имѣя другихъ выступовъ, кромѣ A (фиг. 13).

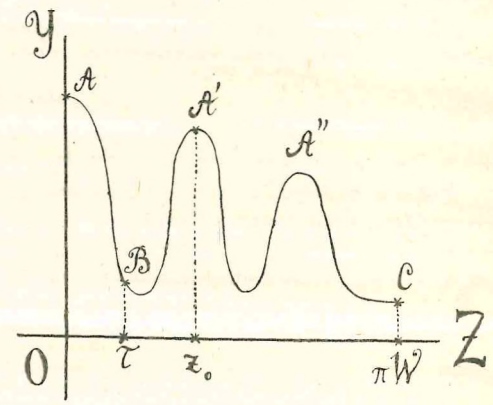
Съ этими второстепенными выступами A', A''... приходится считаться въ приближенномъ вычисленіи интеграла (3), § 27. Интегралъ приводится къ виду:

$$\Delta v_x = \frac{h'\,\Pi(u)\,.\,u^{-x}}{\pi}\int_0^{\pi w'} R^m(z)\cos\Omega\,.\,dz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ Ω есть амплитуда функціи $\Pi(ue^{zi})\,.\,(ue^{zi})^{-x}$. Пункты, соотвѣтствующіе этимъ выступамъ, назовемъ «подглавными точками». Вліяніе ихъ на приближенное исчисленіе указано въ § 14 моего труда «Исчисленіе приближенныхъ выраженій функцій весьма большихъ чиселъ» (Матем. Сборн., т. XXI). Ихъ не бываетъ въ нормальномъ случаѣ.



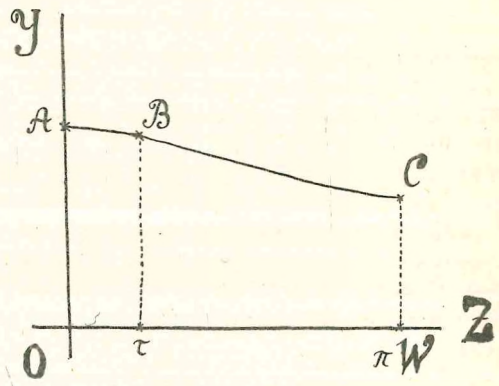
Фиг. 13.



Фиг. 14.

II. Тихіе парадоксы, какъ было сказано, соотвѣтствуютъ нарушенію указаннаго въ § 28 условія (32) и выполненію условія (32′).

Фигуры 13 и 14 не годятся для характеристики этого пародоксальнаго случая. Въ этомъ случаѣ функція $R^m(z)$ не способна къ весьма быстрому убыванію при возрастаніи z отъ нуля; это видно изъ выраженія (1′). Кривая, выраженная уравненіемъ (1), тутъ будетъ имѣть видъ, представленный на фигурѣ 15.



Фиг. 15.

III. Часто бываетъ возможно *подборомъ производящей функціи* изъ группъ (21) на стр. 477 приспособить вычислительный планъ § 27 къ изслѣдованію особыхъ случаевъ перваго рода. Такое приспособленіе бываетъ возможно тогда, когда въ ряду цѣлыхъ чиселъ

$$\mu = 2, 3, 4, \ldots$$

найдется такое наименьшее число $\mu = D$, для котораго условная женератриса $F_{\mu,\sigma}(z)$ вѣроятности $\Delta_\mu P_\xi$, указанная въ § 16, приводитъ къ нормальной фигурѣ 13, какъ діаграммѣ уравненія

$$y = R^m{}_{\mu,\sigma}(z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

замѣщающаго уравненіе (1), если $\Pi(z)$ замѣнить чрезъ $F_{\mu,\sigma}(z)$.

Въ такомъ случаѣ дедуктивный вычислительный планъ § 27 будетъ примѣнимъ къ дѣлу послѣ замѣщенія въ немъ количествъ

$$\Pi(z),\ h',\ x,\ \Delta v_x \text{ и } T(x)$$

соотвѣтственными количествами

$$F_{\mu,\sigma}(z),\ \mu h,\ \xi,\ \Delta_\mu P_\xi \text{ и } T_{\mu,\sigma}(\xi).$$

Въ результатѣ получится способъ анализировать съ помощію прибл. формулы $T_{\mu,\sigma}(\xi)$ лакунарную таблицу II, § 16. Этотъ шагъ уже самъ по себѣ продвигаетъ дедукцію впередъ, хотя оставляетъ лакуны. Вѣроятность $\Delta_\mu P_\xi$ выразится приближенною аналитическою формулой $T_{\mu,\sigma}(\xi)$. Соотвѣтствующая условная кривая вѣроятности опредѣлится съ помощію аналитическаго уравненія

$$y = T_{\mu,\sigma}(\xi) : \mu h, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

къ которому будутъ примѣнимы аналитическія упрощенія, указанныя на стр. 193—194 и 504—505, замѣщая $T(x)$ и h' чрезъ $T_{\mu,\sigma}(\xi)$ и μh.

Затѣмъ нуженъ ключъ, соотвѣтствующій поправкамъ лакунъ таблицы II, § 16, когда трактуется нетабличное значеніе n перемѣннаго ξ, входящее въ полную таблицу I. Возьмемъ изъ ряда условныхъ женератрисъ $f_{\mu,0}(z), f_{\mu,1}(z), \ldots, f_{\mu,\mu-1}(z)$ опять при $\mu = D$ ту женератрису, для которой при данномъ μ имѣетъ силу сравненіе:

$$\frac{n - n_\sigma}{h} \equiv \nu \ (mod\ \mu); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5$$

потомъ вновь примѣнимъ дедуктивный вычислительный планъ § 27, замѣняя въ немъ группу количествъ

$$\Pi(z),\ h',\ x,\ \Delta v_x \text{ и } T(x)$$

группою соотвѣтственныхъ количествъ

$$f_{\mu,\nu}(z),\ \mu h,\ n,\ \Delta P_n \text{ и } T(\mu,\ \nu,\ n).$$

Въ результатѣ дедукціи получится приближенное аналитическое выраженіе $T(\mu, \nu, n)$ для вѣроятности ΔP_n и соотвѣтствующая новая условная кривая вѣроятности, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y = T(\mu,\ \nu,\ n) : \mu h, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

дополняющая условную кривую (4), полнѣе разъясняя законъ большихъ чиселъ для особыхъ случаевъ. Такихъ дополнительныхъ аналитическихъ формъ будетъ μ, ибо число ν можетъ принять любое изъ значеній: $0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$. Сравненіе (5) рѣшаетъ вопросъ, какая изъ кривыхъ (6) соотвѣтствуетъ данному значенію n. Эта группа кривыхъ есть «сѣтка» (§ 16, п. III), притомъ съ расходящимися отдѣльными кривыми. Сложеніемъ ихъ получается кривая (4) (ср. стр. 474).

Прибѣгая къ аналогіямъ изъ теоріи звука, можно бы сказать, что кривая (4) опредѣляетъ общій *основной тонъ* закономѣрности, а кривая (6) опредѣляютъ частные *тоны, интерференціи* и *тембръ* той же закономѣрности. Къ формамъ (6) примѣняются упрощенія, указанныя на стр. 193—194 и 504—505, замѣняя $T(x)$ и h' чрезъ $T(\mu, \nu, n)$ и μh.

Во всѣхъ упрощенныхъ по этому способу кривыхъ будетъ господствовать аналитическая формула либо вида:

$$y = A \cdot e^{-B(x-c)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

излюбленнаго со временъ Лапласа и Гаусса, либо Пирсоновскаго вида:

$$y = C \cdot \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{+\nu a_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

Постоянныя той и этой формулы измѣняются въ различныхъ частяхъ таблицъ, оставаясь постоянными въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ съ помощію опыта и теоріи Лагранжева и Тейлорова ряда.

Планъ этотъ, ограничиваемый множествомъ условностей, конечно, можетъ встрѣчаться съ усложненіями, соотвѣтствующими *неравномѣрному* размѣщенію выступовъ $A, A', A'', \ldots$, помѣченныхъ на діаграммѣ 14.

Но равномѣрное размѣщеніе выступовъ можетъ на дѣлѣ встрѣтиться въ условіяхъ *простого тиража*, близкихъ къ осуществленію теоремы I, § 26.

Остановимся еще на слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ. *Пусть M, D, N_1 и N_2 будутъ цѣлыя положительныя числа; M и D пусть будутъ взаимно простыми числами и $D > 1$. Перемѣнное ε_1 пусть долженствуетъ принять одно изъ значеній вида:*

$$l \cdot \frac{M}{D},$$

гдѣ l есть цѣлое число, взятое изъ ряда чиселъ:

$$-N_1,\ -N_1+1,\ -N_1+2, \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ N_2;$$

$\Delta p_1(\varepsilon_1)$ есть вѣроятность даннаго значенія перемѣннаго ε_1.

Далѣе, каждое изъ перемѣнныхъ $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ пусть должно получить одно изъ двухъ значеній:

$$1 \text{ и } 0;$$

пусть $\Delta p_k(1) = q_k$ и $\Delta p_k(0) = 1 - q_k$, т. е. q_k и $1 - q_k$ пусть будутъ вѣроятности значеній 1 и 0 перемѣннаго ε_k.

Перемѣнныя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ пусть будутъ зависимыми или же независимыми. Ищутся же вѣроятности ΔP_x того, что сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$ получитъ то или другое данное значеніе x.

Рѣшеніе задачи начнемъ съ случая независимыхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$

Производящія функціи въ этомъ примѣрѣ будутъ:

$$\varphi_1(z) = \sum_{l=-N_1}^{l=+N_2} \Delta p_1 \left(l \cdot \frac{M}{D}\right) z^{l \cdot \frac{M}{D}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\varphi_2(z) = q_2 \cdot z + 1 - q_2,\ \varphi_3(z) = q_3 \cdot z + 1 - q_3, \ldots,\ \varphi_m(z) = q_m \cdot z + 1 - q_m, \quad \ldots (8')$$

$$F(z) = (q_2 z + q'_2)(q_3 z + q'_3) \ldots (q_m z + q'_m) \sum_{l=-N_1}^{=+N_2} \Delta p_1 \left(l \cdot \frac{M}{D}\right) z^{l \cdot \frac{M}{D}}, \quad \ldots\ldots (8'')$$

гдѣ $q'_k = 1 - q_k$.

Мѣры $h, h_1, h_2, \ldots, h_m$ въ данномъ примѣрѣ будутъ:

$$h = \frac{1}{D},\ h_1 = \frac{M}{D},\ h_2 = h_3 = \ldots = h_m = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Всевозможныя значенія x суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$ будутъ имѣть форму:

$$n = \frac{lM + rD}{D}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

гдѣ l и r суть всевозможныя цѣлые числа, измѣняющіяся подъ условіями:

$$-N_1 \leqq l \leqq +N_2, \quad 0 \leqq r \leqq m - 1.$$

Далѣе, имѣемъ: $\pi w = D\pi$, и уравненіе (1) получитъ видъ:

$$y = \frac{1}{F(u)} \cdot |q_2 u e^{xi} + q'_2| \cdot |q_3 u e^{xi} + q'_3| \ldots |q_m u e^{xi} + q'_m| \cdot \left| \sum_{l=-N_1}^{l=+N_2} \Delta p_1 \left(l \cdot \frac{M}{D}\right) (u e^{xi})^{l \cdot \frac{M}{D}} \right|. \quad (11)$$

Діаграмма уравненія (11) будетъ имѣть на скалѣ z между предѣлами O и $D\pi$ второстепенные выступы въ почти *равномѣрно* размѣщенныхъ по оси Oz точкахъ, абсциссы коихъ приблизительно имѣютъ значенія $z = 2s\pi$, гдѣ s есть любое изъ чиселъ $1, 2, \ldots, D-1$; эти выступы указываютъ на то, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ особымъ случаемъ.

Примѣняя вышеизложенный вычислительный планъ къ изслѣдованію этого особаго случая, возьмемъ въ этомъ примѣрѣ $\mu = D$ и будемъ приближенно вычислять вѣроятности $\Delta_\mu P_\xi$. Производящая функція $F_{\mu,\sigma}(z)$ этихъ вѣроятностей, опредѣляемая чрезъ $F(z)$ съ помощію формулъ § 16, пунктъ II, представится такъ:

$$F_{D,\sigma}(z) = (q_2 z + q_2')(q_3 z + q_3')\ldots(q_m z + q'_m) \sum_{l=-N_1}^{l=N_2} \Delta p_1\left(l\,\frac{M}{D}\right) z^{\frac{N}{D} + E_0\left(\frac{lM-N}{D}\right)}, \quad (12)$$

гдѣ $E_0(y)$ есть Бугаевское цѣлое круглое число и N опредѣляется изъ условія:

$$\frac{N}{D} = n_\sigma, \quad (13)$$

при чемъ число n_σ должно имѣть форму (10) и представлять собою серединное значеніе суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$. Діаграмма уравненія (3), соотвѣтствующая генератрисѣ $F_{D,\sigma}(z)$ вида (12), будетъ представляться фигурой 13, если количество

$$q_2 q'_2 + q_3 q'_3 + \ldots + q_m q'_m$$

будетъ весьма большимъ, стремящимся къ безконечности при возрастаніи m до ∞. Приближенное вычисленіе вѣроятности $\Delta_D P_\xi$ будетъ осуществимо по изложенному выше плану; въ результатѣ получимъ аналитическое приближенное выраженіе $T_{D,\sigma}(\xi)$ вѣроятности $\Delta_D P_\xi$. Значенія перемѣннаго ξ должны имѣть форму:

$$\xi = n_\sigma + s = \frac{N}{D} + s, \quad (14)$$

гдѣ s есть перемѣнное цѣлое число.

Возьмемъ теперь значеніе n вида (10), имѣющее форму, удовлетворяющую сравненію:

$$\frac{n - n_\sigma}{h} \equiv \nu \,(mod\ D),\ h = \frac{1}{D}, \quad (15)$$

гдѣ ν есть любое изъ чиселъ: $0, 1, \ldots, D-1$. Построимъ условную генератрису $f_{D,\nu}(z)$ вѣроятностей ΔP_n, соотвѣтствующую сравненію (15); для этой цѣли служитъ формула (15), § 16, и приводитъ къ слѣдующему результату:

$$f_{D,\nu}(z) = (q_2 z + q'_2)(q_3 z + q'_3)\ldots(q_m z + q'_m)\cdot\varphi_{1,\nu}(z), \quad (16)$$

гдѣ $\varphi_{1,\nu}(z)$ есть многочленъ, получаемый изъ многочлена второй части равенства (8), сохраняя въ немъ только тѣ члены, для которыхъ перемѣнное цѣлое число l удовлетворяетъ сравненію:

$$Ml - N - \nu \equiv 0 \,(mod\ D). \quad (17)$$

Условная генератриса $f_{D,\nu}(z)$ опять вполнѣ удобна для приближеннаго вычисленія вѣроятностей ΔP_n. Полученное аналитическое выраженіе $T(D, \nu, n)$ этой вѣроятности будетъ измѣнять свой составъ съ измѣненіемъ числа ν, которое можетъ имѣть D значеній.

Замѣтимъ, что разсмотрѣнный примѣръ содержитъ испытанія, близкія къ тѣмъ, кои разсматриваются закономъ большихъ чиселъ въ формѣ Пуассона. Если отбросить перемѣнное ε_1, то остальныя перемѣнныя будутъ въ точности соотвѣтствовать условіямъ теоремы Пуассона. Слѣдовательно, приведенный примѣръ распространяетъ законъ большихъ чиселъ Пуассона въ сторону сосѣдняго массоваго событія, имѣющаго характеръ особаго случая перваго рода. Операція O_1, соотвѣтствующая

перемѣнному ε_1, является какъ бы *пертурбаціей* въ отношеніи къ пуассоновскимъ операціямъ $O_2, O_3, \ldots, O_m$, кои соотвѣтствуютъ остальнымъ перемѣннымъ.

Теперь предположимъ, что выходы отдѣльныхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ связаны нѣкоторою зависимостью сосуществованія или послѣдовательности. Прежнее рѣшеніе, конечно, измѣнится болѣе или менѣе, смотря по силѣ зависимости; тутъ будутъ имѣть силу указанныя на страницахъ 319 — 329 и 439 — 440 замѣчанія. Но свойства особаго случая перваго рода тутъ всетаки дадутъ о себѣ знать, т. е. придется считаться съ числовыми сравненіями типа (15) и съ сѣткой кривыхъ вѣроятности. Если для примѣра взять Пирсоновскій рядъ тиражей (см. стр. 519), то будутъ требоваться для отдѣльныхъ частей этой сѣтки Пирсоновскія асимметрическія кривыя.

§ 30. Приближенное дедуктивное вычисленіе вѣроятностей непрерывно измѣняющагося итога независимыхъ перемѣнныхъ.

I. Пусть мыслимыя значенія независимыхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ представляютъ непрерывныя строки (44) § 18, скалы этихъ перемѣнныхъ представляютъ сплошныя линіи. Разсмотримъ планъ приближеннаго вычисленія вѣроятности dP_x того, что сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$ получитъ значеніе, содержащееся между x и $x + dx$.

Планъ этотъ для простоты обсужденія ограничимъ предположеніемъ, что перемѣнныя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ независимыя и производящія функціи $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u)$ вѣроятностей $dp_1(\varepsilon_1)$, $dp_2(\varepsilon_2), \ldots, dp_m(\varepsilon_m)$ обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ:

$$Lim\left\{\frac{z^{\delta_k}\cdot\varphi_k(ue^{zi})}{\varphi_k(u)}\right\}_{z=\infty} = 0,\ (k = 1, 2, \ldots, m), \quad (1)$$

гдѣ $\delta_k > 0$. Иначе говоря, пусть модуль функціи $z^{\delta_k}\cdot\varphi_k(ue^{zi}) : \varphi_k(u)$ при возрастаніи z отъ нѣкотораго конечнаго значенія z', большаго 1, и до ∞ не превосходитъ конечнаго предѣла λ_k, который при достаточно значительномъ z' будетъ пренебрегаемою величиною.

Свойствомъ (1) обладаетъ обширный классъ производящихъ функцій.

Этому условію, очевидно, удовлетворятъ функція:

$$\varphi_k(u) = \frac{1}{\eta}\int_{a\eta}^{(a+1)\eta} u^{\varepsilon_k} d\varepsilon_k = \varphi(u) = \frac{u^{a\eta}(u^\eta - 1)}{\eta\, lg\, u}, \quad (2)$$

трактуемая въ § 21, а также болѣе общая по виду функція:

$$\varphi_k(u) = \int_{a_k}^{b_k} (A_{0,k} + A_{1,k}\varepsilon_k + \ldots + A_{\nu,k}\varepsilon_k^\nu)\cdot u^{\varepsilon_k} d\varepsilon_k \quad (2')$$

и множество другихъ функцій, въ числѣ которыхъ нужно особенно замѣтить производящую функцію вида:

$$\varphi_k(u) = \frac{b_k}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b_k^2\varepsilon_k^2} u^{\varepsilon_k} d\varepsilon_k = e^{\left(\frac{lg\,u}{2b_k}\right)^2}, \quad (2'')$$

опредѣляющую, по Гауссу, вѣроятности

$$\frac{b_k}{\sqrt{\pi}} e^{-b_k^2\varepsilon_k^2} d\varepsilon_k$$

уравновѣшенныхъ (относительно нуля) погрѣшностей измѣренія.

Къ условіямъ (1) присоединимъ еще условіе, чтобы сумма $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m$

была значительною положительною величиною, стремящеюся къ ∞ при возрастаніи m до ∞. Для простоты положимъ:

$$\delta = \frac{1}{m}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Изъ сдѣланныхъ предположеній слѣдуетъ, что

$$\varphi_k(ue^{xi}) = \varphi_k(u) \cdot \frac{\vartheta_k(z)}{z^{\delta_k}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$F(ue^{xi}) = F(u) \cdot \frac{\Phi(z)}{z^{m\delta}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4')$$

гдѣ $\vartheta_k(z)$ и $\Phi(z)$ суть функціи, модули которыхъ при возрастаніи z отъ z' до ∞, не превосходятъ конечныхъ пренебрегаемыхъ предѣловъ λ_k и $\Lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_m$. Слѣдовательно, количества:

$$\frac{|\vartheta_k(z)|}{\lambda_k} \quad \text{и} \quad \frac{|\Phi(z)|}{\Lambda}$$

представляютъ собою правильныя дроби.

Дѣлая выводъ приближенной величины вѣроятности dP_x по способу предѣловъ, вообразимъ смежную по округленію задачу (§ 22), въ которой приращенія перемѣнныхъ $e_1, e_2, \ldots, e_m$ пусть представляются такъ:

$$\Delta e_1 = \Delta e_2 = \ldots = \Delta e_m = \eta,$$

гдѣ η — есть величина, стремящаяся въ предѣлѣ къ безконечно малой величинѣ $dx = d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = \ldots = d\varepsilon_m$. Обращаясь затѣмъ къ плану § 27, возьмемъ формулы (10) и (12) этого § и разсмотримъ ихъ при $h = \eta$ въ предѣлѣ, когда η переходитъ въ dx и $1:h$ или w переходитъ въ ∞. Найдемъ:

$$dP_x = \frac{dx}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} \{\psi^m(z) + \psi^m(-z)\}\, dz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\rho_0 = \frac{dx}{2\pi \cdot T(x)} \cdot \int_{\tau}^{\infty} \{\psi^m(z) + \psi^m(-z)\}\, dz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ

$$\psi^m(z) = F(ue^{zi}) \cdot (ue^{zi})^{-x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$T(x) = \frac{dx \cdot F(u) \cdot u^{-x}}{\sqrt{2\pi m g(u)}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

при чемъ если подразумѣвать равенство $\Pi(z) = F(z)$, то сохраняются всѣ остальныя обозначенія §§ 27—28.

Развитіе плана § 27 въ данномъ случаѣ сохраняетъ силу, кромѣ той части, которая касается опредѣленія высшаго предѣла погрѣшности ρ_0. Эта погрѣшность теперь должна быть обсуждена иначе, исходя изъ приведенной сейчасъ формулы (6) при условіи (1) и при значительномъ m. δ.

Изъ этой формулы слѣдуетъ:

$$\rho_0 = \rho'_0 + \rho''_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ

$$\rho'_0 = \frac{dx}{2\pi T(x)} \int_{\tau}^{z'} \{\psi^m(z) + \psi^m(-z)\}\, dz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\rho''_0 = \frac{dx}{2\pi T(x)} \int_{z'}^{\infty} \{\psi^m(z) + \psi^m(-z)\}\, dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

При помощи равенствъ (3), (4), (7) и (10) убѣждаемся, что

$$\rho''_0 = \frac{dx \cdot F(u)\, u^{-x}}{2\pi \cdot T(x)} \cdot \int_{z'}^{\infty} \left\{\frac{\Phi(z)\, e^{-zxi} + \Phi(-z)\, e^{zxi}\, (-1)^{-m\delta}}{z^{m\delta}}\right\} dz.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$|\rho''_0| < \frac{dx \cdot F(u) \cdot u^{-x} \cdot \Lambda}{\pi \cdot T(x)} \cdot \int_{z'}^{\infty} \frac{dz}{z^{m\delta}},$$

гдѣ Λ есть вышеуказанная конечная величина.

Внося сюда выраженіе (7') и выполняя интеграцію, будемъ имѣть:

$$|\rho''_0| < \frac{\Lambda \cdot \sqrt{2\pi \cdot m \cdot g(u)}}{\pi \cdot z'^{m\delta-1} \cdot (m\delta - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

При сдѣланныхъ предположеніяхъ относительно z' и $m\delta$ *высшій предѣлъ величины* $|\rho''_0|$, *очевидно, есть весьма малая величина, стремящаяся къ нулю при возрастаніи* m *до* ∞.

Далѣе при помощи равенствъ (4), (7) и (9) убѣждаемая, что

$$|\rho'_0| < \frac{\sqrt{2\pi m g(u)}}{\pi} \int_{\tau}^{z'} R^m(z)\, dz,$$

гдѣ

$$R^m(z) = \frac{|F(ue^{zi})|}{F(u)|} = \frac{|\psi^m(z)|}{\psi^m(0)}.$$

Предполагая, что K^m есть наибольшее значеніе функціи $R^m(z)$ при возрастаніи z отъ τ до z', будемъ имѣть:

$$|\rho'_0| < \frac{(z' - \tau)}{\pi} \cdot K^m \cdot \sqrt{2\pi m g(u)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

«Нормальный» случай характеризуется, между прочимъ, тѣмъ, что величина $K^m \cdot \sqrt{2\pi m g(u)}$ весьма мала и стремится къ нулю при возрастаніи m до ∞. Вмѣстѣ съ тѣмъ величины ρ'_0, ρ''_0 и ρ_0 будутъ стремиться къ нулю; а также будетъ стремиться къ нулю ихъ сумма ω_x. Въ результатѣ придемъ въ *нормальномъ случаѣ* къ теоремѣ:

$$dP_x = \frac{F(u)\, u^{-x}}{\sqrt{2\pi m \cdot g(u)}} \cdot dx \cdot (1 + \omega_x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

гдѣ ω_x есть весьма малая величина, $g(u)$ и u суть функціи перемѣннаго x, опредѣляемыя при помощи уравненій:

$$x = \frac{u \cdot d\lg F(u)}{du} \quad \text{и} \quad g(u) = \frac{1}{m}\, u\, \frac{d}{du}\left\{u\, \frac{d\lg F(u)}{du}\right\}, \quad \ldots\ldots (13')$$

гдѣ lg есть неперовъ логариѳмъ.

II. Примѣръ. *Пусть производящія функціи* $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots$ *вѣроятностей:*

$$dp_1(\varepsilon_1), \quad dp_2(\varepsilon_2), \ldots$$

отдѣльныхъ значеній перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *опредѣляются по формулѣ (2), т. е. такъ:*

$$\varphi_k(u) = \frac{1}{\eta_l} \int_{a\eta_l}^{(a+1)\eta_l} u^{\varepsilon_k} \cdot d\varepsilon_k = \varphi(u), \quad -1 < a < 0,$$

гдѣ $k = 1, 2, \ldots$ *Опредѣлить вѣроятность* dP_x *того, что будетъ имѣть силу равенство:*

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m = x.$$

Замѣтимъ, что примѣръ этотъ, въ которомъ $dp_k(\varepsilon_k) = \frac{1}{\eta}\, d\varepsilon_k$, соотвѣтствуетъ даннымъ, разсмотрѣннымъ въ § 21, при другомъ обозначеніи перемѣнныхъ ε_k, измѣняющихся между предѣлами $a\eta$ и $(a+1)\eta$. Тутъ $F(z) = [\varphi(z)]^m$.

Если u есть корень уравненія:

$$x = \frac{m \cdot \int_{a\eta}^{(a+1)\eta} \varepsilon u^{\varepsilon}\, d\varepsilon}{\int_{a\eta}^{(a+1)\eta} u^{\varepsilon}\, d\varepsilon} = \frac{m \cdot \{(\eta \cdot lg\, u \cdot [(a+1)u^{\eta} - a] - u^{\eta} + 1\}}{(u^{\eta} - 1) \cdot lg\, u},$$

то будемъ имѣть:

$$dP_x = \frac{\left\{\frac{u^{a\eta}}{\eta \cdot lg\, u} \cdot (u^{\eta} - 1)\right\}^m \cdot u^{-x}}{\sqrt{2\pi m g(u)}} \cdot dx \cdot (1 + \omega_x),\ g(u) = u\frac{d}{du}\left\{u\frac{dlg\varphi(u)}{du}\right\},$$

гдѣ ω_x есть весьма малая величина. При $a = -\frac{1}{2}$ получается результатъ, сходный съ Лорановскимъ результатамъ, даваемымъ при рѣшеніи указанной въ § 21 оцѣночной задачи, страховой отъ погрѣшностей округленія.

§ 31. Англійскій некритическій эмпиризмъ и его значеніе. Пирсоновская классификація типовъ діаграммъ. Парадоксы Пирсона.

Выучиться регистраціи явленій въ связи съ ихъ причинами и графической обработкѣ хорошо зарегистрированныхъ явленій можно у англійскихъ эмпириковъ, умѣющихъ *слушать голосъ фактовъ* по упрощеннымъ для работы, популярнымъ, но критически иногда не слишкомъ строго обоснованнымъ схемамъ испытанія.

Эмпиризмъ англійскихъ математиковъ имѣетъ цѣлію благонамѣренную популяризацію науки и ея изслѣдованій въ области естествознанія, народной экономіи и государственнаго хозяйства. «Бѣдность индукціи» можно побѣдить помощію популярныхъ рабочихъ формулъ и вербовки работниковъ въ большомъ кругу людей. Выдающійся представитель современнаго математическаго познанія явленій природы и общественности, Карлъ Пирсонъ, говоритъ: «популяризація науки, въ лучшемъ и обширнѣйшемъ значеніи этого слова, есть и вполнѣ достаточное, но вмѣстѣ съ тѣмъ и вполнѣ необходимое оправданіе ея существованія съ точки зрѣнія общественности».

Пирсоновская школа біологовъ беретъ изъ математической теоріи вѣроятностей главнымъ образомъ основныя части, сближающія умозрительныя понятія вѣроятности и ожиданія съ представленіями (въ цифрахъ и чертежахъ) статистической частости и статистическихъ моментовъ (т. е. статистическихъ среднихъ значеній, указанныхъ въ части II, § 18), полученными изъ добытаго фактическаго матеріала.

Вмѣстѣ съ тѣмъ помянутые англійскіе эмпиристы дѣлаютъ по извѣстнымъ схемамъ небольшой подмѣнъ таблицъ или рядовъ во имя выравниванія соотношеній съ помощію математическаго анализа, упрощающаго большія вычисленія; пунктиры и полигоны, точечныя тѣла и многогранники приблизительно подмѣниваются сплошными аналитическими конфигураціями, съ помощію интерполяціонныхъ формулъ.

Однѣ интерполяціонныя формулы Пирсоновскихъ «кривыхъ „вѣроятности» теперь можно считать теоретически обоснованными съ помощію нашей критики и вышедоказанныхъ теоремъ; другія же формулы оказываются сомнительными, парадоксальными, наводящими на подводные камни. Критика помогаетъ застраховаться отъ накопленія лжи въ работахъ смѣлаго некритическаго эмпиризма, необходимаго

въ предпріятіяхъ. Критицизмъ не долженъ удерживать смѣлыхъ своею скептическою рефлексіей, но долженъ быть достаточенъ для прикрытія смѣлыхъ.

Нужно отличать осложненныя діаграммы Пирсона отъ соотвѣтственныхъ элементарныхъ типовъ «кривыхъ вѣроятности» или «кривыхъ частости». Типы эти вѣрно намѣчены Пирсономъ въ слѣдующемъ спискѣ *).

Типъ I. Протяженіе кривой по обѣ стороны ограниченное и кривая асимметрическая.
» II. Протяженіе по обѣ стороны ограниченное и кривая симметрическая.
» III. Протяженіе только по одну сторону ограниченное и кривая асимметрическая.
» IV. Протяженіе по обѣ стороны безграничное и кривая асимметрическая.
» V. Проткженіе по обѣ стороны безграничное и кривая симметрическая.

Типъ V есть «Гауссовская кривая» ошибокъ. Типъ IV при малой асимметріи обсуждалъ еще Пуассонъ (Sur la probabilité des jugements, Chap. 3). Типъ III впервые опубликованъ Пирсономъ безъ доказательства въ Trans. Roy. Soc. Proc. Vol. 54, p. 331. Въ послѣдующихъ трудахъ Пирсонъ трактуетъ другіе типы. Такъ, онъ выводитъ асимметрическую «кривую частости» ограниченнаго размѣра съ помощію обыкновеннаго примѣра урны, въ которой при полномъ числѣ n шаровъ содержатся $p \cdot n$ черныхъ и qn бѣлыхъ, но безъ обыкновеннаго предположенія, что въ послѣдовательномъ рядѣ извлеченій послѣ вынутія каждаго шара онъ опять возвращается въ урну. Вѣроятность, что при первомъ извлеченіи вынется черный шаръ, есть при этомъ $pn : n$; вѣроятность, что во второй разъ вынется опять черный шаръ уменьшится, будетъ равна $(pn-1):(n-1)$, ибо въ урнѣ останется $pn-1$ черныхъ шаровъ при общемъ числѣ $n-1$ всѣхъ шаровъ; вообще вѣроятность, что послѣ $s-1$ вышедшихъ черныхъ шаровъ въ слѣдующемъ извлеченіи вынется опять черный шаръ, будетъ равна $(pn-s+1):(n-s+1)$. Пирсонъ получаетъ такимъ образомъ слѣдующій „гипергеометрическій рядъ“:

$$F(z) = \frac{pn(pn-1)(pn-2)\ldots(pn-r+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)} \cdot \left\{1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{qn}{pn-r+1} z + \right.$$
$$+ \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{qn(qn-1)}{(pn-r+1)(pn-r+2)} z^2 +$$
$$\left. + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{qn(qn-1)(qn-2)}{(pn-r+1)(pn-r+2)(pn-r+3)} z^3 \ldots \right\},$$

представляющій производящую функцію вѣроятности ΔP_m, соотвѣтствующей выходу возможной комбинаціи m бѣлыхъ и $r-m$ черныхъ шаровъ, ежели извлекать всего r шаровъ. Имѣемъ:

$$\frac{\Delta P_m - \Delta P_{m-1}}{\Delta P_{m-1}} = \frac{-(n+2)m + (qn+1)(r+1)}{m(pn-r+m)} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Если исключимъ перемѣнное m съ помощью формулы:

$$-(n+2)m + (qn+1)(r+1) = -(n+2)x : c$$

и положимъ: $x = x_m$ и $y_{x_m} = \Delta P_{m-1}$, то ряду чиселъ $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ будетъ соотвѣтствовать рядъ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$; получится „пунктиръ вѣроятности“, состоящій изъ точекъ (x_m, y_m) плоскости прямоугольныхъ координатъ x и y, и опредѣлится

*) *K. Pearson:* Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. London 1896, 1898, 1901. Мы излагаемъ эту формулировку не по статьямъ Пирсона, а по статьѣ *K. E. Ranke* und *Greiner:* «Das Fehlergesetz und seine Verallgemeinerungen durch Fechner und Pearson in ihrer Tragweite für die Antropologie» (Archiv für Anthropologie.—Neue Folge, Band IV, Heft 2 u. 3. Braunschweig, 1906. Стр. 316—317).

„полигонъ“, проведенный черезъ точки этого пунктира. Если положимъ: $dx_m = dx = c$, то приблизительно получимъ:

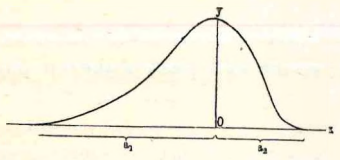
$$\frac{y_{x_{m+1}} - y_{x_m}}{c \cdot y_{x_m}} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta P_m - \Delta P_{m-1}}{c\,\Delta P_{m-1}},$$

при чемъ равенство (1) приведетъ къ дифференціальному уравненію *):

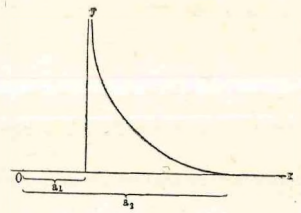
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\beta(x-a_1)(x-a_2)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\beta = \frac{1}{n+2},\ a_1 = -\frac{c(r+1)(qn+1)}{n+2},\ a_2 = -\frac{c(pn+1)(n+1-r)}{n+2}.$$

Уравненіе (2) похоже на наше общее для «нормальнаго» случая уравненіе (20′), § 27, относящееся не только къ гипергеометрическому ряду, но и къ общему случаю, т. е. къ любой другой производящей функціи $F(z)$, удовлетворяющей требованіямъ критики по методамъ §§ 28—30.



Фиг. 16.



Фиг. 17.

Отъ частнаго примѣра гипергеометрическаго ряда Пирсонъ безъ доказательства, по *некритической* интуиціи, но ради благонамѣренной *популяризаціи* дѣлаетъ скачекъ къ этому общему случаю **) и трактуетъ интегралы (20″) и (20‴) уравненія (20′), § 27. Послѣднему изъ этихъ интеграловъ соотвѣтствуетъ кривая вѣроятности типа IV. Остальные типы соотвѣтствуютъ интегралу (20″), § 27, т. е. уравненію:

$$y = C\left(1-\frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{-\nu a_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Если вмѣстѣ съ Пирсономъ ***) допустимъ, что C, ν, a_1 и a_2 могутъ получать всякое значеніе, то увидимъ, что «кривая вѣроятности» представитъ три основныхъ формы.

---

*) Аналогическое дифф. уравненіе получается также для случая, когда производящая функція $F(z)$ есть биномъ $(p+qz)^n$. См. статью *Л. К. Лахтина*: „О методахъ Пирсона въ приложеніяхъ теоріи вѣроятностей къ задачамъ статистики и и біологіи“. (Матем. Сборн., т. XXIV, 1904).

**) «Гипергеометрическій рядъ» по общности доказательства, конечно, не можетъ конкуррировать съ общей «женератрисой», какъ рядомъ, и съ «рядомъ Лагранжа», выдвинутымъ нами въ «Исчисленіи приближенныхъ...» для вывода «кривой частости» ограниченнаго размѣра, т. е. типовъ I и II, если держаться вышеуказанной Пирсоновской классификаціи типовъ.

***) Замѣтимъ, что Пирсонъ именно здѣсь дѣлаетъ слишкомъ широкое допущеніе, выходящее за предѣлы, оправдываемые примѣромъ «гипергеометрическаго» ряда $F(z)$. Тутъ была бы нужна болѣе общая производящая функція $F(z)$, которую мы разсматривали въ § 27.

Во-первыхъ,

$$y = C\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{a_1\nu}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

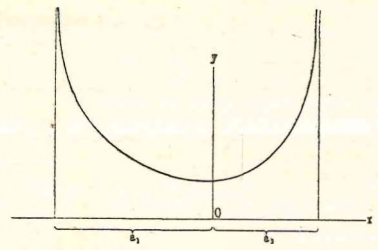
это—асимметрическая кривая ограниченнаго размѣра, у которой максимумъ около середины (фиг. 16).

Во-вторыхъ,

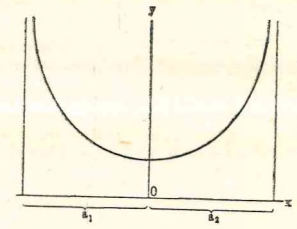
$$y = C\left(\frac{x}{a_1}-1\right)^{-\nu a_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

въ этомъ типѣ ордината y измѣняется отъ безконечности до нуля при измѣненіи x отъ $x=a_1$ до $x=a_2$ (фиг 17). Эта кривая смахиваетъ на порядокъ, который встрѣчается въ національно-экономической проблемѣ *), а также на законъ дѣтской смертности (см. фиг. 23).

$$y = C\left(1-\frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1}\left(1+\frac{x}{a_2}\right)^{-\nu a_2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

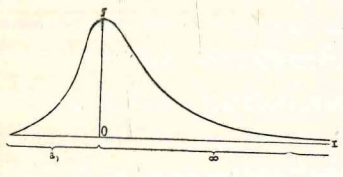


Фиг. 18.

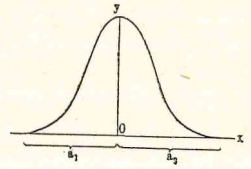


Фиг. 19.

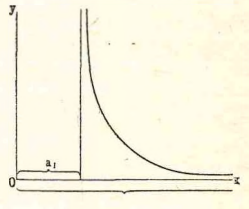
это—асимметричная кривая ограниченнаго протяженія съ минимумомъ около середины, ежели $\nu\,.\,(a_1-a_2)>0$ (фиг. 18), и въ серединѣ, ежели $\nu>0$ и $a_1=a_2$ (фиг. 19). Это опусканіе кривой внизъ въ серединѣ, говоритъ Пирсонъ, вовсе не представляется какимъ либо необычнымъ въ статистикѣ ходомъ кривой.



Фиг. 20.



Фиг. 21.



Фиг. 22.

Однако же, вопреки Пирсону, этотъ родъ статистическихъ кривыхъ, какъ мы уже сказали (см. стр. 505—506), не можетъ быть доказательно подведенъ подъ аналитическую форму (III) съ минимумомъ ординаты y, какъ на фиг. 18 и 19. Тутъ имѣемъ мѣсто въ массовыхъ явленіяхъ парадоксальный случай борьбы, который назовемъ *парадоксомъ Пирсона*. Согласиться здѣсь съ Пирсономъ было бы ошибочно.

Выходъ изъ этого парадокса уже указанъ выше. Тутъ нужно обсудить причины минимума y, обнаруженнаго статистическимъ «пунктиромъ частости» и проведеннымъ по пунктиру «полигономъ»; потомъ нужно, соотвѣтственно причинамъ,

---

*) Въ статистикѣ цѣнъ. Соотвѣтствующій графикъ приведенъ въ книгѣ Лорана и въ моей книгѣ по математической статикѣ.

разложить ординату y по «формулѣ сложенія кривыхъ вѣроятности» (см. стр. 506). Самъ Пирсонъ пользуется этимъ сложеніемъ, какъ показано на чертежѣ 23. Парадоксы Пирсона неизбѣжны въ случаѣ *многомодальныхъ* опытныхъ кривыхъ.

По изъятіи этого парадокса Пирсоновскія интуиціи въ массовыхъ явленіяхъ оправдываются при условіи теоремы II, § 28, если располагать еще параметромъ n, указаннымъ въ § 27, величина котораго (вліяющая на C, ν, a_1, a_2) приспособляется къ нерасхожденію кривой съ пунктиромъ.

Обсуждаемая кривая получаетъ иногда интересную, но менѣе основную подформу, изображенную на фиг. 20. Она получится, если сдѣлаемъ въ уравненіи (II) число a_2 безконечностью; получимъ:

$$y = C \cdot \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1} \cdot e^{-\nu x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV')}$$

Сдѣлаемъ въ уравненіи (I) $a_1 = a_2$. Получимъ:

$$y = C\left(1 - \frac{x^2}{a_1^2}\right)^{\nu a_1}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

это симметрическая, но ограниченная по размѣру кривая, представленная на фигурѣ 21. Максимумъ ея ординаты лежитъ въ срединѣ.

Положимъ въ уравненіи (V) $\nu = pa_1$ и сдѣлаемъ $a_1 = \infty$. Получимъ:

$$y = Ce^{-px^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VI)}$$

Это нормальная кривая Гаусса и Лапласа.

Положимъ въ уравненіи (II) $a_2 = \infty$. Получимъ:

$$y = C\left(\frac{x}{a_1} - 1\right)^{-\nu a_1} e^{-\nu x}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII)}$$

въ этой асимметрической кривой ордината убываетъ отъ ∞ до 0 при неограниченномъ возрастаніи x отъ a_1 (см. фиг. 22).

Замѣтимъ, что ограниченность или, напротивъ, безграничность протяженія скалы x устанавливается самою природою альтернативнаго явленія x и логикой неравенствъ и крайнихъ предѣловъ въ смыслѣ Л. Кутюра (см. выше стр. 434—435). Но явленія x въ предѣлахъ всей даже ограниченной скалы не всегда возможно охватить только однимъ изъ типовъ Пирсоновскихъ кривыхъ; случаи сейчасъ указанныхъ «Пирсоновскихъ парадоксовъ» часто мѣшаютъ этому обхвату. Болѣе же узкія, но все еще значительныя протяженія кусковъ скалы, по нашему, намѣчаются кругами «сходимости», о которой рѣчь была на страницахъ 505 и 191. Если соединить всѣ эти куски, то получится усложненная діаграмма вѣроятности явленія x, аналитическія части которой образуютъ между собою угловыя точки.

Подобныя усложненныя діаграммы весьма распространены также и въ теоріи электрическихъ потенціаловъ; подобныя діаграммы мы назвали въ одной своей работѣ по электричеству «конструктивно-аритмологическими» *).

Установленная нами въ §§ 28 и 29 классификація нормальныхъ и ненормальныхъ случаевъ поправляетъ Пирсона, сохраняетъ все свое значеніе для *ограниченной* скалы x. Если же скала x *безграничная* въ одну изъ сторонъ или въ обѣ стороны, то тутъ парадоксы, названные нами «краевыми», могутъ чрезвычайно гипертрофироваться и родить «чюдеса», которыхъ Пирсонъ и другіе авторы даже не предполагаютъ, но которыхъ я касаюсь въ трудѣ «Новыя основанія ученія о вѣроятностяхъ суммъ и среднихъ величинъ». Эти безграничныя діаграммы съ краевыми парадоксами (назовемъ ихъ «широкими воротами») трудно изслѣдуются; проще входить въ курсъ дѣлъ «тѣсными воротами», т. е. со скалами x значительнаго, но ограниченнаго размѣра, притомъ подраздѣленнаго на куски, какъ сказано.

*) *П. А. Некрасовъ*: «Аналитическое и аритмологическое продолженіе потенціала изъ одной граничной области въ другую въ электрическихъ цѣпяхъ». (Извѣстія Электротехническаго Института Имп. Александра III за 1912 г. С.-Петербургъ).

Скалы x весьма значительнаго, но всетаки ограниченнаго размѣра получаются при большомъ подсчетѣ простыхъ тиражей явленій; этотъ учетъ мы разсмотримъ еще разъ; онъ при изслѣдованіи массовыхъ жизненныхъ процессовъ представляетъ громаднѣйшій интересъ.

§ 32. Приблизительное представленіе графическихъ закономѣрностей простого тиража противоположныхъ несовмѣстимыхъ явленій E и не—E при весьма большихъ рядахъ повторяемыхъ аналогическихъ испытаній, независимыхъ и зависимыхъ.

Характеръ этихъ закономѣрностей представляетъ капитальный научный, философскій и практическій интересъ; ибо умозрительно весь общественно-феноменалистическій и физико-метеорологическій массовый процессъ (міръ фактовъ) сводится естественно и технически (нормативно, символически) къ простому тиражу и сосчитыванію элементарнѣйшихъ явленій. Притомъ въ умѣ и частію на бумагѣ представляются (проектируются) съ помощію графическихъ закономѣрностей и съ помощію сужденій теоріи взаимоотношеній (см. гл. I—IV) всѣ мысленныя конъюнктуры (статическія и кинетическія) между составными частями Цѣлаго, Всего, связанными другъ съ другомъ болѣе или менѣе отдаленно (см. Предисловіе).

Различимъ слѣдующіе три рода I, II, III простыхъ тиражей *).

I. Первый родъ простыхъ тиражей имѣетъ мѣсто тогда, когда происходитъ тиражъ того или другого изъ несовмѣстимыхъ противоположныхъ явленій E и F при указанныхъ на стр. 256—260 условіяхъ теоремы Пуассона (т. е. при *независимости* явленій въ повторяемыхъ опытахъ). Тутъ имѣетъ силу діаграмма $y = T(x)$, указанная на стр. 199 **) и приблизительно представляющая вѣроятность $\Delta P_{x,m}$ того, что при m испытаніяхъ явленіе E состоится x разъ. Эта діаграмма характеризуется слѣдующими представительными качествами:

1) Она въ серединной части при «нормальныхъ» заданіяхъ довольно добросовѣстно представительствуетъ вмѣсто $\Delta P_{x,m}$ и рисуется какъ *почти* симметрическая относительно модальной ординаты, колоколовидная кривая. Заданіе же будетъ нормальнымъ тогда, когда величина

$$mg\,(1) = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_mq_m$$

весьма велика и стремится къ безконечности при неограниченномъ возрастаніи m.

2) Она всегда представляетъ краевой «тихій» парадоксъ (изъянъ въ качествѣ преставителя за величину $\Delta P_{x,m}$) въ граничныхъ частяхъ скалы x, содержащейся между пунктами: $x = 0$ и $x = m$.

3) Она иногда вводитъ мыслителя въ обманъ, соотвѣтствующій «срединному тихому парадоксу», т. е. обманываетъ въ качествѣ представителя за величину

*) Изъ нихъ первый и третій роды суть основные для второго, являющагося результатомъ ихъ динамическаго сложенія при данныхъ законахъ, естественныхъ и нормативныхъ (техническихъ). Подробнѣе этотъ вопросъ разъясненъ въ четвертомъ моемъ отвѣтѣ академику А. А. Маркову, печатаемомъ въ III выпускѣ XXVIII тома Математическаго Сборника. Это именно сложеніе творческихъ силъ (причинъ) мы молчаливо разумѣли при выводѣ формулъ страницы 445.

**) Прошу исправить опечатки на страницѣ 199 въ строкѣ 16, указанныя въ спискѣ важнѣйшихъ опечатокъ.

$\Delta P_{x,m}$ въ области модальной ординаты, а затѣмъ и во всѣхъ прочихъ пунктахъ скалы x. Этотъ изъянъ бываетъ лишь тогда, когда величина

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_mq_m$$

недостаточно велика при большихъ значеніяхъ m, т. е. *когда вѣроятности* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *явленія* E *въ различныхъ испытаніяхъ весьма близки частію къ 1, частію къ 0.*

4) Она никогда не вводитъ мыслителя ни въ обманъ, соотвѣтствующій «сильнымъ» парадоксамъ, ни въ «особые случаи перваго рода».

II. Второй родъ простыхъ тиражей имѣетъ мѣсто тогда, когда въ процессѣ существуютъ элементы зависимости послѣдовательныхъ испытаній и повторяемыхъ явленій, при чемъ играетъ роль хронологическая субординація. Въ прежней характеристикѣ закономѣрностей при этомъ условіи измѣнится видъ самой производящей функціи $F(v)$ вѣроятностей $\Delta P_{x,m}$. Примѣрами могутъ служить тиражи, характеризуемые «гипергеометрическимъ рядомъ» Пирсона (стр. 519), рядомъ $F(v)$ задачи Д. Бернулли (стр. 325), рядомъ $F(v)$ задачи А. А. Маркова (стр. 341) и пр Теорема I, § 27, въ рядѣ зависимыхъ тиражей приведетъ къ опредѣленной діаграммѣ $y = T(x)$; и эта діаграмма будетъ при «нормальныхъ» (по § 28) заданіяхъ довольно добросовѣстно представлять пунктиръ вѣроятности $\Delta P_{x,m}$. Характеръ же діаграммы, уклоняющейся отъ нормальнаго случая, зависитъ отъ величины $m \cdot g(u)$ типа, указаннаго въ § 27 при $\Pi(u) = F(u)$; кромѣ «тихихъ» парадоксовъ, при этихъ обстоятельствахъ могутъ встрѣчаться парадоксы прямопротивоположнаго качества, а именно «сильные» парадоксы, о которыхъ рѣчь была въ части II, стр. 325 и 343, и въ которыхъ $mg(u)$ бываетъ весьма большою величиною порядка, нарушающаго признакъ устойчиваго закона большихъ чиселъ (стр. 319—318).

III. Третій родъ простыхъ тиражей имѣетъ мѣсто тогда, когда учитывать вѣроятности не приходится, ибо въ процессѣ отсутствуютъ элементы независимости, обусловливающіе случайность, недостовѣрность, «свободную причинность». Здѣсь имѣетъ мѣсто только необходимость, достовѣрность и абсолютная *крѣпостная* соціологическая зависимость,—тотъ предѣлъ общественной тиранія, который идеализируется въ соціалдемократическомъ міросозерцаніи, отрицающемъ личныя независимыя права и право личной собственности.

Истина, конечно, не мирится съ крайностями, усѣкаетъ, ограничиваетъ ихъ въ худомъ концѣ и пролагаетъ средній путь, соотвѣтствующій второму роду простыхъ тиражей и страховому отъ бѣдствій праву въ жизни Цѣлаго и его составныхъ частей.

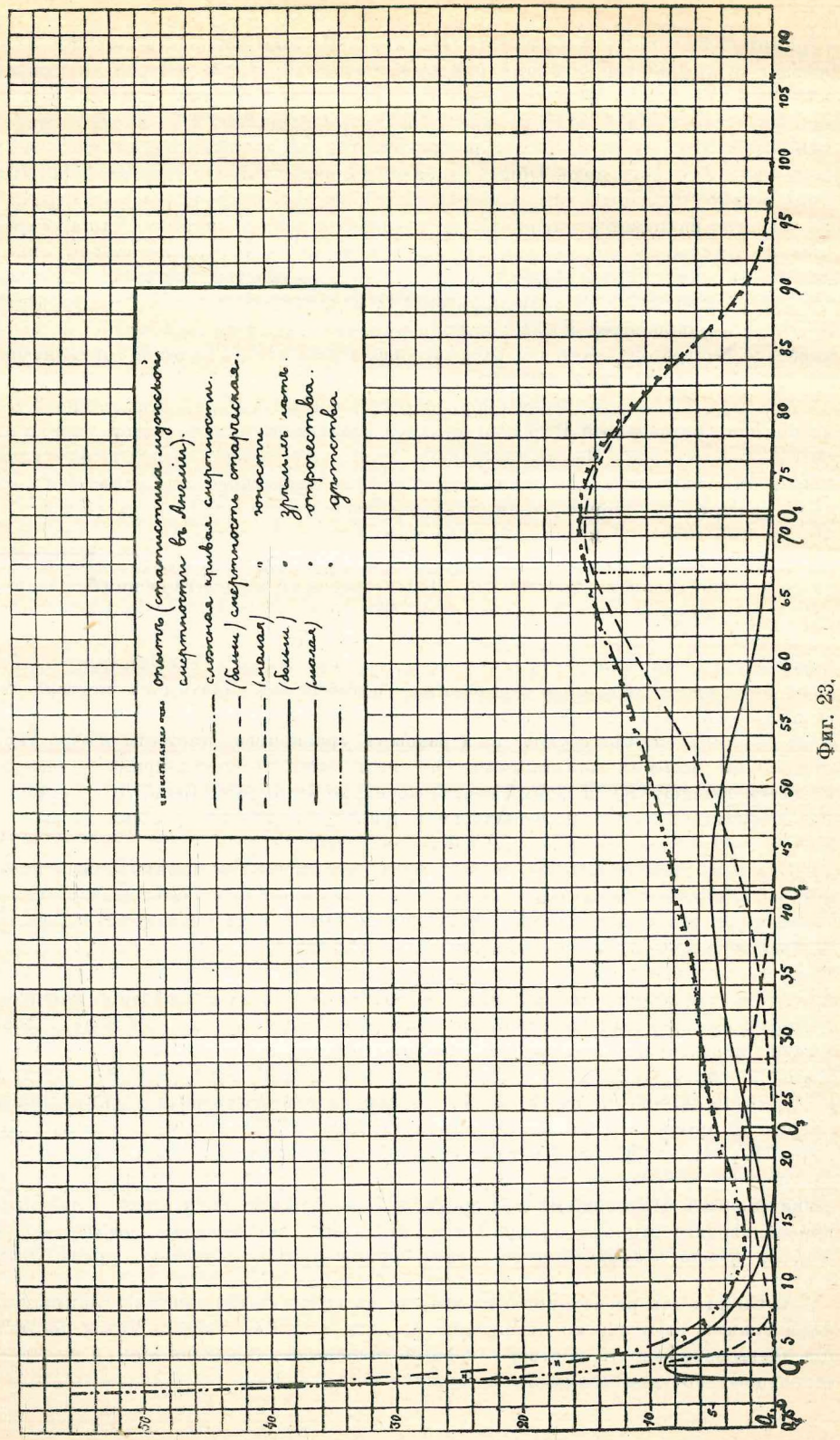
§ 33. Кривая смертности, полученная по формулѣ сложенія кривыхъ соотвѣтственно смертнымъ причинамъ пяти возрастовъ жизни.

Правильные (непарадоксальные) типы «кривой вѣроятности», дедуктивно-индуктивнаго близнеца «пунктира частости», находятъ себѣ важное приложеніе въ графическомъ изображеніи закона смертнаго тиража, вымиранія людей, въ отношеніи къ данному числу рожденій.

Такой законъ представленъ англійскими математиками на чертежѣ № 23 *) по оффиціальнымъ даннымъ. англійской статистики (опытное основаніе), причемъ принята во вниманіе исключительно смертность *мужского* населенія; смертность женскаго пола пришлось бы изобразить нѣсколько иной діаграммой.

Возрастъ отсчитывается по горизонтальнымъ линіямъ, причемъ каждое дѣленіе скалы относится къ двухлѣтнему періоду, т.-е. одинъ годъ соотвѣтствуетъ подѣленію

*) Чертежъ этотъ и поясненіе къ нему извлекаемъ изъ статьи *Б. Д. Хрущева*: Смертность и пять возрастовъ жизни. (Научное Слово. Кн. II, за 1903 годъ. Москва). Сохраняемъ образность выраженій автора.



Фиг. 23.

горизонтальной линіи (направленію абсциссъ). По вертикальному направленію нанесено число смертей даннаго возраста. Такъ, напримѣръ, смертность современнаго англичанина на 72 году жизни (т.-е. 71,5 лѣтъ) среднимъ числомъ равняется приблизительно $15^3/_4$ человѣка на каждую тысячу жителей мужского пола, т.-е. немного меньше 16-ти человѣкъ на тысячу, изъ рожденныхъ въ одномъ и томъ же году лицъ мужского пола. Общая діаграмма смертности (см. чертежъ № 23) имѣетъ ходъ весьма отличный отъ всѣхъ нами раньше разсмотрѣнныхъ (см. стр. 65—57, 83—84); она начинается очень высоко съ лѣвой стороны чертежа (линія *съ крестиками* на чертежѣ № 23), быстро опускается къ нижней горизонтальной линіи до минимума около 14-ти лѣтняго возраста (со смертностью около 2,4 человѣкъ на тысячу рожденныхъ одновременно), затѣмъ медленно поднимается съ возрастомъ, достигаетъ наибольшей послѣ рожденія высоты около $71^1/_2$ года жизни, послѣ чего довольно быстро опускается и окончательно сливается съ нижней горизонтальной линіей въ возрастѣ около 106 лѣтъ.

Эта первоначальная линія смертности по возрастамъ послужила точкой отправленія для изслѣдованій Пирсона, который задался мыслью разгадать причины ея своеобразнаго хода. На то блестящее разрѣшеніе загадки, которое ему удалось найти, онъ былъ наведенъ однимъ замѣчаніемъ извѣстнаго изслѣдователя «массовыхъ явленій» въ многочисленныхъ народонаселеніяхъ, профессора Лексисъ (Lexis; въ 1875 году). Лексисъ обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что конецъ кривой смертности напоминаетъ своимъ ходомъ правую половину обыкновенной симметричной кривой вѣроятности. Подготовленный математическимъ анализомъ сложныхъ кривыхъ линій такого рода, Пирсонъ провелъ предположеніе, что построенная изъ таблицы смертности волнистая линія, о которой мы только что говорили, есть, въ сущности, *сложная* линія, *составленная складываніемъ* ординатъ *пяти болѣе простыхъ кривыхъ вѣроятностей*, которыя всѣ указаны на чертежѣ № 23 каждая особо, какъ видно изъ объяснительнаго текста на томъ же чертежѣ *) Пять кривыхъ соотвѣтствуютъ пяти разнымъ уравненіямъ частости и вѣроятности. каждая съ особыми константами. Эти пять составляющихъ кривыхъ оказались въ своей окончательной формѣ настолько вѣрно установленными, что сложеніемъ ихъ получилась общая, первоначальная кривая, по которой съ поразительною точностью улеглись всѣ фактическія наблюденія таблицъ.

Здѣсь мы встрѣчаемся съ особаго рода группировками причинъ, результатомъ которыхъ получается пятикратная скученность смертей около пяти модальныхъ вертикальныхъ линій. Все многочисленное разнообразіе тѣхъ условій, благодаря которымъ можетъ наступить смерть въ какомъ-нибудь возрастѣ, а съ ними и тѣхъ, которыя противодѣйствуютъ смерти, находясь внутри самого человѣческаго организма или кроясь въ какихъ-нибудь внѣшнихъ обстоятельствахъ существованія, сводится къ пяти разнымъ группамъ или разрядамъ. Каждая изъ этихъ группъ выражена отдѣльной кривой вѣроятности, средоточіе которой находится около одной изъ вершинъ этихъ кривыхъ или около одной изъ наибольшихъ пяти разныхъ вертикалей (0_5, 0_4, 0_3, 0_2, 0_1,—на чертежѣ № 23). Но каждая изъ этихъ пяти группъ причинъ смерти не пріурочена къ одному какому-нибудь опредѣленному возрасту (напримѣръ $71^1/_2$ годамъ, 42, 23, 3 и гдѣ то вскорѣ послѣ зачатія), а разлита на большомъ протяженіи, дѣйствуетъ въ довольно широкихъ предѣлахъ, выраженныхъ представительнымъ отклоненіемъ отъ средней, характернымъ для данной составляющей кривой вѣроятности. Для каждаго изъ пяти возрастовъ: *дѣтскаго, отроческаго, юношескаго, зрѣлаго и старческаго* есть своя группа причинъ, частью общаго, частью

*) Смертность региструется въ Англіи въ связи съ причинами, общими и специфическими, зависящими отъ профессій и отъ болѣзней возраста. Такая регристрація даетъ возможность чертить «кривыя условныхъ вѣроятностей» и складывать эти кривыя по указанному выше правилу (см. стр. 506).

спеціальнаго рода, совокупностью которыхъ скашивается жизнь именно въ эти годы существованія. Пирсонъ приводитъ такое картинное сравненіе: толпа изъ тысячи человѣческихъ существъ мужского пола, зачатыхъ одновременно въ Англіи (такъ какъ статистика взята изъ этой страны), шествуетъ медленнымъ шагомъ по длинному пути (длинному «мосту жизни», the bridge of life, какъ выражается Пирсонъ); недалеко отъ этого пути засѣло пять стрѣлковъ, безостановочно стрѣляющихъ въ толпу существъ, растущихъ, зрѣющихъ, мужающихъ и старѣющихъ по этому пути. Каждый изъ пяти стрѣлковъ бьетъ въ одну опредѣленную изъ пяти цѣлей, расположенныхъ непосредственно за шествующей толпой, въ мѣстахъ пяти наибольшихъ вертикалей чертежа; причемъ каждый изъ пяти стрѣлковъ бьетъ изъ своего спеціальнаго смертоноснаго оружія и съ мѣткостью, ему лично присвоенной. Изъ мимо идущей толпы, конечно, будетъ убито больше всего народа въ моментъ прохожденія напротивъ самого центра цѣли; но вѣдь не всѣ выстрѣлы ложатся одинаково центрально, и часть ихъ разбрасывается по сторонамъ и попадаетъ въ остальные отдѣлы толпы, частью въ недошедшихъ еще до цѣли, частью же далеко перешедшихъ за нее, болѣе юныхъ или болѣе старыхъ людей. *Мѣткость* стрѣльбы совершенно соотвѣтствуетъ статистическому «модулю», опредѣляющему мѣру точности (см. 307, 318 и 398). Самое же оружіе можетъ имѣть различныя степени смертоносности, начиная съ лука и стрѣлы и кончая скорострѣльной пушкой Максима.

Шествуя тихимъ шагомъ по жизненному пути, наша толпа могла бы воскликнуть съ поэтомъ:

«Что день, сдаемъ могилѣ мертвеца».

Ряды живущихъ рѣдѣютъ то быстрымъ, то медленнымъ темпомъ; къ концу дѣтскаго возраста осталось въ живыхъ изъ тысячи, вмѣстѣ зачатыхъ, лишь около семисотъ человѣкъ, а ко времени наступленія старости—едва половина. Эта послѣдняя половина вымираетъ всего быстрѣе около 71 года, а уже около столѣтняго возраста попадается только одинъ человѣкъ на 10 тысячъ членовъ первоначальной толпы, стоящей на краю своей могилы.

Такова общая картина. Теперь посмотримъ подробности каждой изъ пяти составляющихъ, какъ бы элементарныхъ, кривыхъ линій смертности.

Начнемъ со старости. Разсматривая изогнутую линію этого возраста, мы видимъ, какъ она очень полого склоняется къ нижней горизонтальной линіи и пересѣкаетъ ее въ возрастѣ около 15—17 лѣтъ. Стрѣлокъ, который въ вышеприведенномъ картинномъ сравненіи является эмблемой всей группы причинъ (свойствъ организма, болѣзней, несчастныхъ случаевъ и т. п.), поражающихъ преимущественно старческій возрастъ, цѣлитъ въ то мѣсто, гдѣ толпа шествуетъ на семьдесятъ второмъ году со дня своего рожденія; но мѣткость его стрѣльбы такова, что его пули попадаютъ не только въ людей болѣе старыхъ вплоть до 107 года жизни, но и на гораздо болѣе молодыхъ, до 15 — 17-тилѣтнихъ юношей включительно. Группа причинъ, приводящихъ чаще всего человѣческую жизнь къ концу на 72 году, дѣйствуетъ уже съ довольно ранняго возраста (15-тилѣтняго), продолжаетъ грозить смертью до самаго преклоннаго возраста (107-тилѣтняго), крайне рѣдко достигаемаго. Теперь мы знаемъ, что такая группа существуетъ; дальнѣйшему изслѣдованію физіологовъ, гигіенистовъ и врачей будетъ подлежать болѣе полный и подробный анализъ этихъ совокупно и въ раздробь дѣйствующихъ обстоятельствъ. Не во *всѣхъ* условіяхъ жизни придется тутъ разбираться, а въ нѣкоторой ограниченной ихъ группѣ, чаще всего подкашивающей жизнь на семьдесятъ второмъ году и дѣйствующей преимущественно въ предѣлахъ между 54-мъ и 80-мъ годами (т.-е. 67—13 и 67 + 13, такъ какъ «представительное отклоненіе» тутъ около 13 лѣтъ, а *средній* возрастъ старости = 67 годамъ).

Характерна и правая сторона старческой линіи смертности, гораздо болѣе круто спускающаяся къ нижней горизонтальной и пересѣкающая ее на сто седь-

момъ году жизни. По смыслу теоріи этотъ 107-й годъ слѣдовало бы считать истиннымъ предѣломъ жизни въ мужскомъ населеніи современной Англіи, но достовѣрность котораго была бы достаточной лишь при гораздо болѣе обстоятельномъ статистическомъ матеріалѣ. Тутъ получается нѣчто вродѣ *естественной смерти*, условія которой могутъ быть, очевидно, налицо уже начиная съ весьма ранняго возраста, смотря по устройству даннаго, индивидуальнаго организма (преждевременное въ нѣкоторомъ смыслѣ старчество).

Слѣдующія двѣ составляющія линіи смертности, имѣютъ довольно рѣзко симметричный обликъ: это линіи *зрѣлаго возраста и юношества*. Смертность зрѣлаго возраста имѣетъ свой максимумъ на сорокъ второмъ году жизни и, благодаря симметричному распредѣленію, дѣйствуетъ равномѣрно какъ съ дѣтства, такъ и до старости. Мѣткость, съ которой причины этой второй группы поражаютъ проходящую толпу, почти такая же, какъ и въ группѣ старческой смертности; но общее количество пораженныхъ тутъ гораздо меньше: ихъ набирается только 173 лица изъ всѣхъ 1000 ровесниковъ, рожденныхъ въ одномъ и томъ же году, менѣе половины унесенныхъ первой группой причинъ, причинъ старческой смертности (484).

Второе симметричное распредѣленіе смертности имѣетъ главную скученность на двадцать третьемъ году жизни, т.-е. около нѣкоторой поворотной точки развитія, когда въ организмѣ начинаютъ проявляться новыя функціи и вступаютъ въ силу всякія новыя жизненныя отвѣтственности. Это есть то критическое время внутренней переработки организма, когда, судя по нѣкоторымъ статистикамъ, смертность женскаго пола значительно превосходитъ мужскую (напримѣръ, во Франціи). Въ этой области человѣческой жизни умираетъ очень мало (51), почти также мало, какъ въ дѣтскомъ возрастѣ, когда умираетъ всего 46 изъ первоначальной тысячи народившихся существъ.

Смертность *отроческаго возраста* имѣетъ зато очень рѣзко выраженный типъ несимметрическаго распредѣленія. Наибольшая смертность отрочества выпадаетъ на долю третьяго года, средняя же смертность приходится на шестой годъ, т.-е. почти на три года позже. Распредѣленія смертности такого типа попадаются между «кривыми» заболѣваемости по возрастамъ отъ нѣкоторыхъ инфекціонныхъ болѣзней: напримѣръ, скарлатины и дифтерита, этихъ по преимуществу дѣтскихъ болѣзней.

Наиболѣе рѣзко боковитый характеръ имѣетъ ходъ смертности въ *дѣтскомъ возрастѣ*, которую Пирсонъ совершенно выдѣлилъ изъ общей смертности ранняго дѣтства. Такое раздѣленіе дѣтской смертности на два самостоятельныхъ отдѣла дало возможность получить полное совпаденіе съ наблюденными результатами общаго хода смертности въ человѣческой жизни. До этого вычисленные результаты не укладывались по линіи, полученной складываніемъ составляющихъ линій, и, кромѣ того складываніе не налаживалось, пока линія дѣтской смертности не была передвинута такимъ образомъ, чтобы начинаться не съ года рожденія, а девятью мѣсяцами раньше, т.-е. съ момента зачатія той тысячи человѣческихъ существъ, судьбу, смертность которыхъ по возрастамъ Пирсонъ хотѣлъ изслѣдовать. Какъ только онъ догадался ввести такіе новые пріемы, то получился блестящій результатъ: всѣ факты наблюденія улеглись по вычисленной изогнутой линіи (на чертежѣ № 23 всѣ крестики попали на сплошную изогнутую линію общаго хода смертности въ продолженіе всей жизни). Весь ходъ явленія сталъ понятенъ.

Фактъ необходимости передвинуть линію *дѣтской* смертности особенно знаменателенъ. Оказывается, что самимъ актомъ рожденія не производится полнаго разрыва въ ходѣ смертности, которая протекаетъ по одному и тому же закону *съ самаго момента зачатія*, и что можно вычислить «теоретически» смертность плода въ различное время послѣ зачатія и вплоть до рожденія. Провѣрить эту теоретическую часть кривой распредѣленія смертности, т. е. смертность въ разные мѣсяцы жизни плода, конечно, довольно трудно, за неимѣніемъ хорошей госпитальной

статистики выкидышей; тѣмъ не менѣе опытная свѣрка теоретическаго хода съ данными, почерпнутыми изъ практики нѣсколькихъ лондонскихъ больницъ, дала настолько удовлетворительное совпаденіе вычисленныхъ съ наблюденными смертностями по возрастамъ, что законъ, повидимому, вѣренъ и можетъ быть лишь немного исправленъ при дальнѣйшемъ обогащеніи фактическаго матеріала. Смертность дѣтскаго возраста весьма большая: она составляетъ 246 случаевъ изъ всѣхъ смертей тысячи существъ, зачатыхъ одновременно, т.-е. почти 25% или одну четверть всѣхъ тысячи лицъ. Ходъ можно предвидѣть хотя бы въ его общихъ чертахъ.

Огромную смертность этой первой эпохи жизни слѣдуетъ сопоставить со смертностью старческаго возраста, въ которомъ уносится 48% или около половины всей этой нами разсматриваемой тысячи существъ. Слѣдовательно, можно сказать, что приблизительно три четверти всѣхъ смертей выпадаютъ на раннее дѣтство и старость, взятыхъ вмѣстѣ; промежуточные же возрасты страдаютъ гораздо меньше: въ суммѣ на одну четверть общаго количества смертей.

Если еще суммировать смертности дѣтскаго и отроческаго возраста, то мы находимъ, что на нихъ выпадаетъ около $^1/_3$ всей человѣческой смертности. Нѣтъ никакого сомнѣнія, что именно тутъ мы имѣемъ ключъ къ разрѣшенію вопроса о причинахъ застоя въ ростѣ народонаселенія многихъ западно-европейскихъ странъ.

Обозрѣвая результаты, къ которымъ привело насъ изслѣдованіе о связи между человѣческой смертностью и возрастами жизни, мы можемъ указать, какъ на одинъ изъ главныхъ, на несуществованіе рѣзко обособленныхъ и совершенно самостоятельныхъ возрастовъ. Жизнь протекаетъ цѣлостно и плавно отъ начала и до конца: *существуютъ собственно не отдѣльные возрасты, а пять особыхъ группъ причинъ или условій, созидающихъ жизнь и влекущихъ за собою смерть*; большинство изъ нихъ дѣйствуютъ въ теченіе долгихъ эпохъ, иныя чуть не во всю жизнь, но онѣ главенствуютъ и преобладаютъ въ извѣстные годы существованія, когда ихъ особенно удобно узнать, изучить и извѣдать.

Должно сказать, что это понятіе *цѣлостности* и *плавности* теченія жизни населенія есть *номографическая абстракція*, отъ которой какъ отъ меридіана своего рода, дѣлаются *координированные* отсчеты *отклоненій*, обычно бывающихъ въ *дѣйствительности* (въ конкретѣ) ежегодно у отдѣльныхъ поколѣній, у ровестниковъ по году рожденія (см. ниже, § 34).

Модальная наименьшая ордината фигуры 23, падающая на возрастъ около 14 л., соотвѣтствуетъ Пирсоновскому парадоксу, отмѣченному на стр. 512 при поясненіи фигуръ 18 и 19. Пирсонъ не побѣдилъ его прямо, а обошелъ его въ тылъ, съ помощію формулы (20*c*) стр. 506. Формально такой обходъ можно объяснить, кромѣ борьбы причинъ, существованіемъ здѣсь *особой* модулярной діаграммы, представленной на фиг. 14.

Этого рода модальности еще чаще встрѣчаются въ политической экономіи, гдѣ въ установленіи цѣнъ борются производители и потребители, нанимающіе и нанимаемые, провозные тарифы и разстояніе рынковъ, куда перебрасывается товаръ, міровой рынокъ и внутренніе рынки. и пр.

§ 34. Смертные балансы каждаго года. Кассы на взаимостраховомъ началѣ. Пенсіонная касса учителей и учительницъ. Ростъ правъ.

I. Численность $N_{x,\tau}$ фактически умершихъ въ году τ отъ Рождества Христова въ возрастѣ x лѣтъ, въ странѣ съ общимъ числомъ N жителей, констатируется *иная*, нежели соотвѣтствующая номографическая численность $N'_{x,\tau}$ умершихъ, полученная на основаніи абстрактной діаграммы или таблицы. Разность

$$\delta N_{x,\tau} = N_{x,\tau} - N'_{x,\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

есть умноженная на N, біолого—историческая варіація типа (10), стр. 470. Назовемъ эту варіацію *смертнымъ балансомъ* за годъ τ отъ Рождества Христова.

Балансы $\delta N_{x,\tau}$ изъ года въ годъ *вибрируютъ*; предѣлы этой вибраціи теоретически формируются на основаніи обобщеній теоремъ Я. Бернулли и Пуассона; статически эти предѣлы констатируются изъ ряда лѣтъ, отмѣчая годы *форсмажерныхъ* балансовъ, *отрицательныхъ* (оптимистическихъ) и *положительныхъ* (пессимистическихъ). Годы затяжныхъ неурожаевъ, годы затяжныхъ истощающихъ ошибокъ экономическихъ взаимоотношеній съ міровымъ рынкомъ и на внутреннемъ рынкѣ, годы эпидемій, затяжныхъ междусобныхъ и внѣшнихъ войнъ, скажутся, конечно, именно въ положительномъ, пессимистическомъ смертномъ балансѣ, — скажутся иногда рѣзче, пагубнѣе, нежели сказывается въ томъ же подсчетѣ быстрая война, безъ волокиты водворяющая законность, миръ и порядокъ, на абсолютныхъ коренныхъ истинныхъ основаніяхъ, очищая источникъ гнилостныхъ недоразумѣній. Напротивъ, годы торжества законности, мира и порядка скажутся въ отрицательномъ, оптимистическомъ смертномъ балансѣ. Между этими крайними границами размѣстятся остальныя значенія смертнаго баланса (1), причемъ каждому пункту скалы $\delta N_{x,\tau}$ будетъ соотвѣтствовать своя вѣроятность $\Delta p_{\delta N_{x,\tau}}$.

II. Сказанное относится какъ къ сложной кривой смертности населенія, соотвѣтствующей совокупности всѣхъ причинъ смертнаго тиража, такъ и къ составляющимъ кривымъ смертности, соотвѣтствующимъ какой либо группѣ причинъ и одному какому либо классу населенія; напримѣръ, классу учителей и учительницъ начальныхъ училищъ, пенсіонная касса которыхъ, сосредоточенная при министерствѣ нар. просвѣщенія, наблюдаетъ смертность среди этой группы людей съ ихъ семействами (привожу эту кассу въ примѣръ по тому, что онъ мнѣ хорошо знакомъ).

Важность элементарной формулы (1) опредѣляется тѣмъ соображеніемъ, что всѣ хозяйственные экономическіе вопросы крупныхъ кооперативовъ могутъ быть рѣшаемы съ помощью именно этой формулы и ея интеграцій то по скалѣ вѣроятности $\Delta p_{\delta N_{x,\tau}}$ выхода перемѣннаго значенія баланса $\delta N_{x,\tau}$, то по скалѣ возраста x. Такъ въ кассахъ, построенныхъ на взаимостраховомъ началѣ (какъ вышепомянутая учительская касса), исчисленіе въ порядкѣ отчета (заднимъ числомъ) состоявшихся то прибылей, то убытковъ кассы отъ смертнаго тиража сводится всякій разъ къ исчисленію интегралова типа

$$\int_{x'}^{x''} f(x) \,.\, \delta N_{x,\tau}\, dx.$$

гдѣ $f(x)$ есть финансовый коеффиціентъ, извлекаемый изъ *утвержденныхъ таблицъ*.

Смѣтное же исчисленіе, соотвѣтствующее страховому предвычисленію обязательствъ будущаго времени, обезпечиваемыхъ накопляемыми фондами и резервами, сводится къ исчислнію интегралова типа:

$$\int_{x'}^{x''} f(x) \,.\, \Delta p_{\delta N_{x,\tau}} \,.\, N_{x,\tau}\, dx.$$

При исчисленіи достаточныхъ фондовъ должно принять въ соображеніе также теорію *гарантій*, изложенную на стр. 347—349 и доведенную до элементарной простоты на стр. 262—264.

Фонды и порядокъ ихъ накопленія и расходованія опредѣляются *уставами*.

Въ пенсіонной учительской кассѣ установлены: 1) фондъ ξ_1 участниковъ кассы, 2) фондъ ξ_2 пенсіонеровъ, 3) фондъ ξ_3 женъ участниковъ (резервъ), 4) фондъ ξ_4 вдовьихъ пенсій, 5) сиротскій фондъ ξ_5 (резервъ), 6) фондъ ξ_6 назначенныхъ сиротскихъ пенсій и 7) фондъ η запасный, покрывающій нехватки остальныхъ фондовъ. Фонды, подобно сосудамъ съ финансовою валютою, иносказательною *капельною* жидкостью, наполняются и истощаются какъ бассейны. Главный источникъ пополненія: 1) взносы казны и содержателей училищъ въ размѣрѣ 6% содержанія учителей, 2) взносы въ такомъ же размѣрѣ самихъ учителей, 3) доходы отъ процентныхъ бумагъ, хозяйственно пріобрѣтаемыхъ кассой, выгадывая прибыль, по примѣру весьма крупныхъ хозяйствъ, съ помощью долгосрочныхъ операцій и по закону большихъ чиселъ, и 4) разные случайные доходы. Между всѣми фондами η, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ξ_5, ξ_6, существуетъ открываемое статистическимъ интерполяціоннымъ методомъ взаимоотношеніе типа (19), стр. 437; фонды эти *подобны сообщающимся бассейнамъ*. Коэффиціенты β, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 будутъ зависѣть, съ одной стороны, отъ *формальныхъ* условій, т. е. отъ установленныхъ таблицъ, счетовъ и правилъ кассы, и, съ другой стороны, отъ числовыхъ явленій инвалидности и смертности учащаго персонала съ семействами и отъ биржевыхъ курсовъ, колеблющихъ стоимость портфеля процентныхъ бумагъ.

Однако пенсіонная учительская касса слишкомъ молода (она существуетъ съ 1900 г.), чтобы дать достаточный статистическій фактическій матеріалъ, приблизительно опредѣляющій коеффиціенты β, $a_1 \ldots, a_6$. Проще опредѣляются попарныя взаимоотношенія типа (6), стр. 432.

III. Обобщая этотъ примѣръ, замѣтимъ, что финансовые фонды и *капельный* ростъ правъ всѣхъ сословій и классовъ государства, трактуемые въ нашей книгѣ: „Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты“, могутъ быть подведены подъ аналогическія формулы теоріи сообщающихся сосудовъ камеръ (съ „жидкостью“ въ видѣ финансовой валюты), подъ формулы теоріи взаимоотношеній типа (6), стр. 432, и типа (19), стр. 437, и теоріи потенціаловъ V и S (см. стр. 131—134 и 337). Инженеры юридическихъ знаній тутъ должны постулировать и шлюзировать «гидродинамическую» машину государственнаго и національнаго кредита такъ, чтобы она лила работающую и награждающую финансовую воду именно на нашу сторону, а не на мельницу заграничныхъ Ротшильдовъ.

При этомъ годовымъ бюджетомъ государства и его самоуправляющихся (за счетъ самообложенія, по законамъ земскаго и городского мѣстнаго управленія) территоріальныхъ единицъ ставятся (примѣнительно къ юридической теоріи, намѣченной въ части I, §§ 6_1, 6_2 и 6_3) слѣдующія задачи: 1) критически согласовывать дѣйствительное употребленіе отдѣльныхъ кредитовъ въ дѣло съ ихъ законнымъ назначеніемъ, примѣняя къ критикѣ раздробленныхъ отпусковъ и погашеній кредита не только букву уставовъ, но и критеріи и формулы математической статистики и законовъ большихъ чиселъ; 2) опредѣлять въ цѣляхъ не только *качественнаго*, но и *количественнаго* критическаго анализа *титулы* и *размѣры* фондовъ, питаемыхъ кредитами, отыскивая общее взаимоотношеніе типа (19) стр. 437 между спеціальными фондами дѣлъ страны, какъ сообщающимися сосудами (камерами) финансовой «жидкости», и попарныя взаимоотношенія типа (6), стр. 432, между общимъ запаснымъ фондомъ S и отдѣльными спеціальными фондами; 3) укрѣплять посредствомъ избытковъ кассовой наличности государственно-національнаго фонда S истощающіяся спеціальныя фондовыя операціи; 4) *высшій* процентъ Q за *кредитъ* доминирующаго въ странѣ банка O, *низшій* процентъ q за *дебетъ* (т. е. по пріему вкладовъ) и *дивидендную причину* Q—q приспособлять къ выгодамъ и пользамъ всей *своей* страны (этимъ будетъ даваемо доказательство общей патріотичности государственно-національнаго учрежденія O) и къ условіямъ прочности (устойчивости) самого

учрежденія О въ его патріотической борьбѣ съ частными внутренними ошибками и неправдами и съ міровымъ Спрутомъ, символической гидрой, которую изображаютъ въ нашемъ государственномъ гербѣ поверженною у подножія св. Георгія Побѣдоносца.

Двойная критика (1° по уставамъ и 2° по математическимъ статистическимъ законамъ большихъ чиселъ) не представитъ столкновеній *сама съ собою* при слѣдующемъ историческимъ раздѣленіи ея задачъ на практикѣ. Выводы критики, основанной на законахъ большихъ чиселъ, должны имѣть главнымъ образомъ *цѣлесообразное реформирующее* дѣйствіе на таблицы и пункты уставовъ, т. е. лишь на *будущія* права заинтересованныхъ лицъ, т. е. послѣ реформы. Эти выводы не касаются личныхъ правъ за *прошедшее* и *настоящее* время, вытекшихъ изъ буквы дѣйствующихъ уставовъ, пока они не отмѣнены или не реформированы. Это принципіальное положеніе, не сознаваемое многими (вспомнимъ знаменитый «конституціонный рубль»), *отдѣляетъ какъ слѣдуетъ дѣло цѣлесообразности отъ дѣла законности*; *что* правильно разъяснилъ министръ финансовъ В. Н. Коковцовъ; эта *аксіома* есть основной элементъ философіи правовой исторіи. Слѣдовательно, выводы критики по закону большихъ чиселъ направляются не въ порядкѣ исполненія и не въ порядкѣ бюджетнаго права, а въ порядкѣ реформы уставовъ и инструкцій, обсуждаемой соотвѣтствующими высшими (законодательными) и низшими палатами, уполномоченными измѣнять и развивать на мѣстахъ законы и инструкціи. Напротивъ, критика вопросовъ права по буквѣ и смыслу дѣйствующихъ уставовъ обсуждаетъ лишь точное текущее исполненіе уставовъ и инструкцій, опредѣляющихъ права каждаго заинтересованнаго юридическаго лица, и жалобы на это исполненіе со стороны обиженныхъ.

Хронологически извращенный порядокъ функціонированія двойной исторической критики также представляетъ большую или меньшую путаницу, революцію или по меньшей софизмъ взаимострахового мышленія. Примѣромъ такого логическаго скандала можетъ служить законъ 1 іюня 1910 года о зачетѣ прежней (до вступленія въ кассу) службы учителей начальныхъ училищъ на пенсію за счетъ казны. Этотъ законъ, симпатичный по цѣли, но непостижимый по логикѣ, предложилъ желающимъ примѣнять къ себѣ страховой порядокъ, зачисляясь *заднимъ числомъ* въ участники кассы, т. е. событія прошедшаго времени онъ уровнялъ событіямъ будущаго времени, не устранивъ естественной спекуляціи.

Если бы подобный абсурдъ былъ примѣненъ къ страхованію отъ огня, то всѣ сгорѣвшіе предъявили бы крупный счетъ, внося заднимъ числомъ маленькія преміи; а несгорѣвшіе отказались бы страховать свое уцѣлѣвшее добро. Понятно, страховой банкъ скоро лопнулъ бы отъ благодѣяній этого рода.